
TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE.

PRÉFACE.	Pages 5
INTRODUCTION.	7
(1) Origine de l'Algèbre. Principaux inventeurs.	<i>ibid.</i>
(2) Objet de cet ouvrage.	11
(3) Définitions préliminaires. Équations numériques. Racines de ces équations. Équations littérales. Signes radicaux ; leur usage pour la résolution des équations.	12
(4) Équations qui contiennent plusieurs inconnues ; leurs racines. Racines réelles des équations numériques. Facteurs du premier degré. Facteurs du second degré ; racines imaginaires.	16
(5) Courbes paraboliques qui représentent les propriétés des équations. Fluxions des divers ordres. Maxima et minima. Points d'inflexion.	17
(6) Notion générale des limites, fondement de l'analyse différentielle.	20
(7) Décomposition en facteurs du second degré. Propriétés des courbes de divers ordres qui indiquent les racines imaginaires.	21
(8) Propriétés des racines égales.	<i>ibid.</i>
(9) Développement du binôme $z + b$. Terme qui complète la série.	22
(10) Expression différentielle de l'accroissement infiniment petit d'une fonction.	23
EXPOSÉ SYNOPTIQUE	
DES RÉSULTATS DÉMONTRÉS DANS CET OUVRAGE.	25
(1) Recherche des intervalles dans lesquels se trouvent les racines réelles des équations. Théorème désigné par (A).	<i>ibid.</i>

	Pages
(2) Valeurs <i>critiques</i> de l'inconnue indiquant l'existence d'un couple de racines imaginaires. Ces valeurs réduisent à zéro une des fonctions dérivées intermédiaires, et donnent le même signe aux fonctions précédente et suivante.	28
(3) Règle pour la distinction des racines imaginaires, désignée par (B). Elle est fondée sur la considération des <i>indices</i> des équations dérivées, c'est-à-dire des nombres qui expriment combien chacune de ces équations peut avoir de racines dans un intervalle donné.	30
(4) Remarques sur l'application des méthodes précédentes.	33
(5) Calcul des valeurs des racines réelles. Approximation linéaire, dérivée de la méthode newtonienne. Précautions qu'exige l'usage de cette méthode. Nouvelle règle arithmétique pour la division des nombres; elle pourrait servir à résoudre immédiatement les équations du second degré et des degrés supérieurs.	34
(6) Examen du degré de convergence de l'approximation linéaire, et de l'approximation du second ordre et des ordres supérieurs.	35
(7) Nouvel examen de la question qui a pour objet de distinguer les racines imaginaires. Solution de cette question par la considération du contact des arcs de parabole.	36
(8) Autres méthodes pour le calcul des racines réelles, dont les limites ont été déterminées par les règles (A) et (B). Développement en fractions continues ou en fractions de l'unité.	37
(9) Expression des irrationnelles algébriques en fonctions continues. Constructions qui représentent la marche de l'approximation.	40
(10) Toute méthode exacte d'approximation sert à distinguer les racines imaginaires, pourvu qu'on dirige le calcul par l'emploi du théorème (A). Application au procédé d'approximation fondé sur la méthode newtonienne.	42
(11) Application au procédé d'approximation résultant de l'emploi des fractions continues. Remarques générales.	45
(12) Résolution des équations littérales. Cette question peut être résolue complètement, et le principe de la solution existe dans les écrits de Newton, de Stirling et de Lagrange. Nouvelle méthode plus générale. Construction au moyen de laquelle on trouve successivement les premiers termes des facteurs correspondants aux racines de la proposée. Recherche des termes subséquents de ces facteurs. Exemples.	47
(13) Résolution simultanée de deux équations littérales à deux inconnues. La méthode s'étend aux équations multiples dont le nombre est égal à	

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE. 251

	Pages
celui des inconnues. Elle diffère beaucoup du procédé de l'élimination. La recherche des exposants est, en général, une application de la méthode des inégalités.	54
(14) Application des principes de l'analyse algébrique aux fonctions transcendantes.	59
(15) et (16) Propositions générales servant à déterminer les limites et les valeurs des racines dans les équations transcendantes. Cas où le produit de tous les facteurs simples qui réduisent à zéro le premier membre d'une équation transcendante peut avoir une valeur différente de celle de ce premier membre.	61
(17) Les rapports des séries récurrentes avec la théorie des équations sont plus étendus qu'on ne l'a pensé jusqu'à présent. On peut déterminer par cette méthode toutes les racines, réelles ou imaginaires, et en général tous les coefficients des facteurs d'un degré quelconque. Règle de Daniel Bernoulli; remarques d'Euler et de Lagrange.	68
(18) Questions nouvelles dont on s'est proposé la solution. Convergence de l'approximation résultant de l'emploi de la règle de Daniel Bernoulli. Détermination successive de toutes les racines réelles. Détermination des racines imaginaires.	70
(19) Les premiers fondateurs de l'analyse ont exprimé les valeurs des fonctions algébriques invariables de toutes les racines : les fonctions qui ne contiennent qu'un certain nombre des racines ont des propriétés non moins générales. Le procédé fondé sur l'emploi des séries récurrentes peut tenir lieu de toute autre méthode pour la recherche et la distinction des racines, et s'applique à la recherche des racines imaginaires; mais ce mode d'approximation exige en général trop de calcul.	74
(20) Principes de l'analyse des inégalités. Elle s'applique aux questions dont les conditions ne sont pas seulement exprimées par des équations, mais consistent aussi en ce que certaines fonctions des inconnues doivent être plus grandes ou moindres que des constantes données. Questions de statique résolues par cette méthode.	75
(21) Application de l'analyse des inégalités à la résolution des équations littérales, et à l'usage des équations de condition. Construction propre à déterminer les valeurs des inconnues qui donnent à la plus grande erreur la moindre valeur possible.	81
(22) Résumé. La notion que Viète avait proposée des l'origine de l'algèbre, et qui consistait à considérer simultanément tous les coefficients de l'équation pour en déduire par des opérations successives les parties	

de chaque racine, était la plus propre à diriger les recherches. Newton a donné une première partie de cette méthode *exégétique*; mais il n'a point découvert le moyen de reconnaître les racines imaginaires et de trouver deux limites pour chaque racine. Ces difficultés sont aujourd'hui résolues. Objets principaux des recherches contenues dans cet ouvrage.

84

LIVRE PREMIER.

MÉTHODE

POUR DÉTERMINER DEUX LIMITES DE CHAQUE RACINE RÉELLE ET POUR DISTINGUER LES RACINES IMAGINAIRES.

87

- (1) et (2) Substitution de plusieurs nombres dans les fonctions que l'on forme par des différentiations successives. Suite des signes des résultats. Proposition relative au nombre des changements de signe qui disparaissent successivement lorsque le nombre substitué augmente par degrés insensibles depuis $-\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\frac{1}{2}$. *ibid.*
- (3) La même proposition subsiste lorsque le nombre substitué fait évanouir plusieurs des fonctions intermédiaires. 92
- (4) Cette proposition convient au cas des racines égales. 96
- (5) Elle subsiste encore si la même substitution fait évanouir plusieurs fonctions dans diverses parties de la suite. 97
- (6) Ces démonstrations font connaître comment la suite perd ses changements de signe selon que les racines sont réelles, égales ou inégales, ou sont imaginaires. *ibid.*
- (7) Proposition générale concernant la diminution progressive du nombre des changements de signe. 98
- (8) Usage de cette proposition pour connaître combien une équation peut avoir de racines entre deux limites données. 99
- (9) La règle de Descartes relative au nombre des racines positives ou négatives est un corollaire de cette proposition. 101
- (10) La même proposition indique les seuls intervalles où les racines doivent être cherchées. *ibid.*

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE. 253

	Pages
(11) Règle pour déterminer le signe qu'il faut attribuer aux résultats lorsque les fonctions s'évanouissent. Exemple de cette règle du double signe. Conséquence relative au nombre des racines imaginaires.	102
(12) Application des théorèmes précédents à divers exemples, savoir à l'équation $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$.	104
(13) à l'équation $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$.	105
(14) à l'équation $x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$.	107
(15) à l'équation $x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$.	108
(16) Aux équations binomes, ou en général à celles qui manquent de plusieurs termes consécutifs.	109
(17) à l'équation $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.	111
(18) à l'équation $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 7 = 0$.	112
(19) à l'équation $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$.	113
(20) Intervalles dans lesquels on ne doit point chercher de racines. Intervalles où l'on doit chercher les racines réelles. Les racines réelles peuvent être trouvées ou manquer dans ces derniers intervalles.	114
(21) Question qui a pour objet de distinguer les racines imaginaires. Moyens divers de la résoudre.	115
(22) Conditions propres au cas élémentaire où la nature des deux racines indiquées est incertaine.	117
(23) Construction qui représente les conditions énoncées, les deux résultats $f(a)$ et $f(b)$ ayant le même signe +.	118
(24) Principe de la solution.	120
(25) Expression analytique du caractère qui sert à distinguer les racines imaginaires.	121
(26) Distinction des racines égales.	123
(27) Construction relative au cas où les deux résultats $f(a)$ et $f(b)$ ont le même signe.	<i>ibid.</i>
(28) Énoncé de la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires.	<i>ibid.</i>
(29) Exemples de l'application de cette règle, savoir à l'équation $x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$.	125
(30) à l'équation $x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$.	126
(31) et (32) Application des mêmes principes au cas où, dans les deux suites comparées, les signes sont disposés d'une manière quelconque. Règle pour la formation de la série des indices. Exemple.	127
(33) Relation entre deux indices consécutifs. Conséquence relative au dernier indice. Procédé général pour reconnaître la nature des racines.	129

	Pages
(34) Dans le cours de l'opération l'indice 1 le plus voisin de l'extrémité à droite se rapproche continuellement de cette extrémité.	130
(35) La question est réduite dans tous les cas possibles à l'application de la règle de l'article 28.	132
(36) Application du procédé de calcul qui sert à reconnaître la nature des racines. Premier exemple, $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$.	135
(37) Second exemple, $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$.	137
(38) Règle générale pour la détermination des limites des racines.	140
(39) Application de cette règle générale à l'équation $x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0$.	143
(40) à l'équation $x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.	145
(41) à l'équation $x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012 = 0$.	149
(42) Tableau comprenant tous les exemples cités.	151
(43) Valeurs indicatrices des racines imaginaires. Conclusion du premier livre.	154

LIVRE DEUXIÈME.

MÉTHODE

POUR CALCULER LES VALEURS DES RACINES DONT LES LIMITES SONT CONNUES,

ET REMARQUES DIVERSES SUR LA CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS ET SUR LA DISTINCTION DES RACINES.

	157
(1) Principe de l'approximation linéaire. Méthode newtonienne.	<i>ibid.</i>
(2) Conditions auxquelles cette méthode doit être assujétie. Question à résoudre.	158
(3) Les limites peuvent toujours être assez rapprochées pour que l'équation proposée $f(x) = 0$ ayant une seule racine dans l'intervalle, l'équation $f'(x) = 0$ et l'équation $f''(x) = 0$ n'aient aucune racine dans ce même intervalle.	159
(4) On connaît par la comparaison des suites si les conditions précédentes sont remplies. Exemple.	161
(5) Lemme 1 ^{er} . Si dans les deux suites comparées les signes des termes correspondants sont les mêmes, cette condition subsistera toujours en	

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE. 255

	Pages
substituant des nombres intermédiaires quelconques. Lemme II ^e . Si, pour un intervalle donné le dernier terme de la série des indices est 0, le dernier indice sera toujours nul, quels que soient les nombres intermédiaires substitués.	162
(6) Approximation linéaire. Démonstration. Valeur approchée plus grande que la racine.	165
(7) Valeur approchée moindre que la racine.	167
(8) Comparaison de ces deux valeurs.	168
(9) Convergence de l'approximation linéaire. La différence de deux valeurs approchées est proportionnelle au carré de la fraction qui mesure la différence des deux valeurs précédentes.	169
(10) Construction qui représente 1 ^o la valeur approchée donnée par la règle newtonienne, 2 ^o une autre limite nécessaire pour compléter l'approximation.	171
(11) Cette construction fait connaître clairement les conditions que suppose l'usage de la règle newtonienne.	174
(12) On ne doit faire usage du procédé d'approximation linéaire que lorsque les trois derniers termes de la série des indices sont devenus 0 0 1.	175
(13) Distinction des quatre cas de l'approximation linéaire. La limite à laquelle la règle newtonienne s'applique est celle qui donne le même signe pour $f''(x)$ et pour $f(x)$. <i>Limite extérieure. Limite intérieure.</i>	177
(14) La construction prouve qu'en rapprochant les limites on forme un intervalle pour lequel les trois derniers termes de la série des indices sont 0 0 1. Du cas singulier où les fonctions $f''(x)$ et $f(x)$ ont un facteur commun.	178
(15) Résumé des conséquences précédentes relatives aux conditions qu'il faut observer en procédant au calcul de la racine.	180
(16) Règle qu'il faut suivre pour trouver deux nouvelles limites plus rapprochées que les deux précédentes.	181
(17) Propriétés des cinq limites différentes qui constituent l'approximation linéaire.	182
(18) Application au cas élémentaire de l'équation à deux termes. Construction. Conséquences relatives aux chiffres communs aux deux nouvelles limites approchées.	183
(19) Remarques générales sur les méthodes exégétiques de Viète. Énoncé des questions qu'il faut résoudre pour n'introduire aucune opération superflue dans le calcul des racines.	185

	Pages
(20) Règle abrégée pour la division des nombres. Elle consiste à déterminer avec certitude les chiffres du quotient, en introduisant successivement les chiffres du diviseur à mesure qu'il devient nécessaire de les employer.	187
(21) Remarques diverses concernant cette règle. On peut former le produit de deux facteurs composés d'un nombre quelconque de chiffres sans écrire aucun des produits partiels. Exemples de la division ordonnée.	189
(22) La règle précédente peut servir à déterminer les chiffres qui expriment la racine de l'équation du second degré. Application à l'équation $x^2 + 765432x = 123456$.	193
(23) La même règle pour la division à diviseur variable pourrait être appliquée aux équations numériques d'un degré quelconque. Application à l'équation $x^3 + 345x = 12$.	194
(24) Règle pour opérer la substitution, dans la fonction proposée et dans les fonctions dérivées, des valeurs de plus en approchées que l'on obtient pour la racine, de manière à éviter les calculs superflus.	198
(25) On peut éviter le calcul de la seconde limite qui est nécessaire pour définir l'approximation newtonienne en considérant la différence des deux limites. Expression de cette différence. Expression d'une quantité que la différence dont il s'agit ne peut dépasser.	199
(26) Seconde limite déduite de la considération de la sécante, qui pourrait également servir à définir l'approximation.	202
(27) et (28) Indication de l'ordre décimal du chiffre du quotient auquel la division doit être arrêtée dans l'approximation newtonienne, afin d'obtenir tous les chiffres exacts qui peuvent être donnés par chaque opération, et de ne pas être exposé à déterminer des chiffres qui n'appartiendraient pas à la valeur de la racine. Loi suivant laquelle le nombre des chiffres exacts donnés par chaque opération augmente de plus en plus.	204
(29) Énoncé de la règle d'après laquelle on doit procéder à l'approximation de la valeur de la racine.	208
(30) Application de cette règle à l'approximation de la racine réelle de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ calculée jusqu'au chiffre décimal du trente-deuxième ordre.	209
(31) Application de l'analyse différentielle au cas le plus simple de l'approximation linéaire. Relation entre l'erreur d'une valeur approchée et	

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE. 257

	Pages
la différence de deux limites dont l'une est déterminée par la tangente en un point voisin du point d'intersection, et l'autre par une parallèle à la tangente au point d'intersection.	217
(32) Relation finale entre l'erreur ω d'une certaine approximation et l'erreur ω' de l'approximation suivante. On trouve $\omega' = -\frac{\omega^2}{2} \frac{f'' x}{f' x}$, x désignant l'abscisse du point d'intersection.	219
(33) Approximation du second degré. Mesure de la convergence finale. ω désignant l'erreur d'une certaine valeur approchée, et ω' l'erreur de la valeur plus approchée qui la suit immédiatement, on a cette relation $\omega' = -\frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{f''' x}{f' x}$.	221
(34) Expression générale de la convergence de l'approximation qui résulterait d'un contact du troisième ordre, du quatrième ordre, etc., ou d'un ordre quelconque. On ne pourrait point former cette expression par l'analyse que l'on vient d'employer pour le premier et le second ordre; on y parvient en appliquant la règle qui sert à la résolution d'une équation littérale. On trouve ainsi que l'approximation d'un ordre i devient de plus en plus et indéfiniment convergente à mesure que le nombre i augmente. L'erreur correspondante à chaque opération est le produit de la puissance i de l'erreur immédiatement précédente par le facteur constant $-\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots i} \frac{f^{(i)} x}{f' x}$.	223
(35) Remarques générales concernant la distinction des racines imaginaires. La question consiste à connaître le signe du résultat que l'on obtiendrait en substituant dans une fonction donnée $f x$ une valeur très-approchée de la racine α qui réduit à zéro une autre fonction $F x$.	227
(36) Si l'on fait abstraction du cas singulier où l'on aurait $F x = f' x$ la question est résolue par les principes démontrés dans le premier livre.	230
(37) Le même procédé s'applique aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.	231
(38) Solution de la même question dans le cas singulier où la fonction $F x$ et $f' x$.	232
(39) Exemple de cette solution.	234
(40) Nouvelle règle pour la distinction des racines imaginaires.	236
(41) Usage de l'approximation du second ordre pour la distinction des	

	Pages.
racines imaginaires. Premier cas où le signe de $f'''x$ est +, et le signe de fx est +.	237
(42) Conditions générales pour le premier cas.	242
(43) Examen du second cas où le signe de $f'''x$ est —, et le signe de fx est +. Condition relatives aux deux limites.	<i>ibid.</i>
(44) Examen du troisième cas où le signe de $f'''x$ est +, et le signe de fx est —. Conditions relatives aux deux limites.	244
(45) Examen du quatrième cas où le signe de $f'''x$ est —, et le signe de fx est —. Conditions relatives aux deux limites.	245
(46) Énoncé de la règle générale qui sert à distinguer les racines imaginaires par les propriétés du contact du second ordre.	246
