

## Über das Grundtheorem und die Obertheoreme der automorphen Funktionen im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung mit vier singulären Punkten.

Von Hermann Rothe in Wien.

In seiner im 64. Bande der Math. Ann. erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> hat F. Klein den Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und dem für die Theorie der automorphen Funktionen fundamentalen Problem der Bestimmung der in einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auftretenden akzessorischen Parameter dargetan. Dieselbe Frage behandelte ein von ihm im Winter 1906/07 in Göttingen gehaltenen Seminarvortrag. Sein Wunsch war nun zunächst, daß die Betrachtungen, welche zur Parameterbestimmung führen, nicht in abstracto bleiben, sondern wenigstens in einem speziellen Falle so weit durchgeführt werden möchten, daß auch die numerische Berechnung der akzessorischen Parameter möglich wird. Auf seine Anregung habe ich nun im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung mit vier singulären Punkten versucht, die Werte des akzessorischen Parameters, die zum gewöhnlichen automorphen Fall und zu den zugehörigen Obertheoremen gehören, in Intervalle einzugrenzen und einige derselben in einem Zahlenbeispiel auch numerisch zu berechnen. Schließlich ergab sich auch ein Beweis für das Grundtheorem und die Obertheoreme nach der Kontinuitätsmethode, der man freilich nicht völlige Strenge zubilligen wird, die aber bei den „eigentlich transzendenten“ Problemen, um die es sich hier handelt, noch immer nicht entbehrt werden kann.

### § 1. Aufstellung der linearen Differentialgleichung.

Um den in der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auftretenden akzessorischen Parameter in einem speziellen Falle einzugrenzen und numerisch zu berechnen, soll die folgende Aufgabe behandelt werden:

„Es ist die positive (oder negative)  $x$ -Halbebene mit vier auf ihrer Begrenzung gelegenen, also reellen singulären Punkten

$$a, b, c, d$$

<sup>1)</sup> F. Klein, „Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“, Math. Ann. 64 (1907), p. 175—196.

und den zugehörigen Exponentendifferenzen:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \rho \quad (0 \leq \rho < 1)$$

konform abzubilden auf ein Kreisbogenviereck der  $\eta$ -Ebene (oder  $\eta$ -Kugel), welches dann die Winkel

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \rho\pi$$

besitzt und dessen Seiten einen Kreis orthogonal schneiden.<sup>4</sup>

Die singulären Punkte mögen so gewählt werden, daß

$$a > b > c \quad \text{und} \quad d = \infty$$

wird; die zu:

$$a, b, c, d = \infty$$

gehörigen Exponenten seien

$$\alpha' = \frac{1}{2}, \beta' = \frac{1}{2}, \gamma' = \frac{1}{2}, \delta'$$

$$\alpha'' = 0, \beta'' = 0, \gamma'' = 0, \delta'',$$

wobei  $\delta', \delta''$  aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' + \delta' + \delta'' &= 2, \\ \delta' - \delta'' &= \rho \end{aligned}$$

zu bestimmen sind, aus denen folgt:

$$\delta' = \frac{1}{4} + \frac{\rho}{2},$$

$$\delta'' = \frac{1}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die verlangte Abbildung vermittelt, ist dann eine gewöhnliche Lamésche Differentialgleichung von der Form<sup>1)</sup>

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \left( \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)} \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{\rho}{2} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{\rho}{2} \right) x + \lambda \right] = 0,$$

wobei  $\lambda$  den zu bestimmenden akzessorischen Parameter bedeutet.

<sup>1)</sup> F. Klein, „Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung“, autogr. Vorlesung, gehalten im Sommersem. 1894, 2. Abdruck, Leipzig 1906, p. 276 ff.

Um dieser Differentialgleichung (1) eine einfachere Gestalt zu geben, setzen wir

$$(2) \quad \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4(x-a)(x-b)(x-c)}} = u;$$

gleichzeitig verlegen wir den Nullpunkt der  $x$ -Ebene in den Schwerpunkt der drei Punkte  $a, b, c$ , die wir fortan mit  $e_1, e_2, e_3$  bezeichnen, so daß:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

und

$$(3) \quad x = p(u),$$

die Weierstraßsche  $p$ -Funktion, wird.

Durch Einführung von  $u$  an Stelle von  $x$  als unabhängige Variable erhält die Differentialgleichung (1) die Hermite-Lamé'sche Form

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{du^2} = [A p(u) + B] \cdot y,$$

wobei

$$A = -4 \left( \frac{1}{4} + \frac{\rho}{2} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{\rho}{2} \right) = \rho^2 - \frac{1}{4}$$

und

$$B = -4\lambda$$

gesetzt wurde.

Durch den Hauptwert des elliptischen Integrals erster Gattung (2) mit den vier reellen Verzweigungspunkten

$$\infty, e_1, e_2, e_3$$

wird bekanntlich die positive  $x$ -Halbebene konform abgebildet auf ein Rechteck  $P$  in der  $u$ -Ebene, und zwar derart, daß den singulären Punkten

$$x = \infty, e_1, e_2, e_3$$

die Ecken desselben,

$$u = 0, -\omega_1, -\omega_1 + \omega_3, \omega_3$$

entsprechen, wobei  $2\omega_1 = 2|\omega_1|$  die reelle,  $2\omega_3 = 2i|\omega_3|$  die rein imaginäre primitive Periode des Integrals (2) bedeutet.<sup>1)</sup>

Verstehen wir indessen unter  $u$  nicht gerade den Hauptwert, sondern irgend einen Wert des Integrals (2), der einem beliebigen von  $\infty$  nach  $x$  führenden Integrationswege auf der unzerschnittenen

<sup>1)</sup> Bezüglich der verwendeten Bezeichnungsweise vergleiche man: H. Burkhardt, „Elliptische Funktionen“, 2. Aufl., Leipzig 1906.

reiblättrigen Riemannschen Fläche entspricht, so erhalten wir  
 andere Bilder der Punkte  $\infty, e_1, e_2, e_3$ , die aus  $0, -\omega_1, -\omega_1 + \omega_3, \omega_3$   
 durch eine Translation

$$2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3$$

hervorgehen, unter  $h_1, h_3$  beliebige reelle ganze Zahlen verstanden.

Besondere sind also die Punkte  $\left\{ \begin{matrix} \omega_1 + 2h_3\omega_3 \\ \omega_3 + (2h_1 + 1)\omega_1, \omega_1 + (2h_3 + 1)\omega_3 \\ \omega_3 + 2h_1\omega_1 \end{matrix} \right\}$

Bilder des Punktes  $\left\{ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \right\}$ , so daß die Strecke  $\left\{ \begin{matrix} e_3 e_2 \\ e_1 e_2 \end{matrix} \right\}$  der  $x$ -Ebene un-

endlich oft auf der  $\left\{ \begin{matrix} \text{horizontalen} \\ \text{vertikalen} \end{matrix} \right\}$  Geraden  $\left\{ \begin{matrix} X \text{ durch } \omega_3 \\ Y \text{ „ } \omega_1 \end{matrix} \right\}$  der  
 Ebene abgewickelt erscheint.

Es ist bequemer, die nachstehenden Betrachtungen auf das  
 Rechteck  $N$  mit den Ecken

$$0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3 = -\omega_2, \omega_3$$

beziehen, welches aber ein konformes Abbild der negativen  
 Halbebene darstellt.

Die Exponenten der linearen Differentialgleichung (4), die  
 in den Punkten

$$u = 0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3$$

der  $u$ -Ebene gehören, sind:

$$\frac{1}{2} + \rho, \quad 1, \quad 1, \quad 1,$$

$$\frac{1}{2} - \rho, \quad 0, \quad 0, \quad 0;$$

gleich sind die Punkte  $\omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3$  reguläre Stellen der  
 Gleichung (4); singular bleibt nach der Transformation (2) nur die  
 Stelle  $u = 0$  und die zu ihr äquivalenten Stellen  $u = 2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3$ .

Die Fundamentallösungen von (4) bei  $u = 0$  haben, wie man  
 leicht sieht, die Form:

$$y_1^{(0)} = u^{\frac{1}{2} + \rho} \mathfrak{P}_1^{(0)}(u^2),$$

$$y_2^{(0)} = u^{\frac{1}{2} - \rho} \mathfrak{P}_2^{(0)}(u^2);$$

bei  $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}$  ganze Potenzreihen in  $u^2$  sind, deren konstante  
 Glieder nicht verschwinden und daher, wie im folgenden voraus-  
 gesetzt werden soll, gleich 1 angenommen werden können.

Die Fundamentallösungen von (4) bei  $u = \omega_1$  resp.  $u = \omega_3$  haben die Form

$$(5a) \quad \begin{cases} y_1^{(\omega_1)} = (u - \omega_1) \mathfrak{P}_1^{(\omega_1)}(u - \omega_1), \\ y_2^{(\omega_1)} = \mathfrak{P}_2^{(\omega_1)}(u - \omega_1), \end{cases}$$

resp.

$$(5b) \quad \begin{cases} y_1^{(\omega_3)} = (u - \omega_3) \mathfrak{P}_1^{(\omega_3)}(u - \omega_3), \\ y_2^{(\omega_3)} = \mathfrak{P}_2^{(\omega_3)}(u - \omega_3), \end{cases}$$

wobei  $\mathfrak{P}_1^{(\omega_1)}$ ,  $\mathfrak{P}_2^{(\omega_1)}$ ,  $\mathfrak{P}_1^{(\omega_3)}$ ,  $\mathfrak{P}_2^{(\omega_3)}$  ganze Potenzreihen in den beigefügten Argumenten sind, deren konstante Glieder nicht verschwinden und die überdies so bestimmt werden können, daß in  $\mathfrak{P}_2^{(\omega_1)}$  resp.  $\mathfrak{P}_2^{(\omega_3)}$  das Glied mit der ersten Potenz von  $u - \omega_1$  resp.  $u - \omega_3$  fehlt.<sup>1)</sup> Wir haben alsdann die Gleichungen:

$$(6a) \quad y_1^{(\omega_1)}(\omega_1) = 0, \quad y_2^{(\omega_1)'}(\omega_1) = \left[ \frac{dy_2^{(\omega_1)}}{du} \right]_{u=\omega_1} = 0,$$

resp.

$$(6b) \quad y_1^{(\omega_3)}(\omega_3) = 0, \quad y_2^{(\omega_3)'}(\omega_3) = \left[ \frac{dy_2^{(\omega_3)}}{du} \right]_{u=\omega_3} = 0.$$

## § 2. Umsetzung der „Involutionsbedingung“ in eine transzendente Gleichung für den Parameter $B$ .

Die beiden Potenzreihen  $\mathfrak{P}_1^{(0)}(u^2)$ ,  $\mathfrak{P}_2^{(0)}(u^2)$  in (5) und ihre Ableitungen nach  $u$  konvergieren, solange  $|u|$  kleiner ist als die kleinere der beiden Zahlen  $2|\omega_1|$ ,  $2|\omega_3|$ . Wählen wir also  $\omega_1$  und  $\omega_3$  so, daß

$$2|\omega_1| > |\omega_3|, \quad 2|\omega_3| > |\omega_1|,$$

d. h.

$$(7) \quad 2|\omega_1| > |\omega_3| > \frac{1}{2}|\omega_1|$$

ist, so liegen die Punkte  $\omega_1$  und  $\omega_3$  sicher im Konvergenzbereiche der Reihen  $y_1^{(0)}$ ,  $y_2^{(0)}$ ,  $y_1^{(0)'}$ ,  $y_2^{(0)'}$ .

Da an den Fundamentallösungen (5a) resp. (5b) nichts Wesentliches geändert wird, wenn wir sie mit irgend welchen Kon-

<sup>1)</sup> Man vergleiche z. B.: R. Fricke, „Funktionentheoretische Vorlesungen“, Leipzig 1900, p. 347.

Im obigen Falle können die Potenzreihen sogar so bestimmt werden, daß sie nach geraden Potenzen der beigefügten Argumente fortschreiten.

ten multiplizieren, so können wir dieselben unter der Voraussetzung, daß die Ungleichungen (7) erfüllt sind, folgendermaßen durch die Fundamentallösungen (5) darstellen:

$$a) \quad \begin{cases} y_1^{(\omega_2)} = y_1^{(0)} - \lambda_1 y_2^{(0)}, \\ y_2^{(\omega_1)} = y_1^{(0)} - \lambda_2 y_2^{(0)}, \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} y_1^{(\omega_3)} = y_1^{(0)} - \nu_1 y_2^{(0)}, \\ y_2^{(\omega_3)} = y_1^{(0)} - \nu_2 y_2^{(0)}, \end{cases}$$

bei  $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2$  bestimmte konstante Größen sind, die wegen a) resp. b) den folgenden Gleichungen genügen müssen:

$$a) \quad \begin{cases} y_1^{(0)}(\omega_1) - \lambda_1 y_2^{(0)}(\omega_1) = 0, \\ y_1^{(0)' }(\omega_1) - \lambda_2 y_2^{(0)' }(\omega_1) = 0, \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} y_1^{(0)}(\omega_3) - \nu_1 y_2^{(0)}(\omega_3) = 0, \\ y_1^{(0)' }(\omega_3) - \nu_2 y_2^{(0)' }(\omega_3) = 0, \end{cases}$$

aus denen folgt:

$$a) \quad \lambda_1 = \frac{y_1^{(0)}(\omega_1)}{y_2^{(0)}(\omega_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{y_1^{(0)' }(\omega_1)}{y_2^{(0)' }(\omega_1)},$$

$$b) \quad \nu_1 = \frac{y_1^{(0)}(\omega_3)}{y_2^{(0)}(\omega_3)}, \quad \nu_2 = \frac{y_1^{(0)' }(\omega_3)}{y_2^{(0)' }(\omega_3)}.$$

Die in (5) vorkommenden Potenzreihen  $\mathfrak{P}_1^{(0)}(u^2), \mathfrak{P}_2^{(0)}(u^2)$  besitzen reelle Koeffizienten; daraus folgt, daß die Größen  $\lambda_1, \lambda_2$  selbst reell sind, während sich  $\nu_1, \nu_2$  als Produkte reeller Größen mit dem Einheitsfaktor  $e^{i\pi\varrho}$  darstellen lassen. Wir schreiben also

$$) \quad \begin{cases} \lambda_1 = l_1, & \lambda_2 = l_2, \\ \nu_1 = n_1 \cdot e^{i\pi\varrho}, & \nu_2 = n_2 \cdot e^{i\pi\varrho}, \end{cases}$$

bei  $l_1, l_2, n_1, n_2$  reelle Größen bedeuten.

Soll nun das Kreisbogenviereck, auf welches die positive oder negative  $x$ -Halbebene durch den Quotienten  $\eta = \frac{y_1}{y_2}$  zweier Partikular-

lösungen von (1) in bekannter Weise konform abgebildet wird, einen Orthogonalkreis besitzen, so muß die folgende „Involutionsbedingung“ erfüllt sein <sup>1)</sup>:

$$(12) \quad l_1 l_2 = n_1 n_2,$$

die unmittelbar die nachstehende transzendente Gleichung zur Bestimmung des Parameters  $B$  liefert:

$$(12a) \quad \frac{y_1^{(0)}(\omega_1) y_1^{(0)' }(\omega_1)}{y_2^{(0)}(\omega_1) y_2^{(0)' }(\omega_1)} = e^{-2i\pi\rho} \cdot \frac{y_1^{(0)}(\omega_3) y_1^{(0)' }(\omega_3)}{y_2^{(0)}(\omega_3) y_2^{(0)' }(\omega_3)}.$$

Wir behandeln im folgenden nur den für die Theorie der automorphen Funktionen in Betracht kommenden Fall, in welchem das Kreisbogenviereck einen reellen Orthogonalkreis  $K$  mit nicht verschwindendem Radius besitzt, wo also

$$(13) \quad 0 \leq \rho < \frac{1}{2}$$

ist.<sup>2)</sup> Dann existiert — wie in der Theorie der automorphen Funktionen gezeigt wird und wie wir in § 7 abermals beweisen werden — sicher eine reelle Wurzel  $B_{00}$  der Gleichung (12a), die ein ganz im Innern des Orthogonalkreises gelegenes Viereck liefert („gewöhnlicher automorpher Fall“). (Vgl. Fig. 1, wo der Orthogonalkreis  $K$  der Einfachheit halber als Gerade dargestellt ist.)

Die Obertheoreme der automorphen Funktionen behaupten nun die Existenz von unendlich vielen weiteren reellen Wurzeln von (12a), die zu Vierecken gehören, welche ebenfalls einen reellen Orthogonalkreis  $K$  besitzen, aber aus demselben heraustreten (Fig. 1) Diese Obertheoreme sollen in § 7 bewiesen werden; indem wir sie vorläufig als richtig annehmen, können wir unsere nächste Aufgabe so formulieren:

„Es sollen die reellen Wurzeln  $B$  von (12a) so in Intervalle eingegrenzt werden, daß in jedem derselben und sonst nirgendwo eine und nur eine Wurzel  $B$  gelegen ist; insbesondere soll dasjenige Intervall ausfindig gemacht werden, in welchem die zum gewöhnlichen automorphen Fall gehörige Wurzel  $B_{00}$  zu suchen ist.“

<sup>1)</sup> F. Klein, Math. Ann. 64, p. 189, (7).

<sup>2)</sup> Für  $\rho = \frac{1}{2}$  reduziert sich der Orthogonalkreis  $K$  auf einen Punkt, für  $\frac{1}{2} < \rho < 1$  wird er imaginär (sein Mittelpunkt bleibt reell, aber der Radius wird rein imaginär). Dieser letzte Fall spielt in der Theorie der Minimalflächen eine Rolle.

**§ 3. Eingrenzung der zum gewöhnlichen automorphen Falle gehörigen Wurzel  $B_{00}$  der transzendenten Gleichung (12a) in ein Intervall.<sup>1)</sup>**

Durchläuft ein Punkt  $x$  wiederholt das Intervall  $\overline{e_3 e_2}$  der reellen  $x$ -Achse, indem er von  $e_3$  nach  $e_2$ , dann wieder zurück nach  $e_3$ , dann abermals nach  $e_2$  und wieder zurück nach  $e_3$  geht etc., so beschreibt sein Bildpunkt  $u$ , bei einem Punkte ( $e_3$ ) beginnend, die Gerade  $X$ , ohne die Richtung seiner Bewegung zu ändern. In gleicher Weise entspricht einer wiederholten Durchlaufung des Intervalls  $\overline{e_1 e_2}$  eine einfache Durchlaufung der Geraden  $Y$ . Daraus ist zugleich ersichtlich, daß  $du$  im Intervall  $\overline{e_3 e_2}$  reell, im Intervall  $\overline{e_1 e_2}$  hingegen rein imaginär ist.

Die Funktion  $x = p(u)$  wird zwar im Nullpunkte der  $u$ -Ebene und in allen damit äquivalenten Punkten  $2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3$  zweifach unendlich, verhält sich aber in allen anderen Punkten  $u$ , also insbesondere längs  $X$  und  $Y$ , durchaus regulär; sie nimmt auf diesen beiden Geraden nur reelle Werte an, und zwar ist längs  $X$

$$(14) \quad e_3 \leq p(u) \leq e_2,$$

und längs  $Y$

$$(14a) \quad e_2 \leq p(u) \leq e_1.$$

Die Differentialgleichung (4) besitzt also, wenn wir  $u$  auf  $X$  oder  $Y$  beschränken, keinerlei Singularität.

Da also der Koeffizient  $Ap(u) + B$  auf der Geraden  $X$  nur reelle Werte annimmt, können wir zwei zum Punkte ( $e_2$ ) =  $\omega_1 + \omega_3 = -\omega_2$  gehörige, längs  $X$  reelle Fundamentallösungen  $y_1(u)$ ,  $y_2(u)$  von (4) finden und dieselben, wie man leicht erkennt, noch überdies in folgender Form annehmen:

$$(15) \quad \begin{cases} y_1 = (u + \omega_2) \mathfrak{P}_1((u + \omega_2)^2), \\ y_2 = \mathfrak{P}_2((u + \omega_2)^2), \end{cases}$$

wobei  $\mathfrak{P}_1$ ,  $\mathfrak{P}_2$  ganze Potenzreihen mit reellen Koeffizienten bedeuten, die mit von Null verschiedenen konstanten Gliedern beginnen und nach Potenzen von  $(u + \omega_2)^2$  fortschreiten.

Der Quotient:

$$(16) \quad \eta = \frac{y_1}{y_2} = (u + \omega_2) \mathfrak{P}((u + \omega_2)^2)$$

<sup>1)</sup> Von F. Klein in dem oben erwähnten Seminarvortrage durchgeführt.

bildet die negative  $x$ -Halbebene resp. das Rechteck  $N$  der  $u$ -Ebene mit den Ecken  $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3 = -\omega_2, \omega_3$  konform ab auf ein Kreisbogenviereck  $d' a' b' c'$  der  $\eta$ -Ebene (oder  $\eta$ -Kugel), das einen Orthogonalkreis  $K$  besitzt, wenn wir den Parameter  $B$  in (4) auf die verlangte Art bestimmen. Dabei wird insbesondere dem Punkte  $(e_2) = -\omega_2$  der  $u$ -Ebene der Nullpunkt der  $\eta$ -Kugel und dem Intervalle  $(e_3)(e_2) = \omega_3, -\omega_2$  der Geraden  $X$  das Stück  $c' b'$  des Meridians der reellen Zahlen auf der  $\eta$ -Kugel entsprechen (Fig. 1).

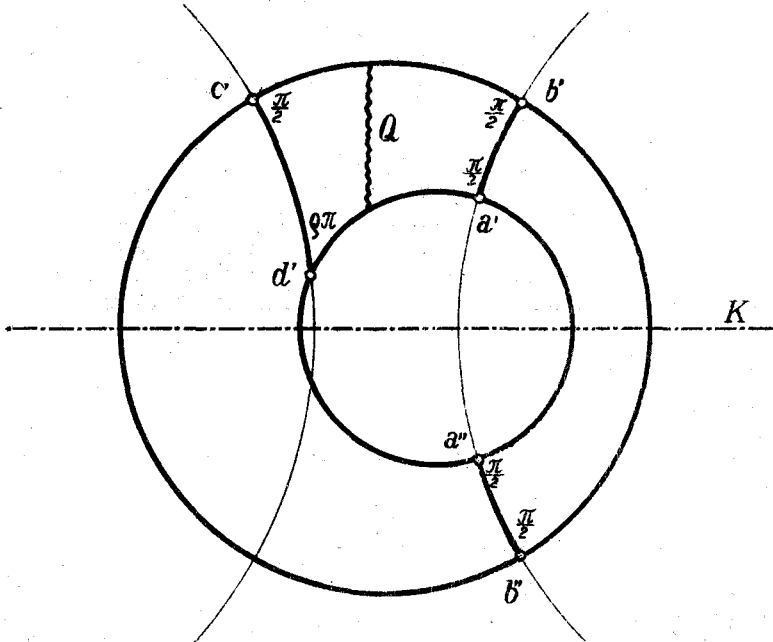


Fig. 1.

In dem Punkte  $c'$  der  $\eta$ -Kugel, welcher dem Punkte  $u = \omega_3$  von  $X$  entspricht, nimmt  $\eta$  einen bestimmten reellen Wert  $k_3$  an, der durch:

$$(17) \quad k_3 = \eta(\omega_3) = (\omega_2 + \omega_3) \mathfrak{P}((\omega_2 + \omega_3)^2) = -\omega_1 \mathfrak{P}(\omega_1^2)$$

gegeben ist. Die längs  $X$  reelle Lösung

$$(18) \quad y = y_1 - k_3 y_2$$

von (4) verschwindet also im Punkte  $(e_3) = \omega_3$ ; jede andere in diesem Punkte verschwindende reelle Lösung von (4) hat die Form

$$(19) \quad y = C_3 \cdot (y_1 - k_3 y_2),$$

unter  $C_3$  irgend eine reelle Konstante verstanden.

Wird nun die Gerade  $X$  von einem Punkte  $u$  von  $(e_3) = \omega_3$  an in positiver Richtung durchlaufen, so durchläuft der Bildpunkt  $\eta$ , bei  $c'$  beginnend, den Meridian  $\widehat{c'b'}$  der reellen Zahlen, und zwar so, daß die Fläche des Kreisbogenviereckes zur Rechten bleibt. Den verschiedenen Intervallen

$$\overline{(e_3)(e_2)} = \overline{\omega_3, \omega_1 + \omega_3}, \overline{(e_2)(e_3)} = \overline{\omega_1 + \omega_3, 2\omega_1 + \omega_3} \text{ etc.,}$$

von  $X$  entsprechen dabei Kreisbögen dieses Meridians, die aus dem ersten,  $\widehat{c'b'}$ , durch wiederholte Inversion (zunächst an  $\widehat{a'b'}$ ) entstehen.

In der Theorie der gewöhnlichen (eindeutigen) automorphen Funktionen wird nun verlangt, den Parameter  $B$  in (4) so zu bestimmen, daß das Kreisbogenviereck  $d'a'b'c'$  einen reellen Orthogonalkreis  $K$  besitzt und selbst ganz innerhalb desselben gelegen ist; dasselbe gilt auch von allen Kreisbogenvierecken, die aus  $d'a'b'c'$  durch beliebig oft wiederholte Inversion an seinen Seiten entstehen. Somit muß sich in diesem Falle der Bildpunkt  $\eta$  des die Gerade  $X$  durchlaufenden Punktes  $u$  längs des Meridians  $\widehat{c'b'}$  immer mehr dem Orthogonalkreise  $K$  nähern, ohne denselben je zu überschreiten. Es darf daher  $\eta$  nie eine volle Umkreisung des reellen Meridians ausführen und wieder an die Stelle  $c'$  zurückkommen, d. h.  $\eta$  darf den Wert  $k_3$  kein zweites Mal annehmen. Daraus ergibt sich:

„In dem zur Diskussion stehenden gewöhnlichen automorphen Falle muß der Parameter  $B$  in (4) jedenfalls so bestimmt werden, daß eine reelle Partikularlösung:

$$(19) \quad y = C_3 \cdot (y_1 - k_3 y_2)$$

außer im Punkte  $u = \omega_3$ , welcher dem Punkte  $c'$  ( $\eta = k_3$ ) entspricht, auf der Geraden  $X$  nirgends verschwindet.“

Ein ganz analoger Satz besteht natürlich, wenn wir eine längs  $Y$  reelle, bei  $u = \omega_1$  verschwindende Lösung:

$$(19a) \quad y = C_1 \cdot (y_1 - k_1 y_2)$$

verfolgen, während  $x$  wiederholt das Intervall  $\overline{e_1 e_2}$ , also  $u$  die Gerade  $Y$  und  $\eta$  den Meridian  $\widehat{a'b'}$  der rein imaginären Zahlen durchläuft. Die in (19a) auftretenden Konstanten  $C_1$  und  $k_1$  sind rein imaginär; insbesondere ist:

$$(17a) \quad k_1 = \eta(\omega_1) = (\omega_1 + \omega_2) \mathfrak{P}((\omega_1 + \omega_2)^2) = -\omega_3 \mathfrak{P}(\omega_3^2).$$

Zu einer Eingrenzung des Parameterwertes  $B_{00}$  gelangen wir nun unter Heranziehung der Sturm'schen Vergleichungssätze<sup>1)</sup> in der folgenden Weise:

Die der Funktion (19)

$$y = C_3 \cdot (y_1 - k_3 y_2)$$

entsprechende, über der Geraden  $X$  als Abszissenachse konstruierte Integralkurve von (4) ist in einem Punkte  $u$  von  $X$  konvex oder konkav gegen diese  $u$ -Achse, je nachdem an dieser Stelle der Koeffizient  $Ap(u) + B > 0$  oder  $< 0$  ist; das Umgekehrte gilt für die Integralkurve (19a)

$$y = C_1 \cdot (y_1 - k_1 y_2)$$

über  $Y$ , indem im ersten Falle  $du^2 > 0$ , im zweiten  $du^2 < 0$  ist. Um dies bequem übersehen zu können, konstruieren wir eine Hilfsgerade<sup>2)</sup>  $g$  über der  $x$ -Achse als Abszissenachse mit der Ordinate

$$(20) \quad y = Ax + B.$$

Da nun in unserem Falle die Ungleichungen (13) bestehen, so ist:

$$A = \rho^2 - \frac{1}{4} < 0, \quad |A| < \frac{1}{4},$$

so daß die Hilfsgerade  $g$  mit der positiven  $x$ -Achse einen stumpfen Winkel einschließt, dessen Tangente zwischen  $-\frac{1}{4}$  und  $0$  liegt:

Bezeichnen wir noch den Abschnitt der Geraden  $g$  auf der  $x$ -Achse mit  $e$ , so ist

$$(21) \quad B = -Ae$$

und insbesondere für die durch  $e_1$  und  $e_3$  gehenden Geraden  $g_1$  und  $g_3$ :

$$B_1 = -Ae_1, \quad B_3 = -Ae_3.$$

Nun ist  $du$  im Intervall  $\overline{e_3 e_2}$  reell, also  $du^2 > 0$  und im Intervall  $\overline{e_1 e_2}$  rein imaginär, also  $du^2 < 0$ . Die oben ausgesprochene Forderung wird daher sicher nicht erfüllt werden, wenn:

$$y = Ax + B = Ap(u) + B$$

im ganzen Intervall  $\overline{e_3 e_2}$  negativ oder im ganzen Intervall  $\overline{e_1 e_2}$  positiv ist, d. h. wenn  $g$  links von  $g_3$  oder rechts von  $g_1$  verläuft,

<sup>1)</sup> C. Sturm, „Sur les équations différentielles linéaires du second ordre“, Journal de Mathématiques 1, Paris 1836, pag. 106.

Derselbe: „Sur une classe d'équations à différences partielles“, ebenda, pag. 373.

<sup>2)</sup> F. Klein: „Über Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind“, Math. Ann. 18 (1881).

indem dann die zugehörigen Integralkurven (19) oder (19a) gegen die jeweilige  $u$ -Achse stärker konkav gekrümmt sind als gewisse Sinuslinien und diese daher sicher auch in vom Ausgangspunkte verschiedenen Punkten schneiden müssen. Also muß  $g$  zwischen den beiden Grenzlagen  $g_1$  und  $g_3$  liegen, woraus folgt:

$$(22) \quad e_3 < e < e_1$$

oder

$$(22a) \quad B_3 < B < B_1.$$

Die zum gewöhnlichen automorphen Falle gehörige Wurzel  $B_{00}$  muß daher im Intervall  $\overline{B_3 B_1}$  liegen; wir zeigen nun zunächst, daß dort keine zu einem Obertheorem gehörige Wurzel von (12a) liegen kann.

#### § 4. Die Obertheoreme. Nachweis, daß im Intervall $\overline{B_3 B_1}$ keine zu einem Obertheorem gehörige Wurzel $B$ liegt.

Die Involutionsbedingung (12) drückt aus, daß das Kreisbogenviereck  $d'a'b'c'$  mit den Winkeln  $\rho\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  einen Orthogonalkreis  $K$  besitzt, nicht aber, daß es notwendig ganz innerhalb desselben liegt. Die aus (12) folgende transzendente Gleichung (12a) wird uns daher auch alle Wurzeln  $B$  liefern müssen, die zu Kreisbogenvierecken gehören, welche zwar auch einen Orthogonalkreis  $K$  besitzen, aber aus demselben heraustreten. Ein solches Polygon kommt z. B. zu stande, wenn wir die Seiten  $\widehat{c'b'}$  und  $\widehat{d'a'}$  des gewöhnlichen automorphen Grundpolygons  $\Pi_{00} = d'a'b'c'$  (Fig. 1) über  $b'$  und  $a'$  hinaus bis zu denjenigen Punkten  $b''$  und  $a''$  verlängern, die aus ihnen durch Spiegelung am Orthogonalkreise  $K$  entstehen. Auf diese Weise erhalten wir ein erstes Oberpolygon  $\Pi_{01} = d'a''b''c'$  (Fig. 1), das bereits den Orthogonalkreis durchschneidet.

Verlängern wir nun die Seiten  $\widehat{c'b''}$  und  $\widehat{d'a''}$  über  $b''$  und  $a''$  hinaus, bis sie, sich selbst überschlagend, wieder  $b'$  und  $a'$  erreichen, so ergibt sich ein zweites Oberpolygon  $\Pi_{02}$ , welches wir auch aus  $\Pi_{00}$  durch Einhängung eines Kreisringes längs eines von  $\widehat{c'b'}$  nach  $\widehat{d'a'}$  führenden Querschnittes  $Q$  erhalten können (Fig. 1).

Ein drittes Oberpolygon  $\Pi_{03}$  entsteht in gleicher Weise aus  $\Pi_{01}$  durch Einhängung eines Kreisringes, ein viertes  $\Pi_{04}$  aus  $\Pi_{00}$  durch Einhängung von zwei Kreisringen etc.

Gleichzeitig sei bemerkt, daß ein bloßes Verlängern der Seiten  $\widehat{c'b'}$  und  $\widehat{d'a'}$  nur den Typus, nicht aber die wahre Gestalt der Oberpolygone liefert; dazu ist noch je eine Deformation erforderlich, die dadurch bestimmt ist, daß die Oberpolygone konforme Abbilder

der negativen  $x$ -Ebene, resp. des Rechteckes  $N$  der  $u$ -Ebene sein sollen. Die einzelnen Polygone  $\Pi_{00}, \Pi_{01}, \Pi_{02}, \dots$  müssen also auch gegenseitig konform aufeinander abgebildet sein.

Man erkennt leicht, daß jedes Viereck der so entstehenden ersten Serie von Oberpolygonen durch eine Oszillationsbedingung charakterisiert werden kann. Setzen wir nämlich in (4) und (19)

$$(23) \quad u = v + \omega_3,$$

wobei  $v$  eine reelle Variable bedeutet, d. h. beschränken wir  $u$  auf die Gerade  $X$ , so gehören zu den einzelnen Polygonen  $\Pi_{00}, \Pi_{01}, \Pi_{02}, \Pi_{03}$  etc., solche Parameterwerte  $B_{00}, B_{01}, B_{02}, B_{03}$ , etc., für welche die Lösung

$$(24) \quad y(v + \omega_3) = C_3 [y_1(v + \omega_3) - k_3 \cdot y_2(v + \omega_3)]$$

in den einzelnen Intervallen

$$\overline{0, \omega_1}, \overline{\omega_1, 2\omega_1}, \overline{2\omega_1, 3\omega_1} \text{ etc.}$$

des  $v$  eine bestimmte Anzahl von Nullstellen besitzt, die in der folgenden Tabelle angegeben ist:

	0	$\omega_1$	$2\omega_1$	$3\omega_1$	$4\omega_1$	$5\omega_1$	etc.
$\Pi_{00}$	0	0	0	0	0	0	
$\Pi_{01}$	0	1	0	1	0	1	
$\Pi_{02}$	1	1	1	1	1	1	
$\Pi_{03}$	1	2	1	2	1	2	
$\Pi_{04}$	2	2	2	2	2	2	
$\Pi_{05}$	2	3	2	3	2	3	etc.

Daraus entnehmen wir, daß sicher kein Oberpolygon  $\Pi_{0r}$  zustande kommt für ein  $B$ , für welches die erste von 0 verschiedene, auf der positiven  $v$ -Achse gelegene Nullstelle von  $y(v + \omega_3)$  größer als  $2\omega_1$  ist.

In ganz ähnlicher Weise entsteht eine zweite Serie von Oberpolygonen  $\Pi_{10}, \Pi_{20}, \Pi_{30}$  etc. aus  $\Pi_{00}$  durch Verlängerung der Seiten  $\overline{a'b'}$  und  $\overline{d'c'}$  über  $b'$  und  $c'$  hinaus. Setzen wir dann in (4) und (19a)

$$(23a) \quad u = iv + \omega_1,$$

wobei  $v$  wieder reell ist, also  $u$  auf  $Y$  läuft, so gehören zu den einzelnen Oberpolygonen  $\Pi_{r0}$  solche Parameterwerte  $B_{r0}$ , für welche die Lösung

$$(24a) \quad y(iv + \omega_1) = C_1 \cdot [y_1(iv + \omega_1) - k_1 y_2(iv + \omega_1)]$$

in den einzelnen Intervallen:

$$\overline{0, |\omega_3|}, \overline{|\omega_3|, 2|\omega_3|}, \overline{2|\omega_3|, 3|\omega_3|} \text{ etc.}$$

des  $v$  Nullstellen in einer Anzahl besitzt, die aus einer Tabelle entnommen werden kann, welche aus der obigen entsteht, wenn wir  $\omega_1$  durch  $|\omega_3| = \frac{\omega_3}{i}$  und  $\Pi_{0r}$  durch  $\Pi_{r_0}$  ersetzen. Es existiert also sicher kein Oberpolygon  $\Pi_{r_0}$  für ein  $B$ , für welches die erste von 0 verschiedene positive Nullstelle  $v_0$  der Lösung (24a) größer als  $2|\omega_3|$  ist.

Wir beweisen nun, daß letzteres für jedes  $B \leq B_1$ , also  $e \leq e_1$  der Fall ist. Ersetzen wir nämlich in (4) die Variable  $u$  nach (23a) durch  $iv + \omega_1$ , so bekommen wir die Gleichung

$$(25) \quad \frac{d^2 y}{d v^2} = -A [p(iv + \omega_1) - e] \cdot y = \\ = \left(\frac{1}{4} - \rho^2\right) [p(iv + \omega_1) - e] \cdot y.$$

Nun ist für reelle  $v$

$$p(iv + \omega_1) \geq e_2$$

und ferner nach Voraussetzung

$$e \leq e_1,$$

also

$$(26) \quad p(iv + \omega_1) - e \geq e_2 - e_1.$$

Betrachten wir daher folgende Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten

$$(27) \quad \frac{d^2 \bar{y}}{d v^2} = -\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right) (e_1 - e_2) \cdot \bar{y},$$

so besitzt dieselbe ein für  $v=0$  verschwindendes Integral:

$$(28) \quad \bar{y} = C \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{1}{4} - \rho^2} \sqrt{e_1 - e_2} \cdot v \right),$$

( $C$  eine reelle Konstante), für welches wegen (26) die erste von 0 verschiedene positive Nullstelle  $\bar{v}_0 < v_0$  ist. Nun ist aber

$$(29) \quad \bar{v}_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4} - \rho^2} \sqrt{e_1 - e_2}};$$

ferner wegen (13)

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \rho^2}} > 2,$$

und schließlich

$$\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} = \frac{2\omega_1}{\pi \cdot H_0^2 H_3^4},$$

wobei

$$H_0 = \prod_{v=1}^{\infty} (1 - h^{2v}),$$

$$H_3 = \prod_{v=1}^{\infty} (1 - h^{2v-1}),$$

$$h = e^{i\pi \frac{\omega_3}{\omega_1}}$$

gesetzt wurde.<sup>1)</sup> Wegen  $\omega_1 > 0$ ,  $\frac{\omega_3}{i} > 0$  ist aber  $h$  reell, positiv und  $< 1$ , also auch  $H_0 < 1$ ,  $H_3 < 1$ , somit

$$(30) \quad \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} > \frac{2\omega_1}{\pi},$$

woraus sich ergibt

$$\bar{v}_0 > 4\omega_1.$$

Berücksichtigen wir noch die Ungleichungen (7), so folgt schließlich:

$$\bar{v}_0 > 2|\omega_3|,$$

und daher auch

$$(31) \quad v_0 > 2|\omega_3|,$$

was zu beweisen war.

Somit gehört zu jedem Oberpolygon  $\Pi_{r,0}$  der zweiten Serie ein  $e > e_1 > e_3$ , also ein  $B > B_1 > B_3$ . Durch eine passende lineare Transformation der Perioden  $2\omega_1, 2\omega_3$ , etwa durch

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= \quad - 2\bar{\omega}_3, \\ 2\omega_3 &= 2\bar{\omega}_1 \end{aligned}$$

ergibt sich dann sofort der Beweis dafür, daß zu jedem Oberpolygon  $\Pi_{0,r}$  der ersten Serie ein  $e < e_3 < e_1$ , also ein  $B < B_3 < B_1$  gehört, womit in der Tat gezeigt ist, daß im Intervalle  $B_3 B_1$  keine zu einem Obertheorem gehörige Wurzel  $B$  von (12a) liegen kann.

Des weiteren aber schließen wir daraus, daß es keine anderen Obertheoreme als die für die beiden Serien  $\Pi_{0,1}, \Pi_{0,2}, \dots$  und  $\Pi_{1,0}, \Pi_{2,0}, \dots$  von Oberpolygonen geben kann, daß also die beiden Prozesse, durch die aus  $\Pi_{0,0}$  einerseits  $\Pi_{0,r}$  und andererseits  $\Pi_{s,0}$  entsteht, nicht miteinander kombiniert werden können, da nämlich sonst das zugehörige  $B$  einmal  $> B_1$  und gleichzeitig  $< B_3$  sein müßte, was wegen  $B_1 > B_3$  nicht möglich ist.

<sup>1)</sup> Burkhardt, loc. cit. pag. 55, 57, 82 und 84.

### § 5. Eingrenzung der zu den einzelnen Obertheoremen gehörigen Parameterwerte $B$ in Intervalle.

Wir betrachten zunächst die in § 4 als zweite Serie von Oberpolygonen bezeichnete Reihe

$$\Pi_{1,0}, \Pi_{2,0}, \dots, \Pi_{r,0}, \dots;$$

zu jedem dieser Polygone gehört ein ganz bestimmter Parameterwert  $B_{r,0}$ , resp.  $e_{r,0}$ , und es ist offenbar

$$B_1 < B_{1,0} < B_{2,0} < \dots < B_{r,0} < \dots,$$

resp.

$$e_1 < e_{1,0} < e_{2,0} < \dots < e_{r,0} < \dots$$

Dabei sind die einzelnen Parameterwerte  $e_{2m-1,0}$  und  $e_{2m,0}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), durch die folgende Oszillationsbedingung charakterisiert:

„Die Lösung (24 a)

$$y(iv + \omega_1) = C_1 \cdot [y_1(iv + \omega_1) - k_1 \cdot y_2(iv + \omega_1)]$$

von (25), in welcher wir noch die rein imaginäre, im übrigen aber willkürliche Konstante  $C_1$  etwa durch

$$y'(\omega_1) = 1$$

eindeutig festlegen mögen, muß für:

$$e = e_{2m-1,0}$$

in jedem Intervall

$$\overline{2k|\omega_3|, (2k+1)|\omega_3|}, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

gerade  $m-1$  und gleichzeitig in jedem Intervall:

$$\overline{(2k+1)|\omega_3|, 2(k+1)|\omega_3|}$$

$m$  Nullstellen, hingegen für

$$e = e_{2m,0}$$

in jedem Intervall

$$\overline{k|\omega_3|, (k+1)|\omega_3|}, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

gerade  $m$  Nullstellen besitzen.“

Wir bezeichnen nun die von 0 verschiedenen, auf der positiven  $v$ -Achse gelegenen Nullstellen von (24 a) in ihrer Aufeinanderfolge mit  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ , so daß

$$0 < v_1 < v_2 < \dots < v_n < \dots$$

ist. Gleichzeitig stellen wir neben (25) die beiden Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$(32) \quad \bar{y}_1'' = -\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_1)\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2'' = -\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_2)\bar{y}_2,$$

deren entsprechende, durch

$$\bar{y}_1(\omega_1) = \bar{y}_2(\omega_1) = 0$$

und

$$\bar{y}_1'(\omega_1) = \bar{y}_2'(\omega_1) = 1$$

eindeutig bestimmte Lösungen

$$(33) \quad \begin{cases} \bar{y}_1 = \bar{C}_1 \sin \left( \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_1)} \cdot v \right), \\ \bar{y}_2 = \bar{C}_2 \sin \left( \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_2)} \cdot v \right), \end{cases}$$

die positiven Nullstellen

$$0 < \bar{v}'_1 < \bar{v}'_2 < \dots < \bar{v}'_n < \dots, \quad 0 < \bar{v}''_1 < \bar{v}''_2 < \dots < \bar{v}''_n < \dots$$

besitzen mögen, wobei also

$$(34) \quad \bar{v}'_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_1)}}, \quad \bar{v}''_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_2)}}$$

ist.

Die Nullstellen

$$v_n, \bar{v}'_n, \bar{v}''_n$$

sind Funktionen von  $e$ , und zwar ist nach den Sturmschen Vergleichungssätzen wegen

$$0 > -\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_1) \geq -\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)[e - p(iv + \omega_1)] \geq -\left(\frac{1}{4} - \rho^2\right)(e - e_2)$$

für dasselbe  $e > e_1$

$$(35) \quad \bar{v}''_n(e) > v_n(e) > \bar{v}'_n(e),$$

hingegen für zwei verschiedene  $e' > e'' > e_1$

$$(36) \quad \begin{cases} v_n(e'') > v_n(e') > 0, \\ \bar{v}'_n(e'') > \bar{v}'_n(e') > 0, \\ \bar{v}''_n(e'') > \bar{v}''_n(e') > 0; \end{cases}$$

umgekehrt folgt aus dem Bestehen einer dieser Ungleichungen (36):

$$e' > e''$$

und damit auch das Bestehen der beiden anderen.

Nun muß zufolge der oben formulierten Oszillationsbedingung für

$$e = e_{r_0}$$

die  $(k, r)$ te Nullstelle der Lösung (24 a) in das Intervall

$$\overline{(2k-1)|\omega_3|, 2k|\omega_3|}$$

fallen, d. h.

$$(37) \quad (2k-1)|\omega_3| < v_{kr}(e_{r_0}) < 2k|\omega_3|.$$

Bestimmen wir also zwei Zahlen  $e'_r$  und  $e''_r$  so, daß

$$(38) \quad \bar{v}'_{kr}(e'_r) = (2k-1)|\omega_3|,$$

also

$$(38a) \quad \bar{v}'_r(e'_r) = \frac{2k-1}{k}|\omega_3|$$

und

$$(39) \quad \bar{v}''_{kr}(e''_r) = 2k|\omega_3|,$$

also

$$(39a) \quad \bar{v}''_r(e''_r) = 2|\omega_3|$$

wird, d. h. setzen wir

$$(38b) \quad e'_r = e_1 + \left[ \frac{kr\pi}{(2k-1)|\omega_3|} \right]^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} - \rho^2}$$

und

$$(39b) \quad e''_r = e_2 + \left[ \frac{r\pi}{2|\omega_3|} \right]^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} - \rho^2},$$



dieselben besitzen die konstante Länge  $e_1 - e_2$  und liegen vollständig voneinander getrennt, denn zwischen dem  $r^{\text{ten}}$  und dem  $(r+1)^{\text{ten}}$  Intervall befindet sich eine Strecke von der Länge

$$\begin{aligned} \Delta_{r,r+1} &= e_2 + \left[ \frac{(r+1)\pi}{2|\omega_3|} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2} - e_1 - \left[ \frac{r\pi}{2|\omega_3|} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2} = \\ &= (2r+1) \left[ \frac{\pi}{2|\omega_3|} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2} - (e_1 - e_2); \end{aligned}$$

aus (30), (13) und (7) geht aber hervor:

$$e_1 - e_2 < \left( \frac{\pi}{2\omega_1} \right)^2 < \left( \frac{\pi}{4\omega_1} \right)^2 \frac{1}{4-\rho^2} < \left[ \frac{\pi}{2|\omega_3|} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2},$$

also

$$\Delta_{r,r+1} > 2r \left[ \frac{\pi}{2|\omega_3|} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2} > 0.$$

Aus der Herleitung der Ungleichungen (42) entnimmt man ohne weiteres, daß sich die Anzahlen der Halboszillationen der Lösung (24a) in Intervalle  $0, 2|\omega_3|$  für  $e = e'_r$  einerseits und  $e = e''_r$  andererseits gerade um eine Einheit unterscheiden, während sie für  $e = e''_r$  einerseits und  $e = e'_{r+1}$  andererseits miteinander übereinstimmen. Daraus schließen wir:

„In jedem der Intervalle (42) liegt höchstens eine Wurzel  $e$  der transzendenten Gleichung (12a), zwischen diesen Intervallen dagegen gewiß keine.“

Ganz analoge Überlegungen können für die Oberpolygone  $\Pi_{0r}$  der ersten Serie gemacht werden; wir finden für die ihnen zugehörigen Parameterwerte  $e_{0r}$  resp.  $B_{0r}$  die Intervalle

$$(43) \quad e_2 - \left[ \frac{r\pi}{2\omega_1} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2} > e_{0r} \geq e_3 - \left[ \frac{r\pi}{2\omega_1} \right]^2 \frac{1}{4-\rho^2}$$

resp.

$$(43a) \quad B_2 - \left[ \frac{r\pi}{2\omega_1} \right]^2 > B_{0r} \geq B_3 - \left[ \frac{r\pi}{2\omega_1} \right]^2,$$

über die ganz entsprechende Aussagen gemacht werden können.

Sehen wir von der Wurzel  $B_{00}$ , deren Existenz durch die Theorie der automorphen Funktionen (für den Fall, daß  $\frac{1}{\rho}$  eine ganze Zahl ist) sichergestellt ist, ab, so folgt aus unseren bisherigen Überlegungen, daß in jedem einzelnen der Intervalle (41 a) und (43 a) und nur dort eine reelle Wurzel  $B$  von (12 a) liegen kann. Die Obertheoreme sagen nun aus, daß in jedem der angegebenen Intervalle auch tatsächlich eine solche Wurzel liegt. Dies wollen wir zunächst für die niedrigsten Fälle in einem Zahlenbeispiel bestätigen, indem wir  $B_{00}$ ,  $B_{01}$  und  $B_{10}$  numerisch berechnen.

### § 6. Numerische Berechnung von $B_{00}$ , $B_{01}$ und $B_{10}$ in einem Zahlenbeispiel.

Um uns vor allem über die Lage der absolut kleinsten Wurzel  $B_{00}$  resp.  $e_{00}$  von (12 a) einigermaßen zu orientieren, betrachten wir zunächst den lemniskatischen Fall, in welchem

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{i} > 0, \quad e_2 = 0, \quad e_1 = -e_3 > 0, \quad g_3 = 0$$

ist. Man erkennt hier leicht aus Symmetriegründen, daß

$$(44) \quad B_{00} = 0, \quad e_{00} = 0$$

sein muß.

Ändert sich nun die rein imaginäre Halbperiode  $\omega_3$  stetig, ohne den durch (7) festgelegten Bereich zu verlassen, so werden sich auch  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  sowie  $e_{00}$  stetig ändern, wobei nach § 3  $e_{00}$  immer im Intervall  $e_3 e_1$  bleiben muß. Klein hat in seinem eingangs erwähnten Vortrage die Vermutung ausgesprochen, daß  $e_{00}$  immer zwischen 0 und  $e_2$ , und zwar näher bei  $e_2$ , liegen wird.

Wir führen nun die numerische Berechnung der Wurzeln  $e_{00}$ ,  $e_{10}$ ,  $e_{01}$  von (12 a) in einem Zahlenbeispiel durch, indem wir

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_3 = 1,1 i, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0,223607 \text{ } ^1)$$

setzen, wodurch die Ungleichungen (7) und (13) erfüllt sind. Dann ergibt sich

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = 1,1 i,$$

$$h = e^{i\pi\tau} = 0,03156,$$

<sup>1)</sup> In der Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen ist  $\rho$  der reziproke Wert einer ganzen Zahl; für die Überlegungen des Textes ist jedoch diese Einschränkung nicht erforderlich. Vgl. Klein, Math. Ann. 64, p. 196.

$$H_0 = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu}) = 0,99900,$$

$$H_1 = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + h^{2\nu}) = 1,00100,$$

$$H_2 = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + h^{2\nu-1}) = 1,03159,$$

$$H_3 = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu-1}) = 0,96841,$$

$$e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 H_0 H_3^8 = 1,9017,$$

$$e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 H_0 H_2^8 = 3,1522,$$

$$e_2 - e_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^2 h H_0 H_1^8 = 1,2512,$$

$$e_1 = 1,6846,$$

$$e_2 = -0,2166,$$

$$e_3 = -1,4678,$$

$$h^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 0,3969,$$

$$h'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 0,6032,$$

$$\begin{aligned} g_2 &= -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 \left[ \frac{1}{12} + 20 \left( \frac{h^2}{1-h^2} + \frac{8h^4}{1-h^4} + \dots \right) \right] = 10,0672, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= 4e_1 e_2 e_3 = \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 \left[ \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \left( \frac{h^2}{1-h^2} + \frac{32h^4}{1-h^4} + \dots \right) \right] = 2,2016, \end{aligned}$$

$$A = \rho^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{5} = -0,2,$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{4} - \rho^2} = 12,337,$$

$$\left(\frac{\pi}{2|\omega_3|}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{4} - \rho^2} = 10,196.$$

Um die beiden Fundamentallösungen (5) von (4) explizit zu erhalten, setzen wir

$$(45) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1^{(0)}(u^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} u^{2n}, & a_0 = 1, \\ \mathfrak{P}_2^{(0)}(u^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} u^{2n}, & b_0 = 1, \end{cases}$$

und

$$(46) \quad p(u) - e = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{2n} u^{2n},$$

wobei

$$c_{-2} = 1,$$

$$c_0 = -e,$$

$$c_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 5} g_2 = 0,5034,$$

$$c_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 7} g_3 = 0,0786,$$

$$c_6 = \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} g_2^2 = 0,0845,$$

$$c_8 = \frac{3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} g_2 g_3 = 0,0108,$$

$$c_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 13} \left( \frac{1}{7^2} g_3^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5^3} g_2^3 \right) = 0,0070,$$

$$c_{12} = \frac{1}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} g_2^2 g_3 = 0,0012,$$

$$c_{14} = \frac{1}{2^4 \cdot 13 \cdot 17} \left( \frac{3}{7^2 \cdot 11} g_2 g_3^2 + \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^3} g_4^2 \right) = 0,0005,$$

etc.



wodurch die  $a_{2n}$  und  $b_{2n}$  als ganze rationale Funktionen  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $e$  dargestellt sind. Die transzendente Gleichung (12 a) lautet nun

$$(49) \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{4e} \cdot \frac{1 + a_2 \omega_1^2 + a_4 \omega_1^4 + \dots}{1 + b_2 \omega_1^2 + b_4 \omega_1^4 + \dots} \left[ \left( \frac{1}{2} + \rho \right) + \left( \frac{5}{2} + \rho \right) a_2 \omega_1^2 + \left( \frac{9}{2} + \rho \right) a_4 \omega_1^4 + \dots \right] \\ = e^{-2i\pi e} \cdot \omega_3^{4e} \cdot \frac{1 + a_2 \omega_3^2 + a_4 \omega_3^4 + \dots}{1 + b_2 \omega_3^2 + b_4 \omega_3^4 + \dots} \left[ \left( \frac{1}{2} + \rho \right) + \left( \frac{5}{2} + \rho \right) a_2 \omega_3^2 + \left( \frac{9}{2} + \rho \right) a_4 \omega_3^4 + \dots \right] \\ \frac{1 + a_2 \omega_1^2 + a_4 \omega_1^4 + \dots}{1 + b_2 \omega_1^2 + b_4 \omega_1^4 + \dots} \left[ \left( \frac{1}{2} - \rho \right) + \left( \frac{5}{2} - \rho \right) b_2 \omega_1^2 + \left( \frac{9}{2} - \rho \right) b_4 \omega_1^4 + \dots \right] \\ \frac{1 + a_2 \omega_3^2 + a_4 \omega_3^4 + \dots}{1 + b_2 \omega_3^2 + b_4 \omega_3^4 + \dots} \left[ \left( \frac{1}{2} - \rho \right) + \left( \frac{5}{2} - \rho \right) b_2 \omega_3^2 + \left( \frac{9}{2} - \rho \right) b_4 \omega_3^4 + \dots \right] \end{array} \right.$$

und geht nach Einführung der numerischen Werte und Ordnen nach Potenzen von  $e$  über in

$$(50) \quad \Omega(e) \equiv 0,0186 + 0,1750e - 0,0050e^2 - 0,0013e^3 + \\ + 0,000015e^4 + \dots = 0.$$

Betrachten wir diese Gleichung unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung als eine Gleichung vierten Grades für  $e$ , so finden wir — abgesehen von der absolut größten Wurzel, zu deren genauen Bestimmung diese Gleichung nicht ausreicht — die drei Wurzeln:

$$(51) \quad e = -0,1067, +10,440, -12,604.$$

Andererseits haben wir aber nach (22), (41) und (43) die Intervalle

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} - 1,4678 < e_{00} < + 1,6846, \\ + 9,979 < e_{10} < + 11,881, \\ + 40,567 < e_{20} < + 42,469, \\ + 91,547 < e_{30} < + 93,449, \\ \text{etc.} \\ - 13,805 < e_{01} < - 12,554, \\ - 50,816 < e_{02} < - 49,565, \\ - 112,521 < e_{03} < - 111,250, \\ \text{etc. ;} \end{array} \right.$$

also ist

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{00} = - 0,1067, \\ e_{10} = + 10,440, \\ e_{00} = - 12,604, \end{array} \right.$$

resp.

$$(53 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{00} = - 0,0213, \\ B_{10} = + 2,088, \\ B_{01} = - 2,521. \end{array} \right.$$

Ferner ist in diesem Falle

$$e_2 < e_{00} < 0$$

$$2|e_{00}| > |e_2|,$$

mit die von Klein geäußerte Vermutung bestätigt ist.

### § 7. Beweis des Grundtheorems und der Obertheoreme.

Wir gehen nun daran, den Beweis des Grundtheorems und Obertheoreme zu führen, d. h. wir zeigen, daß in den Inter-  
 (41) und (43), die wir in § 5 fanden, tatsächlich je eine  
 arzel  $e$  der transzendenten Gleichung (12a) gelegen ist.

Der Beweis vereinfacht sich beträchtlich, wenn wir statt des  
 er benützten Quotienten (16)

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}$$

mehr den Quotienten der beiden zum Punkte  $u = 0$  gehörigen  
 adamentallösungen (5)

$$\eta^{(0)} = \frac{y_1^{(0)}}{y_2^{(0)}}$$

Betracht ziehen. Geometrisch bedeutet dies, daß wir die Figuren  
 der  $\eta$ -Ebene (resp. auf der  $\eta$ -Kugel) durch kreisverwandte Fi-  
 gen daselbst ersetzen, wodurch wir ja nichts Wesentliches an  
 en ändern; in der Tat besteht nämlich zwischen  $\eta$  und  $\eta^{(0)}$  die  
 ende lineare Abhängigkeit:

$$\eta = \frac{\eta^{(0)} - \mu_1}{\eta^{(0)} - \mu_2},$$

in der Zusammenhang zwischen den Fundamentallösungen  $y_1, y_2$   
 $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}$  durch die Gleichungen

$$\begin{cases} y_1 = y_1^{(0)} - \mu_1 y_2^{(0)} \\ y_2 = y_1^{(0)} - \mu_2 y_2^{(0)} \end{cases}$$

eben ist.

Aus (5) folgt

$$\eta^{(0)} = u^{2e} \mathfrak{P}^{(0)}(u^2),$$

wobei  $\mathfrak{P}^{(0)}(u^2)$  eine Potenzreihe in  $u^2$  bedeutet, die mit dem konstanten Gliede 1 beginnt und lauter reelle Koeffizienten besitzt. Somit ist  $\eta^{(0)}$  für positive reelle  $u$  selbst reell; außerdem ist

$$(57) \quad \eta^{(0)}(0) = 0, \quad \eta^{(0)}(\omega_1) = \lambda_1 = l_1,$$

d. h. die Seite  $\overline{0\omega_1}$  des Parallelogramms  $N$  der Halbperioden  $\omega_1, \omega_3$  in der  $u$ -Ebene wird abgebildet auf die geradlinige Strecke  $0\lambda_1$  der reellen Achse in der  $\eta^{(0)}$ -Ebene. Für rein imaginäre  $u = iv$  ( $v$  reell und positiv) ist

$$(58) \quad \eta^{(0)}(iv) = e^{i\pi e} v^{2e} \mathfrak{P}(-v^2);$$

dabei ist  $v^{2e} \mathfrak{P}(-v^2)$  reell; somit besitzt  $\eta^{(0)}(iv)$  den konstanten Richtungsfaktor  $e^{i\pi e}$ ; da ferner

$$(59) \quad \begin{cases} \eta^{(0)}(\omega_3) = \eta^{(0)}(i|\omega_3|) = \\ = e^{i\pi e} \cdot |\omega_3|^{2e} \mathfrak{P}(-|\omega_3|^2) = \\ = e^{i\pi e} \cdot n_1 = \nu_1 \end{cases}$$

ist, so folgt daraus, daß die Seite  $\overline{0\omega_3}$  von  $N$  abgebildet wird auf die geradlinige Strecke  $0\nu_1$  der  $\eta^{(0)}$ -Ebene, welche mit der Strecke  $0\lambda_1$  den Winkel  $\rho\pi$  einschließt. Die Seite  $\overline{\omega_1, \omega_1 + \omega_3}$  resp.  $\overline{\omega_3, \omega_1 + \omega_3}$  von  $N$  wird abgebildet auf einen Kreisbogen  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$ , resp.  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$ , welcher die Seite  $\overline{0\lambda_1}$ , resp.  $\overline{0\nu_1}$  orthogonal schneidet, also seinen Mittelpunkt auf der Geraden  $\overline{0\lambda_1}$ , resp.  $\overline{0\nu_1}$  hat. Außerdem schneiden sich  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  und  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$  selbst rechtwinkelig (Fig. 2).

Der Orthogonalkreis  $K$  des so entstehenden Polygons  $\Pi$  muß, falls er existiert, seinen Mittelpunkt im Punkte  $\eta^{(0)} = 0$  der  $\eta^{(0)}$ -Ebene haben. Man erkennt jetzt auch leicht, daß die Involutionenbedingung (12)

$$l_1 l_2 = n_1 n_2$$

tatsächlich die Bedingung für die Existenz eines solchen Kreises ist. Die Potenzlinie  $s$  der beiden Kreise  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}, \widehat{\nu_1 \mu_1}$  muß nämlich im Falle des Vorhandenseins eines Orthogonalkreises  $K$  durch 0 gehen und  $l_1 l_2$ , resp.  $n_1 n_2$  stellt in der Tat nichts anderes vor als die Potenz des Punktes 0 in bezug auf den Kreis  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$ , resp.  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$ , indem die in (9a), resp. (9b) auftretende Konstante  $\lambda_2 = l_2$ , resp.  $\nu_2 = e^{i\pi e} \cdot n_2$  dargestellt wird durch jenen Punkt der  $\eta^{(0)}$ -Ebene, in welchem der Kreis  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$ , resp.  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$  den Durchmesser  $\overline{0\lambda_1}$ , resp.  $\overline{0\nu_1}$  zum zweiten Male schneidet.<sup>1)</sup>

Im lemniskatischen Falle

$$\omega_1 = -\frac{\omega_3}{i} > 0$$

<sup>1)</sup> F. Klein, Math. Ann. 64, pag. 178.

ist es nun leicht, das automorphe Grundpolygon  $\Pi$  in der  $\gamma^{(0)}$ -Ebene anzugeben, auf welches das Quadrat der Halbperioden in der  $u$ -Ebene durch den Quotienten  $\gamma^{(0)}$  abgebildet wird. Da nämlich dieses Quadrat durch die Diagonale  $0, \omega_1 + \omega_3$  in zwei Hälften zerfällt, die Spiegelbilder voneinander sind, so folgt, da sich in diesem besonderen Falle  $0, \omega_1 + \omega_3$  geradlinig auf  $0\mu_1$  abbildet, daß das Polygon  $\Pi$  ebenfalls zu der dieser Diagonale entsprechenden Geraden  $0\mu_1$  symmetrisch sein muß. Wir bekommen also das Polygon  $\Pi$  resp. ein zu ihm ähnliches, wenn wir auf die Winkelhalbierende  $s$  von  $\sphericalangle \lambda_1 0\gamma_1 = \rho\pi$  irgend eine Senkrechte  $t$  errichten, deren Schnittpunkte  $A$  und  $B$  mit den Schenkeln dieses Winkels bestimmen, über  $\overline{AB}$  als Durchmesser einen Kreis  $\mathfrak{K}$  errichten und denselben mit  $s$  in den Punkten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  schneiden; der durch  $\mu_1$  und  $\mu_2$  um  $A$ , resp.  $B$  als Mittelpunkt beschriebene Kreis liefert dann bereits die Seite  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$ , resp.  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$  von  $\Pi$  und gleichzeitig die Punkte  $\lambda_1, \lambda_2$ , resp.  $\nu_1, \nu_2$  (vergl. Fig. 2, die den allgemeinen Fall darstellt).

In diesem Falle ist  $e = 0$ . Wenn wir nun einstweilen diesen Parameterwert festhalten, die rein imaginäre Halbperiode  $\omega_3$  indessen stetig abändern, ohne den Bereich (7) zu verlassen und ihr schließlich irgend einen in diesem Bereiche gelegenen Wert erteilen, so wird das zum lemniskatischen Falle gehörige Polygon  $\Pi$  der  $\gamma^{(0)}$ -Ebene deformiert; die Seiten  $0\lambda_1$  und  $0\nu_1$  bleiben geradlinig und schließen nach wie vor den Winkel  $\rho\pi$  ein; die Seiten  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  und  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$  bleiben Kreisbogen und die drei übrigen Winkel rechte; es wird jedoch nicht mehr  $l_1 = n_1$ , d. h.:  $0\lambda_1 = 0\nu_1$  sein; das Polygon  $\Pi$  ist nun nicht mehr symmetrisch und die Potenzlinie  $s$  geht wegen  $l_1 l_2 \neq n_1 n_2$  nicht mehr durch  $O$ , sondern verläuft oberhalb oder unterhalb dieses Punktes, je nachdem wir  $\omega_3$  vergrößert oder verkleinert haben.

Indem wir nun  $\omega_3$  festhalten und den Parameter  $e$  stetig variieren, wird auch das so entstandene Viereck  $\Pi$  seine Gestalt kontinuierlich ändern und damit die Potenzlinie  $s$  immer neue Lagen einnehmen. So oft die Potenzlinie  $s$  durch den Punkt  $O$  geht, so oft stellt das zugehörige  $e$  eine Wurzel der transzendenten Gleichung (12a) dar, weil dann gewiß ein Orthogonalkreis  $K$  existiert.

Es möge also  $e$  von  $e = 0$  an die Reihe der negativen reellen Zahlen durchlaufen. Eine leichte Überlegung<sup>1)</sup> zeigt dann, daß dabei stets

$$(60) \quad 0 < n_1 < n_2 < +\infty$$

<sup>1)</sup> Ist

$$y'' + p \cdot y' + qy = 0$$

eine lineare, homogene Differentialgleichung der zweiten Ordnung und  $y_1, y_2$  ein Paar von Fundamentallösungen, so ist nach einem bekannten Satze von Abel (Crelles Journal 2, 1827)

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = c \cdot e^{-\int p \, dx},$$

und der Kreis  $\widehat{\nu_1 \mu_1 \mu_2 \nu_2}$  ganz oberhalb der reellen Achse bleibt. Er ändert zwar seine Lage und seine Größe, verläßt aber nie die positive  $\gamma^{(0)}$ -Halbebene, während sein Radius endlich bleibt und nicht verschwindet.

Anders verhält es sich mit dem Kreise  $\widehat{\lambda_1 \mu_1 \mu_2 \lambda_2}$ . Man erkennt nämlich, daß beim Abnehmen von  $e$  sowohl  $\lambda_1$  als auch  $\lambda_2$  wachsen, wobei aber immer  $\lambda_1 < \lambda_2$  bleibt; schließlich wird  $\lambda_2 = +\infty$  und der Kreis  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  geht in die Gerade  $\overline{\lambda_1 \mu_1}$  über (Fig. 3). Diese Gestalt nimmt das Polygon II sicher für ein  $e$  an, das noch oberhalb der Größe (vgl. 43)

$$e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{4} - \rho^2}$$

liegt, indem für letzteren Wert von  $e$  das Spiegelbild von  $0\lambda_1$  an  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  bereits die ganze reelle Achse außerhalb  $\overline{0\lambda_1}$  überdecken und sogar noch über den Punkt 0 hinausgreifen müßte (Fig. 1), was für die eben betrachtete Lage noch nicht der Fall ist. Da in Fig. 3 die Potenzlinie  $s$  mit der Geraden  $\overline{\lambda_1 \mu_1}$  zusammenfällt, so muß sie bei dem stetigen Übergange aus der ursprünglichen Lage in die in Fig. 3 einmal die in Fig. 2 angegebene Lage einnehmen und durch 0 gehen, woraus die Existenz der Wurzel  $e_{00}$  folgt; eine andere Wurzel kann dies nicht sein, weil das Spiegelbild von  $0\lambda_1$  resp.  $0\nu_1$  an  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  resp.  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$  den Nullpunkt noch nicht enthält.

Bei weiterer Abnahme von  $e$  wandert  $\lambda_2$  von  $-\infty$  auf der negativen reellen Achse gegen 0 und schließlich darüber hinaus auf die positive reelle Achse, während  $\lambda_1$  nach  $+\infty$  geht;  $\lambda_1 = \infty$  tritt ein für ein  $e$ , das noch oberhalb der Grenze (vgl. 43)

$$e_3 = \left(\frac{2\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{4} - \rho^2}.$$

wobei  $c$  eine Konstante bedeutet. In (4) ist  $p = 0$ , also z. B.

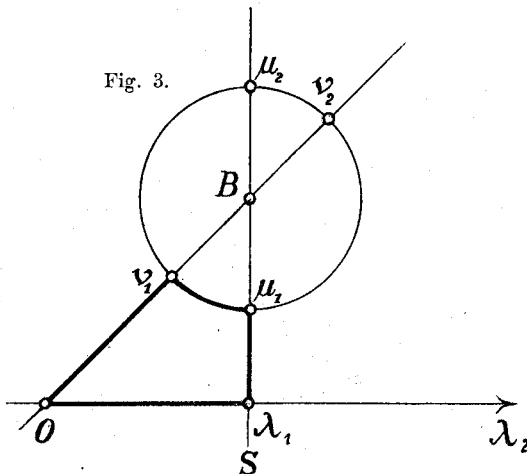
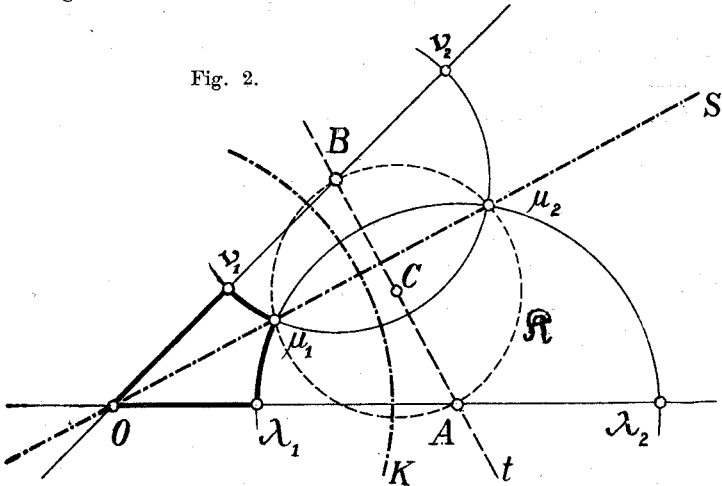
$$y_1^{(0)} y_2^{(0)'} - y_2^{(0)} y_1^{(0)'} = \text{const.},$$

und zwar, wie man leicht findet,  $= -2\rho$ ; somit kann nach (10b) niemals  $\nu_1 = \nu_2$ , d. h.  $n_1 = n_2$  werden.

Für  $n_2 = \infty$  würde  $\overline{\nu_1 \mu_1}$  zu einer Geraden; eine endliche Anzahl von Spiegelungen von  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  (zunächst an  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$ ) würde bereits den ganzen Kreis  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  mit Spiegelbildern des Bogens  $\widehat{\lambda_1 \mu_1}$  bedecken, was für  $e < 0$  nach p. 272 nicht sein kann.

Für  $n_1 = 0$  aber sowie dann, wenn  $\widehat{\nu_1 \mu_1}$  die Seite  $\overline{0\lambda_1}$  schneiden würde, müßte die Eindeutigkeit der konformen Abbildung aufhören.

liegt; bei dem Übergange der Lage von  $s$  in Fig. 3 in die eben betrachtete, muß aber die Gerade  $s$  wieder einmal durch den Punkt  $0$  gegangen sein, woraus die Existenz der Wurzel  $e_{01}$  von (12a) folgt; daß es keine andere Wurzel sein kann, folgt wieder aus den Oszillationseigenschaften: Das Spiegelbild von  $0\lambda_1$  an  $\lambda_1\mu_1$  geht nämlich gerade einmal durch  $0$ .



Wird  $e$  noch weiter verkleinert, so geht  $\lambda_1$  von  $-\infty$  auf der negativen reellen Achse gegen  $0$  und darüber hinaus, während  $\lambda_2$  gegen  $+\infty$  geht; dabei nimmt  $e$  einmal den Wert  $e_{02}$  etc. etc.

Man sieht ohne weiteres, in welcher Weise der Beweis fortzuführen ist; es ergeben sich so die Obertheoreme der ersten Serie.

In ganz analoger Weise wird der Beweis für die zweite Serie von Oberpolygonen geführt, indem wir den Parameter  $e$  von  $e = 0$  an stetig die Reihe der positiven reellen Zahlen durchlaufen lassen.

Bemerkt sei noch, daß die in der gewöhnlichen Theorie der (eindeutigen) automorphen Funktionen gemachte Voraussetzung eines ganzzahligen Wertes von  $\frac{1}{\rho}$  bei unserem Beweise nicht notwendig ist, vielmehr  $\rho$  jede reelle Zahl zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  bedeuten kann.<sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> F. Klein, Math. Ann. 64, p. 196.