

02.10

K-6290

Українська  
Академія Наук

Труди Фізично-Математичного Відділу  
том VII, вип. 2

Académie des Sciences  
de l'Ukraine  
Mémoires de la Classe des Sciences  
Physiques et Mathématiques  
tome VII, livr. 2

13.41

709 П1707 95/2

Н. АХІЗЕР

K-6290

# АЕРОДИНАМІЧНІ ДОСЛІДИ

N. ACHYESER

# AERODYNAMISCHE UNTERSUCHUNGEN

У КИЇВІ—1928

LIBRARY  
245 1245

ЦЕНТРАЛНА  
НАУКОВО-УЧБОВА  
БІБЛІОТЕКА

Проверено  
1928

1328  
426/1



Українська  
Академія Наук  
Труди Фізично-Математичного Відділу,  
том VII, вип. 2

Académie des Sciences  
de l'Ukraine  
Mémoires de la Classe des Sciences  
Physiques et Mathématiques,  
tome VII, livr. 2

Н. АХІЄЗЕР

~~13. VI  
709~~

~~R 6290~~

# АЕРОДИНАМІЧНІ ДОСЛІДИ

1434

N. ACHYESER

## AERODYNAMISCHE UNTERSUCHUNGEN

У КИЇВІ  
З друкарні Української Академії Наук  
1928

Центральна Наукова  
БІБЛІОТЕКА при АДУ  
Інв. № П/170795

ЦЕНТРАЛЬНА  
НАУКОВО-УЧБОВА  
БІБЛІОТЕКА

---

Дозволяється випустити в світ.  
Неодмінний Секретар Академії Наук, *акад. Аг. Кримський.*

---

Київський Окрліт, № 232, 1928.  
Зам. № 337—1200 прим.

## Аеродинамічні дослід.

Н. Ахієзера.

Доклав академик Д. Граве 28-X-1927 р.

### ВСТУП.

Року 1878 лорд Rayleigh<sup>1)</sup> показав, що на нескінченно довгий круглий циліндр  $x^2 + y^2 = a^2$ , що перебуває в ідеальній рідині з постійною на нескінченності швидкістю  $u_x = v_\infty$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = 0$ , діє сила

$$P_x = 0; P_y = -\rho v_\infty \Gamma; P_z = 0$$

на одиницю довжини циліндра, де  $\rho$  є щільність рідини, а  $\Gamma$  циркуляція навколо циліндра. При цьому припускається, що зовні циліндра скрізь на обмеженому віддаленні від нього вихори є відсутні.

Року 1906 Н. Е. Жуковський<sup>2)</sup> узагальнив цей вислід на нескінченно довгий циліндр довільного поперечного перекрою. Теорема Н. Е. Жуковського відкрила цілу епоху в аеродинаміці.

Зазначім через  $w$  комплексовий потенціал швидкостей в розгляданому плоскому течінні, а через  $P_x + iP_y$  силу, що діє на одиницю довжини циліндра.

Чаплигін і Blasius<sup>3)</sup> показали, що

$$\mathfrak{P}' = P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

де інтегрування відбувається по замкненому контурі, що охоплює циліндр.

Приймім за цей контур обвід чималого радіуса. На великому віддаленні від циліндра

$$\frac{dw}{dz} = v'_\infty + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots,$$

<sup>1)</sup> Lord Rayleigh, „On the Irregular Flight of a Tennis Ball“. *Mess. of Math.* t. VII (1878). Див. також Н. Lamb, *Hydrodynamics*, 1924, p. 76—77.

<sup>2)</sup> Н. Е. Жуковский, „О присоединенных вихрях“, 1906.

<sup>3)</sup> С. А. Чаплыгин, „О давлении плоскопараллельн. потока на преграждающие тела“. *Мат. Сб.* т. 27, 1910.

Blasius, „Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik“, „Stromfunktion symmetrischer und unsymmetrischer Flügel“ *Z. f. M. u. Ph.* 1910, 1911.

де

$$A = \frac{1}{2\pi i} \oint dw = \frac{1}{2\pi i} \oint (v_x dx + v_y dy) = \frac{\Gamma}{2\pi i},$$

і отже

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \dots + \frac{2v'_\infty A}{z} + \dots$$

Звідси — теорема Н. Е. Жуковського

$$\mathfrak{R}' = i\rho v'_\infty \Gamma.$$

Подібно з Чаплигін-Blasius'ової формули

$$M = -\frac{\rho}{2} \Re \oint z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

для моменту сил відносно початку координат можна дістати формулу

$$M = -\rho \Re (v'_\infty \oint z dw).$$

Н. Е. Жуковський й С. А. Чаплигін подали спосіб будування контурів (близьких до тих, що застосовуються в аеродинаміці, як профілі крил), для яких комплексний потенціал  $w$  можна теоретично знайти. Всі ці контури мають кутову точку, в якій, загалом кажучи, при потенціальному течінні повстає нескінченно велика швидкість. Можна дібрати циркуляцію так, що в цій точці повстане нулева швидкість. Тоді для підйимальної сили  $A$  повстає формула

$$A = \pi\rho v_\infty^2 t \sin\alpha = \frac{1}{2} \bar{c}_a \rho v_\infty^2 F, \quad (1)$$

де  $t$  якась довжина, характерна для профіля,  $\alpha$  кут атаки, що його відраховано від того напрямку, для якого підйимальна сила рівна нулеві,  $F$  бічна поверхня розглядової частини циліндра,  $\bar{c}_a$  — числовий сучинник.

Для затримки (опору) за викладеною теорією дістанемо нуль. Навсправжки вона існує, та її можна представити в такому вигляді

$$W = \frac{1}{2} c_w \rho v_\infty^2 F. \quad (2)$$

Коли  $\bar{c}_a$  відкладати по осі ординат, а  $\alpha$  по осі абсцис, то для малих  $\alpha$ , що з ними тільки й доводиться мати діло на практиці, теоретична крива

$$\bar{c}_a = c_a(\alpha)$$

мало різнитиметься від простої.

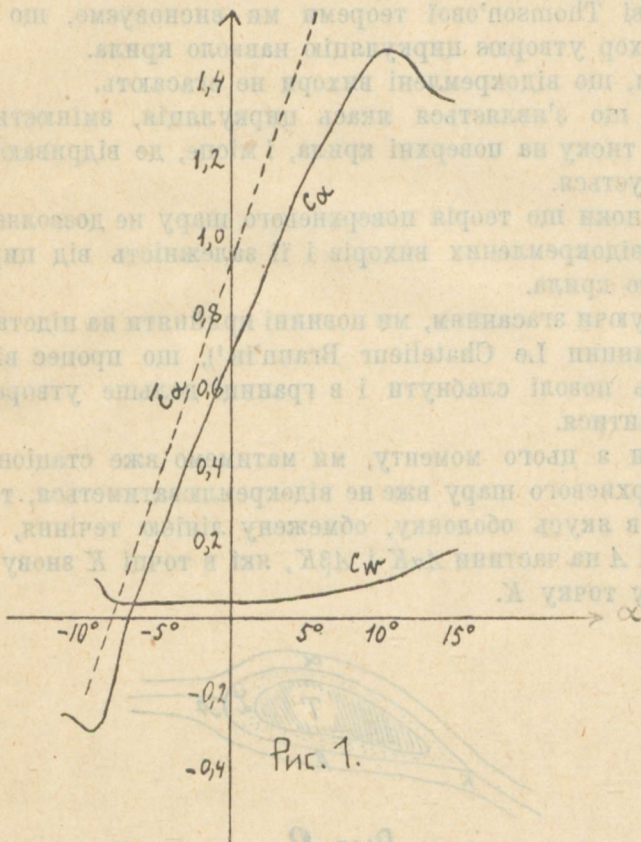
Виявляється, що експериментальна крива

$$c_a = c_a(\alpha)$$

близько підходить до теоретичної, а для  $c_w$  повстають зовсім невеличкі вартості, отже  $W$  можна цілком віднести на рахунок поверхневого тертя, що його нехтували, вважаючи повітря за ідеальну рідину.

Але звідкіля береться циркуляція? І що буде, коли ми заокруглимо гострий край?

Підіймальна сила від цього не зникне й не може сильно змінитися величиною. Але тоді вже немає підстави, щоб приєднувати циркуляції взагалі й для тої певної вартості, що привела до формули (1), згідної з експериментальними даними.



На ці питання теорія ідеальної рідини відповіді дати не може. Тут на допомогу приходять теорія поверхневого шару, що утворили Prandtl, Karman та їх учні<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Prandtl, „Über die Flüssigkeitsbewegung mit sehr kleiner Reibung“. (Verhandlungen des III internat. Math. Congr., 1904).  
Karman, „Über laminare und turbulente Reibung“.  
Polhausen, „Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichungen der laminaren Grenzschicht“.  
(Zeitschr. für angew. Mathem. und Mechanik, Bd. I, 1921).

За цією теорією в тонкому шарі повітря, що охоплює крило, діянням в'язкості не можна нехтувати.

Тут відбувається раптове падіння швидкості від вартостей, що відповідають зовнішньому потокові навколо крила, до нуля на поверхні крила.

У цьому шарі течіння не буде потенціальне і, як показує теорія, в деяких місцях поверхні крила відриватимуться вихори, а потім відноситиме їх зовнішній потік.

А що зовні поверхневого шару в'язкість великої ролі не відіграє, то там можна вважати повітря за ідеальну рідину, а течіння за потенціальне (звичайно, зовні контура, що містить відокремлені вихори).

На підставі Thomson'ової теореми ми висновуємо, що всякий відокремлений вихор утворює циркуляцію навколо крила.

Припустім, що відокремлені вихори не згасають.

Через те, що з'являється якась циркуляція, змінюється розподіл швидкостей та тиску на поверхні крила, і місце, де відриваються вихори, трохи переміщується.

На жаль, поки що теорія поверхневого шару не дозволяє обрахувати інтенсивність відокремлених вихорів і її залежність від циркуляції, що повстає навколо крила.

Але, нехтуючи згасанням, ми повинні прийняти на підставі загальних міркувань (принцип Le Chatelier Braun'ів<sup>1)</sup>), що процес відокремлення вихорів мусить поволі слабнути і в границі дальше утворення вихорів мусить припинитися.

Починаючи з цього моменту, ми матимемо вже стаціонарний стан. Повітря з поверхневого шару вже не відокремлюватиметься, так що крило буде замкнено в якусь оболонку, обмежену лінією течіння, що розгалужується в точці  $A$  на частини  $AaK$  і  $A\beta K$ , які в точці  $K$  знову з'єднуються й дають куту точку  $K$ .

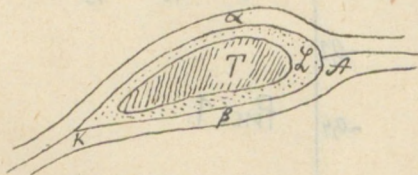


Рис. 2

Можемо сказати, що перед нами вже не крило  $T$ , а якесь крило  $L$  в ідеальній рідині. В кутівій точці  $K$  швидкість повинна дорівнювати нулеві.

Ці міркування, на нашу думку, показують, через що формула (1) Н. Е. Жуковського перебуває в задовольному погодженні з експериментом.

<sup>1)</sup> О. Хвольсон, Курс фізики, т. III, 1905, стр. 375.

Бо точка  $K$  лежить недалеко від заднього канта крила (чи він є го-  
стрий, чи заокруглений).

Через те що вихори загасають, стаціонарний стан буде тільки ста-  
тистичний, і з'явиться певен опір (затримка).

Досі ми говорили про плиску завдачу, а значить про крило нескін-  
ченного розмаху.

Перейдім тепер до крила обмежених розмірів, що його теорію<sup>1)</sup> роз-  
робив Prandtl та його учні (що правда, основну її ідею висловлювали  
раніше Lanchester, Finsterwalder та Чаплигін).

Теорія поверхневого шару навчає, що за крилом утворюватимуться  
U- подібні вихори, що спиратимуться на поверхню крила.

Коли нехтувати згасанням, то кінець-кінцем повстане стаціонарний  
стан, коли від заднього краю відходять вихрові нитки спрямовані по  
лініях течіння.

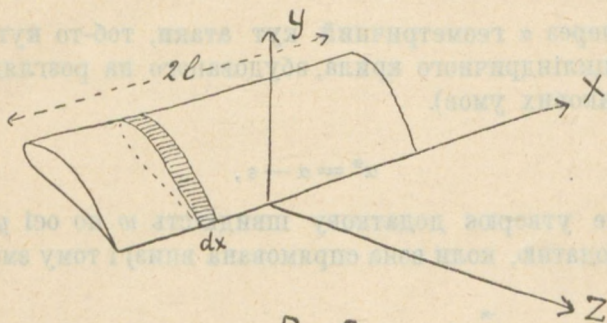


Рис. 3

Зробімо двое припущеннів про вихрове поле зовні крила:

1°. Вихрові лінії прямолінійні та мають такий самий напрямок, як  
швидкість потоку на безмежності.

<sup>1)</sup> Lanchester, Aerial Flight, 1907.

Prandtl, Tragflügeltheorie I, II (Götting. Nachricht. 1918, 1919).

Trefftz, Prandtl'sche Tragflächen — und Propellertheorie. (Vorträge aus dem Gebiete der  
Hydro und Aerodynamik S. 34 — 46).

Munk, Ioperimetrische Probleme aus der Theorie des Fluges. (Diss. Göttingen, 1918).

Fuchs-Hopf, Aerodynamik, 1922.

Maurice Roy, Theorie des surfaces portantes. Scientia 1922.

Wieselsberger, Die wichtigsten Ergebnisse der Tragflügeltheorie und ihre Prüfung  
durch den Versuch. (Vorträge...).

В. Юрьев, Индуктивное сопротивление крыльев аэроплана. М. 1926.

2°. Кожний елемент крила поводитья так, ніби він є елемент нескінченно довгого крила з своєю власною циркуляцією й своїм кутом атаки. Течіння навколо кожного елемента розглядатимемо, як плоске.

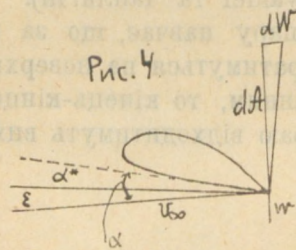
Ці припущення дають велике спрощення й разом з тим приводять до наслідків, що цілком погоджуються з експериментом.

Для кожного елемента  $dx$  крила повстають формули

$$dA = \rho v_{\infty} \Gamma(x) dx,$$

$$\Gamma(x) = \pi v_{\infty} t(x) \sin \alpha^*(x) = \pi v_{\infty} t \alpha^*,$$

де  $\alpha^*$  є відповідний кожному елементові кут атаки, назв'їм його динамічним кутом атаки.

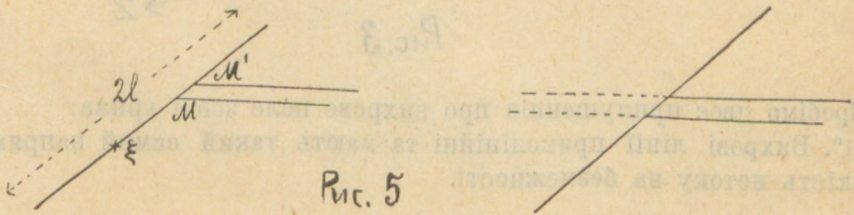


Зазначім через  $\alpha$  геометричний кут атаки, тоб-то кут атаки нескінченно довгого циліндричного крила, збудованого на розгляданому профілі (за інших однакових умов).

Тоді

$$\alpha^* = \alpha - \varepsilon,$$

бо вихрове поле утворює додаткову швидкість  $w$  по осі  $y'$ ів (ми будемо її вважати за додатню, коли вона спрямована вниз) і тому змінює кут атаки.



$$\varepsilon = \frac{w}{v_{\infty}}$$

З наведеного збудування видно, що індуктивна сила (опір або затримка при додатньому  $w$ ), що припадає на елемент  $dx$ , дорівнює

$$dW = \varepsilon dA.$$

Величину додаткової швидкості  $w$  на крилі можна визначити через величини, що характеризують вихрове поле.

Коли в перекрої  $M$  циркуляція дорівнює  $\Gamma$ , а в нескінченно близькому перекрої  $M'$  циркуляція рівна  $\Gamma' = \Gamma + d\Gamma$ , то інтенсивність вихору, що спирається на елемент  $dx$ , дорівнює

$$\frac{d\Gamma}{dx} dx.$$

Швидкість, що вихор  $d\Gamma$  викликає в точці  $\xi$  крила, вдвоє менша за ту, що повстала-б, коли-б вихори тягнулися обабіч на нескінченність. Biot-Savart'ова формула дає

$$w(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{\xi - x} \quad (3)$$

Звідси Betz'ове рівняння для визначення  $\Gamma$ :

$$\Gamma(x) = \pi v_{\infty} t \alpha - \frac{t}{4} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi}. \quad (4)$$

Інтеграл (3) треба брати за Cauchy, як в. р.

Розглянемо тепер важливу задачу визначення того закону розподілу циркуляції  $\Gamma$ , що відповідає найменшій вартості індуктивного опору при

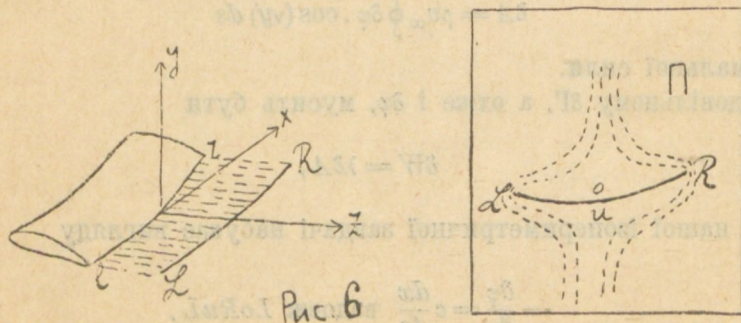


Рис 6

завданій вартості підйимальної сили. При цьому не робитимемо жадних обмежень відносно лінії  $lr$  (заднього канту крила). Зазначмо, що зовсім не складніша задача для многоплану.

Вперше це питання розглядав у дисертації Munk.

Перетнім на великому віддаленні від крила вихрову поверхню, що відходить від нього (циліндричну за припущенням 1<sup>о</sup>), площиною  $\Pi$ , нормальною до  $v_{\infty}$ .

Вихрова поверхня зобразиться при цьому певною лінією  $LR$ .

У площині II відбувається деяке плиске течіння, що зовні лінії  $LR$  має потенціал швидкостей  $\varphi$ , Підіймальна сила  $A$  і індуктивний опір  $W$  нашого крила, як легко бачити, визначаються через течіння в площині II такими формулами

$$A = -\rho v_{\infty} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy, \quad (5)$$

$$W = \frac{\rho}{2} \iint \text{grad}^2 \varphi dx dy. \quad (6)$$

Застосовуючи Green'ову теорему, дістанемо

$$A = \rho v_{\infty} \oint \varphi \cos(\nu y) ds,$$

$$W = -\frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds,$$

де  $\nu$  є нормаль до  $LR$ , спрямована в середину рідини, а  $ds$  є елемент лінії  $LR$ ; інтеграція відбувається по замкненому контурі  $LoRuL$ .

Варіюючи  $\Gamma$ , тоб-то  $\varphi$ , одержимо аналогічно

$$\delta W = \rho \iint \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \delta \varphi dx dy = -\rho \oint \delta \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds$$

для індуктивного опору й

$$\delta A = \rho v_{\infty} \oint \delta \varphi \cdot \cos(\nu y) ds$$

для підіймальної сили.

При довільному  $\delta \Gamma$ , а отже і  $\delta \varphi$ , мусить бути

$$\delta W = \lambda \delta A,$$

і розв'язок нашої ізопериметричної задачі набуває вигляду

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = c \frac{dx}{ds} \text{ вздовж } LoRuL,$$

або, запроваджуючи функцію струменя  $\psi$ ,

$$\psi = cx,$$

тоб-то течіння в площині II повинно бути таким, яке повстало-б, коли-б затверділа лінія  $LR$  рухалася прямою вниз із швидкістю  $c$ .

Для випадку, коли  $LR$  є відтинок простої, тоб-то  $lr$  лежить у площині  $xz$ , циркуляція  $\Gamma$ , що являє срік потенціалу вздовж  $LR$

$$\Gamma = \varphi_0 - \varphi_u,$$

повинна розподілятися за еліптичним законом

$$\Gamma(x) = \Gamma_m \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}$$

Для многоплану повний індуктивний опір не залежить від виносу одного крила відносно останніх у напрямку льоту; при цьому припускається, що підймальна сила залишається незмінна.

Один із найважливіших вислідів теорії індуктивного опору це можливість будування за Lilienthal'овою діаграмою для якогось крила діаграми для крила іншого розмаху з тим-же профілем.

Завдяки цьому досить знати проудув якогось крила певного профілю, щоб застосовувати цей профіль при довільнім розмахові.

Отже ролю експеримента зводиться в цьому питанні до мінімуму. Такі головні досягнення загальної аеродинаміки.

Із сказаного вже видно, як класичну теорію ідеальних рідин, обережно та вміло до неї підходячи, можна з успіхом застосувати до вивчення процесів у реальних рідинах.

Скажім декілька слів про цю працю.

У ній розглядається течіння в ідеальній нестисливій рідині.

1-ий розділ присвячується питанню про знаходження комплексового потенціалу швидкостей.

Опріч руху моно- та біплану ми розглядаємо, як дужий вітер обтікає нескінченно довгі циліндри.

Коли профіль має форму многокутника, то завдача зводиться до квадратур на підставі Schwarz-Christoffel'ової формули.

Питання про профіль, що складається з двох многокутників, які не перетинаються, приводить до завдачі конформного зображення двохзв'язаного многокутнікового обсягу на кільце, тоб-то до узагальнення Schwarz-Christoffel'ової завдачі.

Цю завдачу ми розв'язуємо в 2-ім розділі, причім повстають формули подібні до Schwarz'ової, тільки замість чинників  $z - a_i$  в цю формулу входять функції

$$\wp_1 \left( \frac{\lg z - \lg a_i}{2\pi i} \right)$$

У 3 розділі ми обчислюємо силу та момент, що діють на крило обмежених розмірів при деяких наближених припущеннях відносно вихрового поля, які являють узагальнення припущень С. А. Чаплигіна, зроблених у праці, що наведено в розд. 1.

## РОЗДІЛ 1.

### Як знаходити комплексний потенціал.

У цьому розділі ми розглянемо питання, як знаходити комплексний потенціал швидкостей течіння, що викликає його довільний плоский рух моно-і біплану нескінченного розмаху, за умовою постійної циркуляції.

Для моноплану загальний розв'язок дано в книзі С. А. Чаплигіна „О влиянии плоско-параллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло“ (1926). Ми подамо цей розв'язок з деякими змінами.

Ми розглянемо крім цього питання про рух моноплану поблизу поверхні землі, а так само обтікання дужим вітром предметів, що знаходяться на поверхні землі.

#### § 1. Комплексний потенціал для моноплану.

Зазначім через  $x, y$  координати точки відносно осей незмінно зв'язаних з контуром поперечного перетину нескінченного циліндричного крила.

Нехай  $a_x, a_y$  і  $\Omega$  в проєкції на рухомі осі абсолютної швидкості початку рухомого координатного хреста й кутова швидкість обертання контура відносно цього початку.

Провекції на рухомі осі абсолютної швидкості частинки повітря рівні:

$$v_x = a_x - \Omega y + u_x, \quad (1)$$

$$v_y = a_y + \Omega x + u_y,$$

де  $u_x = \dot{x}$ ,  $u_y = \dot{y}$  в проєкції відносної швидкості.

На нескінченно далекому віддаленні від крила

$$v_x = v_y = 0, \quad (2)$$

а на контурі крила

$$v_y dx - v_x dy = a_y dx - a_x dy + \Omega (x dx + y dy). \quad (3)$$

Запроваджуючи функцію струменя абсолютного течіння  $\phi$ , перепишім умову (3) в вигляді

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = a_y dx - a_x dy + \Omega (x dx + y dy). \quad (3_1)$$

Звідси, інтегруючи та запроваджуючи довільну функцію часу до складу  $\psi$ , дістанемо

$$-\psi = xa_y - ya_x + \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2). \quad (4)$$

Запровадьмо комплексовий потенціал

$$w = \varphi + i\psi$$

та комплексову швидкість

$$v' = \frac{dw}{dz} = v_x - iv_y.$$

Щоб знайти течіння, треба скласти аналітичну функцію

$$\omega(z) = iw(z) = -\psi + i\varphi, \quad (5)$$

знаючи вартість її дійсної частини на контурі. Ця функція повинна бути регулярна зовні контура, коли немає циркуляції, і повинна мати логаритмічну особливість на нескінченності для циркуляційного течіння.

Як відомо, частину площини зовні контура крила можна конформно зобразити на обсяг у середині одиничного кола ( $|\zeta| \leq 1$ ) так, що нескінченно далека точка площини  $z$  зобразиться в центрі цього кола.

Нехай вищезгадане зображення відбувається за допомогою функції

$$z = F(\zeta)$$

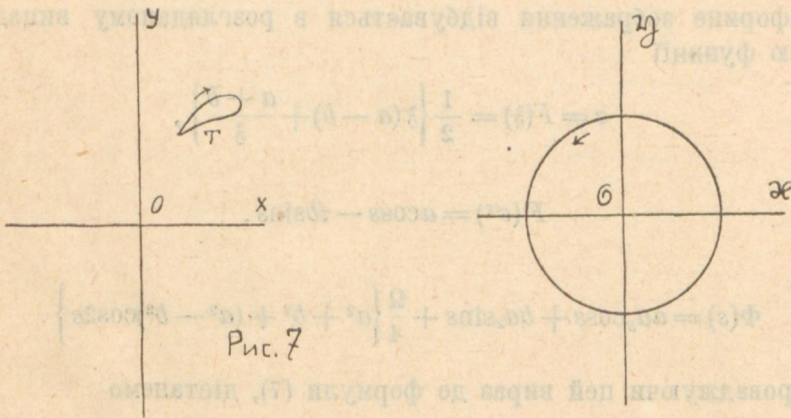


Рис. 7

Ця функція має вигляд

$$F(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\delta} + a_0 + a_1\zeta + \dots$$

Перепишім умову (4) у вигляді

$$-\phi = \Re \{ F(e^{is}) (a_y + ia_x) \} + \frac{\Omega}{2} F(e^{is}) F(e^{-is}) = \Phi(s). \quad (4_1)$$

Перед нами тепер таке завдання: збудувати аналітичну функцію, що регулярна в середині одиничного кола та набуває на контурі вартості  $\Phi(s)$ .

Відомо, що таку функцію можна представити у вигляді<sup>1)</sup>

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \frac{1 + \zeta e^{-is}}{1 - \zeta e^{-is}} ds + iC, \quad (6)$$

де  $C$  дійсна стала.

Отже ми дістаємо для комплексового потенціалу швидкостей віір

$$w(\zeta) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \left\{ \frac{2}{1 - \zeta e^{-is}} - 1 \right\} ds.$$

Коли в циркуляція  $\Gamma$ , одержимо

$$w(\zeta) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \left\{ \frac{2}{1 - \zeta e^{-is}} - 1 \right\} ds - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg \zeta. \quad (7)$$

Знаходження комплексового потенціалу швидкостей зводиться отже до конформного зображення.

Для прикладу розглянемо контур, що має вигляд еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Конформне зображення відбувається в розгляданому випадкові за допомогою функції

$$z = F(\zeta) = \frac{1}{2} \left\{ \zeta(a-b) + \frac{a+b}{\zeta} \right\},$$

так що

$$F(e^{is}) = a \cos s - ib \sin s,$$

і

$$\Phi(s) = aa_y \cos s + ba_x \sin s + \frac{\Omega}{4} \left\{ a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos 2s \right\}.$$

Запроваджуючи цей вираз до формули (7), дістанемо

$$w(\zeta) = -(a_x b + ia_y a) \zeta - \frac{i\Omega(a^2 - b^2)}{4} \zeta^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg \zeta. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Див., напр., Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 1925, S. 301.

§ 2. Проблема Dirichlet для обсягу, обмеженого двома концентричними обводами кола.

Подібно до того, як у випадкові монопланного крила ми користувалися виразом аналітичної та регулярної в середині одиничного кола функції, що її дійсна частина набуває на обводі цього кола задані вартості, так тепер, розглядаючи біплана, нам потрібен буде розв'язок аналогічної задачі для обсягу,<sup>1)</sup> обмеженого двома концентричними обводами кола радіусів  $q^{-1/2}$ ,  $q^{1/2}$  ( $0 < q < 1$ ).

Із вимоги регулярності випливає (теорема Cauchy), що дійсні функції  $\Phi_1(s)$  і  $\Phi_2(s)$  не можуть бути цілком довільні, а повинні задовольняти умову

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1(s) ds = \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) ds. \quad (9)$$

Доберім дійсні числа  $\omega_1$  та  $i\omega_2$  так, щоб

$$e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} = q. \quad (10)$$

і

$$\frac{\omega_2}{i\omega_1} = \frac{\tau}{i} > 0.$$

Розгляньмо функцію

$$\begin{aligned} \Omega(z) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_1(s) \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\zeta(u)$ ,  $\zeta_3(u)$  в функції Weierstrass'ові, що визначаються формулами:

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \frac{d}{dv} \lg \vartheta_1(v), \quad (12)$$

$$\zeta_3(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \frac{d}{dv} \lg \vartheta_3(v), \quad v = \frac{u}{2\omega_1},$$

<sup>1)</sup> Див. E. Picard, Traité... II, p. 104-106 (1925), де розв'язок дається у вигляді рядів, що містять тригонометричні функції. H. Villat в низці праць застосовує еліптичні функції. Літературу наведено в Encykl. der Mat. Wissensch. Bd. II, H. 3 (1919), стаття L. Lichtenstein'a, на ст. 208. Див. також H. Villat, Aperçus théoriques sur la Résistance des Fluides (1920) p. 10-19.

$$\eta_1 = -\frac{1}{12\omega_1} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}, \quad \vartheta = \vartheta(0),$$

$$\vartheta_1(v) = 2 \left\{ q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots \right\}$$

$$\vartheta_0(v) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots$$

На підставі співвідношень <sup>1)</sup>

$$\vartheta_0 \left( v + \frac{\tau}{2} \right) = ie^{-\left( \frac{i\pi\tau}{4} + i\pi v \right)} \vartheta_1(v), \quad (13)$$

$$\vartheta_1 \left( v + \frac{\tau}{2} \right) = ie^{-\left( \frac{i\pi\tau}{4} + i\pi v \right)} \vartheta_0(v)$$

дістанемо

$$\zeta(u + \omega_2) = \zeta_3(u) + \eta_2, \quad (14)$$

$$\zeta_3(u + \omega_2) = \zeta(u) + \eta_2,$$

де  $\eta_2$  визначається формулою

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2} \quad (15)$$

Із (12) і (13) випливає, що

$$\int_0^{2\pi} \zeta_3 \left( t - \frac{s\omega_1}{\pi} \right) ds = \frac{2\pi\eta_1}{\omega_2} (t - \omega_1), \quad (16)$$

а звідси за (14)

$$\int_0^{2\pi} \zeta \left( t - \frac{s\omega_1}{\pi} \right) ds = -\frac{i\pi^2}{\omega_1} + \frac{2\pi\eta_1}{\omega_1} (t - \omega_1), \quad (17)$$

отже

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \zeta_3 \left( t - \frac{s\omega_1}{\pi} \right) - \zeta \left( t - \frac{s\omega_1}{\pi} \right) \right\} ds = \frac{i\pi^2}{\omega_1} \quad (18)$$

Доведім тепер, користуючись наведеними формулами, що функція  $\Omega(\delta)$  задовольняє всі вимоги поставленої задачі.

Легко переконатися в тім, що  $\Omega(\delta)$  регулярна в середині обсягу  $\left( q^{-1/2}, q^{1/2} \right)$ .

Подивімся тепер, що стане з  $\Omega(\delta)$ , коли  $\delta \rightarrow \delta_\varepsilon = q^{-1/2} e^{i\varepsilon}$  ( $0 \leq \varepsilon < 2\pi$ ).

<sup>1)</sup> Hurwitz-Courant, Op. c., p. 201.

Для цього напишім (11) у вигляді

$$\begin{aligned} \Omega(\delta) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \Phi_1(s) - \Phi_1(\varepsilon) \right\} \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds \\ & + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \Phi_1(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right\} ds \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds \\ & + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \Phi_1(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds. \end{aligned}$$

Другий член правої частини дорівнює  $\Phi_1(\varepsilon)$ , а решта при  $\delta \rightarrow \delta_0$  йдуть до суто уявних границь.

Візьмім тепер точку  $\delta_0 = q^{1/2} e^{i\varepsilon}$  та, скориставшись з умови регулярності (9), представмо (11) у вигляді

$$\begin{aligned} \Omega(\delta) = & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \Phi_2(s) - \Phi_2(\varepsilon) \right\} \left\{ \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - \eta_2 \right\} ds \\ & + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_1(s) \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - \eta_2 \right\} ds \\ & + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \Phi_2(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right\} ds \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \Phi_2(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - \eta_2 \right\} ds. \end{aligned}$$

Третій член правої частини дорівнює  $\Phi_2(\varepsilon)$ , а решта при  $\delta \rightarrow \delta$ , йде до суто уявних границь.

### § 3. Комплексовий потенціал без циркуляції для біплану.

Зазначмо, як і в § 1, через  $\phi$  функцію струменя для абсолютного течіння повітря, викликаного рухом біплану, що складається з крил  $T_1$  і  $T_2$ .

Будемо під додатнім обходом контурів  $T_1$  і  $T_2$  розуміти той обхід, що при ньому частина площини  $S$  зовні їх залишається ліворуч.

Обсяг  $S$  є двозв'язний (ми відносимо до  $S$  нескінченно далеку точку площини  $z'$ ів), а тому його можна конформно зобразити на обсяг  $G$ , обмежений обводами кола радіусів  $q^{-1/2}$  і  $q^{1/2}$  при деякому  $q$  ( $0 < q < 1$ ).

Відповідні додатні напрямки обходу обводів  $Q_1$  і  $Q_2$  зазначено стрілками.

Нескінченно далека точка обсягу  $S$  зобразиться в якійсь точці  $c$  обсягу  $G$ .

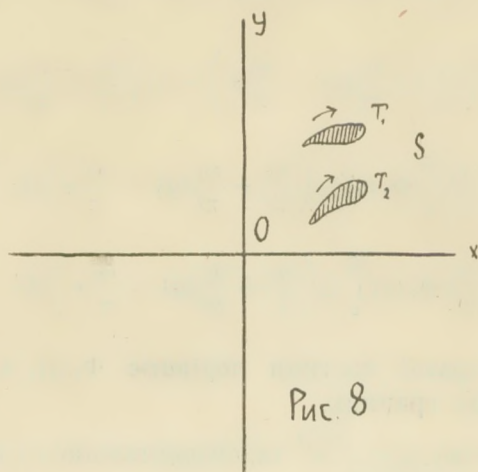


Рис. 8

Як і в § 1, одержимо, що функція струменя  $\phi$  на межі обсягу  $S$  набуває вартостей

$$-\phi = xa_y - ya_x + \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) \text{ на } T_1,$$

$$-\phi = xa_y - ya_x + \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) + f \text{ на } T_2,$$

де  $f$  функція часу, що визначається з умови регулярности комплексового потенціалу  $w(z)$ .

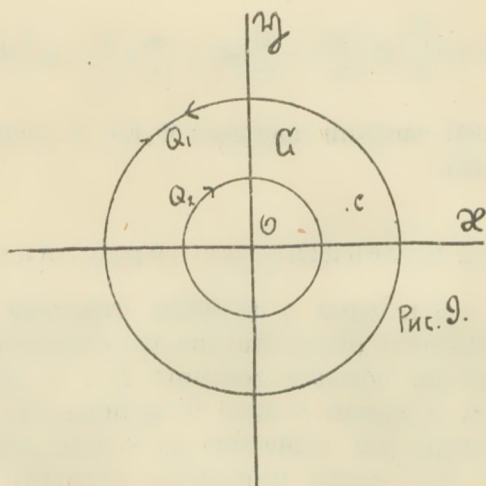


Рис. 9.

Нехай  $z = F(\zeta)$  є функція, що зображає  $S$  на  $G$ .

На границі обсягу  $G$  функція  $\phi$  має вартості

$$\Phi_1(s) = \Re \{ F(q^{-1/2} e^{is})(a_y + ia_x) \} + \frac{\Omega}{2} F(q^{-1/2} e^{is}) F(q^{-1/2} e^{-is}) \text{ на } Q_1,$$

$$\Phi_2(s) = \Re \{ F(q^{1/2} e^{is})(a_y + ia_x) \} + \frac{\Omega}{2} F(q^{1/2} e^{is}) F(q^{1/2} e^{-is}) + f \text{ на } Q_2.$$

При цьому  $f$  визначається з умови

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1(s) ds = \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) ds.$$

Комплексний потенціал течіння без циркуляції визначиться на підставі § 2 взором

$$w(\beta) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_1(s) \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \beta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \beta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds. \quad (19)$$

#### § 4. Комплексний потенціал при наявності циркуляцій для біплана.

Розглянемо тепер питання про те, як знаходити потенціал для суто циркуляційного течіння, що для нього  $a_x = a_y = \Omega = 0$ .

Циркуляція по контуру  $T$  визначається формулою

$$\int_T v' dz = \int_T dw,$$

причём напрямок обходу такий, що обсяг  $S$  або  $G$  залишається ліворуч.

Припустім спочатку, що циркуляції по контурах  $T_1$  і  $T_2$  прямо протилежні

$$\Gamma_1 = \Gamma, \Gamma_2 = -\Gamma.$$

Тоді і по контурах  $Q_1$  і  $Q_2$  інтеграли

$$\int_{Q_1} dw, \int_{Q_2} dw$$

повинні відповідно дорівнювати  $\Gamma$  і  $-\Gamma$ .

Відносно точки  $\beta = 0$ , не приналежної до обсягу  $G$ , написані інтеграли береться в протилежних напрямках, а тому відповідний розгляданому течінню комплексний потенціал визначається формулою

$$\bar{w}(\beta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \lg \beta. \quad (20)$$

По контуру, що охоплює обидва крила, циркуляція в розгляданому випадкові дорівнює нулеві.

Розгляньмо тепер загальний випадок, коли циркуляції  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  навколо крил не протилежні, а мають довільні вартості.

Функція  $w_2 = \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \lg \delta$  дає потрібну циркуляцію навколо крила  $T_2$  і циркуляцію  $-\Gamma_2$  навколо крила  $T_1$ .

Тому завдача зводиться до відшукування комплексового потенціалу для такого течіння, що в ньому циркуляція навколо  $T_2$  дорівнює нулеві, а навколо  $T_1$  дорівнює  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ .

Приймім, що нескінченно далека точка обсягу  $S$  зображається в точці  $c$  дійсної додатної півоси обсягу  $G$ .

Завдача полягає в тому, щоб знайти аналітичну функцію  $X_c(\delta)$ , регулярну скрізь у  $G$  опріч точки  $c$ , де сума

$$X_c(\delta) + \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi} \lg(\delta - c)$$

залишається суцільна. Опріч того, уявна частина функції  $X_c(\delta)$  повинна дорівнювати нулеві на границях  $Q_1$  і  $Q_2$  обсягу  $G$ <sup>1)</sup>.

Будемо визначати функцію  $X_c(\delta)$  за Н. Weber'ом<sup>2)</sup>.

Запровадьмо функцію

$$\Pi(\delta) = e^{\frac{2\pi i}{\Gamma_1 + \Gamma_2} X_c(\delta)}$$

Вона повинна задовольняти в обсягу  $G$  такі вимоги:

- 1)  $|\Pi(\delta)| = 1$  вздовж  $Q_1$  і  $Q_2$ ,
- 2)  $|\Pi(\delta)|$  скрізь у  $G$  опріч точки  $\delta = c$  є однозначна, обмежена, суцільна та відмінна від нуля функція,
- 3) в точці  $\delta = c$  дріб

$$\frac{\Pi(\delta)}{\delta - c}$$

є обмежений та відмінний від нуля.

Розгляньмо функцію

$$F(\delta) = A i \delta^\beta \frac{\partial_1 \left( \frac{\lg \delta - \lg c}{2\pi i} \right)}{\partial_0 \left( \frac{\lg \delta + \lg c}{2\pi i} \right)},$$

де  $\beta$  і  $A$  поки-що неозначені сталі, що з них  $A$  дійсна.

<sup>1)</sup>  $X_c(\delta)$  є отже Green'ова функція для обсягу  $G$ .

<sup>2)</sup> Н. Weber, Die partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. I, 1910, p. 363.

$F(\beta)$  задовольняє умови 2) і 3).

Можна добрати константи  $A$  і  $\beta$  так, щоб справджувалась також і умова 1).

З цією метою обчислім модуля функції  $F(\beta)$  для  $\beta = q^{-1/2} e^{is}$ . Помічаючи, що  $\beta' = q^{-1/2} e^{-is} = \frac{1}{q\beta}$ , одержимо

$$|F(\beta)|^2 = \frac{A^2 \vartheta_1\left(\frac{\lg\beta - \lg c}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\lg\beta + \lg q + \lg c}{2\pi i}\right)}{q^\beta \vartheta_0\left(\frac{\lg\beta + \lg c}{2\pi i}\right) \vartheta_0\left(\frac{\lg\beta + \lg q - \lg c}{2\pi i}\right)}$$

На підставі (13) це рівняння набуде вигляду

$$|F(\beta)|^2 = A^2 c^{-1} q^{-\beta} = 1.$$

Це перше рівняння для визначення  $A$  і  $\beta$ .

Вирахуймо тепер модуля нашої функції для  $\beta = q^{1/2} e^{is}$ . В цьому разі  $\beta' = \frac{q}{\beta}$ , і ми легко дістанемо, що

$$|F(\beta)|^2 = A^2 q^\beta c = 1.$$

Це друге рівняння для визначення  $A$  і  $\beta$ .

Розв'язуючи ці рівняння, дістанемо

$$A = 1, \quad \beta = -\frac{\lg c}{\lg q}.$$

Це дає для функції  $\Pi(\beta)$  такий взір:

$$\Pi(\beta) = i\beta \frac{-\frac{\lg c}{\lg q} \vartheta_1\left(\frac{\lg\beta - \lg c}{2\pi i}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\lg\beta + \lg c}{2\pi i}\right)}. \quad (21)$$

Коли  $c = 1$ , то  $\Pi(\beta)$  набуде простішого вигляду

$$\Pi(\beta) = i \frac{\vartheta_1\left(\frac{\lg\beta}{2\pi i}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\lg\beta}{2\pi i}\right)} = i \sqrt{k} \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{K \lg\beta}{\pi i}\right) \quad (22)$$

де

$$\sqrt{k} = \frac{2(q^{1/4} + q^{9/4} + \dots)}{1 + 2q + \dots}, \quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + \dots$$

Отже для  $X$  маємо взір

$$X_c = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \left\{ \lg \vartheta_1 \left( \frac{\lg \delta - \lg c}{2\pi i} \right) - \lg \vartheta_0 \left( \frac{\lg \delta + \lg c}{2\pi i} \right) - \frac{\lg c}{\lg q} \lg \delta \right\} \quad (23)$$

$$X_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \lg \operatorname{sn} \left( \frac{K \lg \delta}{\pi i} \right). \quad (24)$$

Комплексовий потенціал у розгляданому випадкові дорівнює

$$w(\delta) = X + \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \lg \delta. \quad (25)$$

У загальному випадкові комплексний потенціал дорівнює сумі взорів (19) і (25).

### § 5. Приклад 1-ий

Як приклад, розгляньмо біплан, що його крила являють однакові рівнобіжні пліски смуги, розташовані прямовісно одна під одною.

У поперечному перекрої крила являють двоє протилежних боків  $A_1 A_2$  і  $B_1 B_2$  прямокутника (див. рис. 21).

Конформне зображення обсягу  $S$  на кільце  $G$ , як показано в § 2 розділу 2, відбувається за допомогою формули<sup>1)</sup>

$$z = \frac{2K\alpha}{\pi} Z \left( \frac{K \lg \delta}{\pi i}, h \right), \quad (K = \omega_1) \quad (26)$$

причім залежність між  $\beta$  і  $q$  дається рівн. (10) розділу 2.

Просте обчислення показує, що в розгляданому випадкові  $\Phi_1(s)$  і  $\Phi_2(s)$  однакові та визначаються формулою

$$\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = 4\alpha \alpha_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{1-h^{2n}} \sin ns + 8\alpha^2 \Omega \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{1-h^{2n}} \sin ns \right]^2.$$

<sup>1)</sup> Див. також Н. Weber, Die partielle Differentialgleichungen... Bd. I, 1910 S. 368.  $Z$  і  $Z_3$  визначаються формулами

$$Z(u, h) = \zeta(u, h) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u; \quad Z_3(u, h) = \zeta_3(u, h) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u.$$

Вони мають властивості

$$Z(u + \omega_2) = Z_3(u) - \frac{1}{2} \frac{\pi i}{\omega_1}; \quad Z_3(u + \omega_2) = Z(u) - \frac{1}{2} \frac{\pi i}{\omega_1};$$

$$Z(u, h) = \frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{1-h^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\omega_1}; \quad Z_3(u, h) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{1-h^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\omega_1}.$$

(У першій формулі  $\left| \Re \frac{u}{i} \right| < \left| \omega_2 \right|$ , а в другій  $\left| \Re \frac{u}{i} \right| < \frac{1}{2} \left| \omega_2 \right|$ ).

Тому формула (19) набуває вигляду

$$w(\delta) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi_1(s) \left\{ Z_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} \left( s - \frac{\pi\tau}{2} - \frac{lg\delta}{i} \right), q \right] - Z_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} \left( s + \frac{\pi\tau}{2} - \frac{lg\delta}{i} \right), q \right] \right\} ds,$$

або

$$w(\delta) = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{1+h^{2k}} \cos k(s + ilg\delta) ds.$$

Зазначім через  $w_1(\delta)$  ту частину повного потенціалу, що відповідає  $a_y$ .

$$\begin{aligned} w_1(\delta) &= \frac{8\alpha a_y}{\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{k}{2}}}{1+q^k} \frac{q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n} \int_0^{2\pi} \sin ns \cdot \cos k(s + ilg\delta) ds = \\ &= \frac{4\alpha a_y \omega_1}{\pi i} Z_3 \left( \frac{\omega_1 lg\delta}{\pi i}, q \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Трохи складніше обчислити другу частину потенціалу. Воно приводить до взору

$$w_2(\delta) = 4\alpha^2 \omega_1 \Omega i Z'_3 \left( \frac{\omega_1 lg\delta}{\pi i}, q \right) - \frac{i\alpha^2 \Omega}{\omega_1} \left\{ \frac{\vartheta''_0 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i}, q \right)}{\vartheta_0 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i}, q \right)} + \frac{\vartheta''_1 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i}, q \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i}, q \right)} \right\} \quad (28)$$

Напишім потенціал особливо важливий течіння при наявності циркуляцій  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  та відсутності обертання крила ( $\Omega = 0$ )

$$w(\delta) = \frac{4\alpha a_y \omega_1}{\pi i} Z_3 \left( \frac{\omega_1 lg\delta}{\pi i}, q \right) + \frac{i\Gamma_2}{2\pi} lg\delta + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \left\{ lg \vartheta_1 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i} \right) - lg \vartheta \left( \frac{lg\delta}{2\pi i} \right) \right\} \quad (29)$$

Можна дібрати  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  так, щоб відносна швидкість у кутових точках  $A_1$ ,  $B_1$  дорівнювала нулеві.

### § 6. Приклад 2-й.

Як другий приклад розглянемо течіння навколо Flettner'ових роторів.

У багатьох брошурах, присвячених Flettner'овому <sup>1)</sup> винаходіві можна знайти історію та опис першого роторного корабля.

Ми розглянемо математичну задачу визначення течіння навколо роторів, що припустімо, є нескінченно довгі.

В'язкість повітря відіграє ролю тільки в поверхневому шарі невеликому завтовшки і являє джерело циркуляції, тому ми можемо, як набли-

<sup>1)</sup> Див., напр., И. Аккерет, Роторный корабль, 1925; Б. Кажинский, Ветро-силовые башни Флеттнера, 1925.

жене припущення, прийняти, що навколо циліндрів є якісь циркуляції  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ , а повітря розглядати, як ідеальну рідину.

Припустім для простоти, що діаметри роторів однакові, так що в поперечному перекрою повстає два однакових кола  $T_1$  і  $T_2$

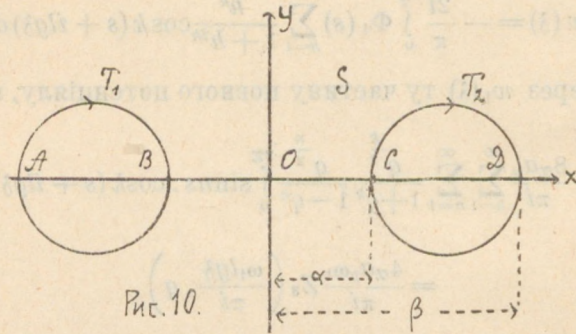


Рис. 10.

Згідно з загальною теорією ми повинні конформно зобразити обсяг  $S$  зовні цих кіл на кільцевий обсяг  $G(q^{-1/2}, q^{1/2})$ .

Це зображення відбувається за допомогою дробової лінійної функції, що, як відомо, переводить кола одної площини в кола другої.

Будемо вимагати, щоб точкам

$$z = A, B, C, D$$

відповідали точки

$$\zeta = q^{-1/2}, -q^{-1/2}, -q^{1/2}, q^{1/2}.$$

Легко бачити, що шукане зображення відбувається за допомогою функції

$$z = \sqrt{\alpha\beta} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \tag{30}$$

а  $q$  визначається формулою<sup>1)</sup>

$$q = \left( \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right)^2. \tag{31}$$

Обчислім  $z$  вздовж  $\zeta = q^{-1/2} e^{is}$ .

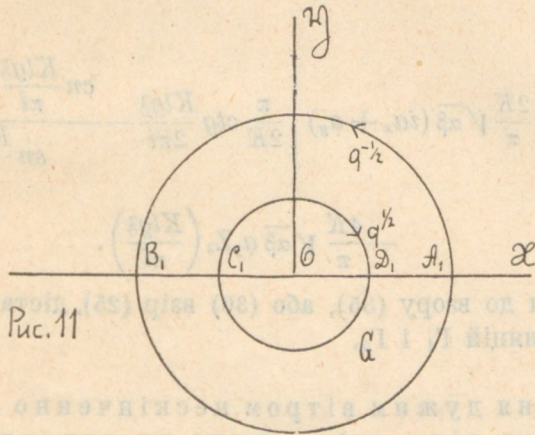
Простий рахунок дає

$$z = \sqrt{\alpha\beta} \left\{ -1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} e^{-kis} \right\}. \tag{32}$$

<sup>1)</sup> Пор. Н. Weber, op. c. Bd. I, p. 367.

Подібно вздовж  $\delta = q^{1/2} e^{is}$  дістанемо

$$z = \sqrt{\alpha\beta} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} e^{kis} \right\}. \quad (33)$$



Припускаючи, що  $\Omega = 0$ , одержимо для  $\phi$ -ій  $\Phi_1(s)$  і  $\Phi_2(s)$  такі взори:

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= -2\sqrt{\alpha\beta} a_y \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} \cos ks - 2\sqrt{\alpha\beta} a_x \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} \sin ks, \\ \Phi_2(s) &= 2\sqrt{\alpha\beta} a_y \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} \cos ks - 2\sqrt{\alpha\beta} a_x \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} \sin ks. \end{aligned} \quad (34)$$

Підставляючи взори (34) в (19), дістанемо комплексовий потенціал нециркуляційного течіння у вигляді

$$\begin{aligned} w(\delta) &= -\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\pi^2} a_y \omega_1 \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} \cos ks \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 l g \delta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1}{\pi i} l g \delta - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) \right\} ds \\ &- \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\pi^2} a_x \omega_1 \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k/2} \sin ks \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 l g \delta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) - \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 l g \delta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) \right\} ds. \end{aligned}$$

Скориставшись розкладом  $\phi$ -ій  $\zeta, \zeta_3$  в тригонометричний ряд, дістанемо після небагатьох підрахунків:

$$w(\delta) = 2\sqrt{\alpha\beta} \left\{ a_x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} (\delta^k - \delta^{-k}) + i a_y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k} (\delta^k - \delta^{-k}) \right\} \quad (35)$$

ЦЕНТРАЛЬНА  
НАУКОВО-УЧБОГ  
БІБЛІОТЕКА.

Помічаючи, що

$$(35) \quad \frac{cnx \, dn x}{snx} = \frac{\pi}{2K} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2K} - \frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \sin \frac{k\pi x}{K},$$

$$K = \omega_1 = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^4 \dots)^2,$$

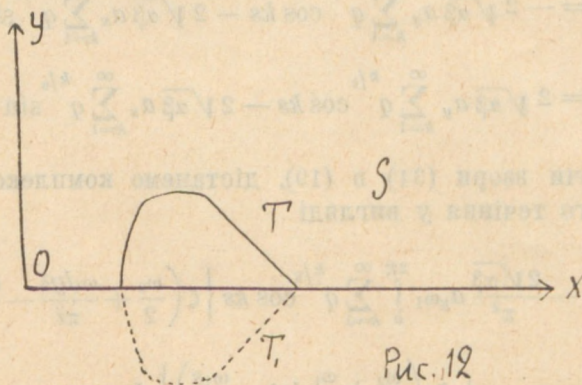
дістанемо

$$(36) \quad w(\delta) = \frac{2K}{\pi} \sqrt{\alpha\beta} (ia_x + a_y) \left\{ \frac{\pi}{2K} \operatorname{ctg} \frac{Klg\delta}{2\pi i} - \frac{cn \frac{Klg\delta}{\pi i} \, dn \frac{Klg\delta}{\pi i}}{sn \frac{Klg\delta}{\pi i}} \right\} - \frac{4K}{\pi} \sqrt{\alpha\beta} a_y Z_3 \left( \frac{Klg\delta}{\pi i} \right).$$

Приєднуючи до взору (35), або (36) взір (25), дістанемо потенціал при існуванні циркуляцій  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ .

### § 7. Обтікання дужим вітром нескінченно довгого циліндричного тіла, що лежить на поверхні землі.

Питання, що ми його розглянемо в загальному вигляді в цьому §, вперше розглядав Н. Е. Жуковський у статті „О снежных заносах“<sup>1)</sup>.



Воно багато важить тепер з огляду на той факт, що руйнуються дахи будівель підчас дужого вітру не так через те, що збільшується тиск на передню сторону, як через те, що збільшується дія смоктання з задньої сторони<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Сборник статей, посвященных проф. Г. К. Суслеву. Киев 1911, стр. 357 — 366. В цій праці розглядається нескінченно довгий круговий циліндр.

<sup>2)</sup> Г. А. Озеров, Центральный аэро-гидродинамический институт. Москва, 1927, стр. 12 — 13.

Припустім за Н. Е. Жуковським, що швидкість вітру на великім віддаленні від землі можна представити формулами

$$v_x = c + \lambda y.$$

$$v_y = 0.$$

При цьому вісь  $y$ 'ів спрямована прямою вгору, а вісь  $x$ 'ів спрямована в площині обрїю нормально до твірної розгляданого циліндричного тіла.

Це тіло в поперечному перекрої представиться в вигляді якогось контура  $T$ .

Запровадьмо функцію абсолютного течіння  $\phi$  і припустім, що

$$\phi = cy + \frac{\lambda y^2}{2} + \psi. \quad (37)$$

Тоді

$$v_x = c + \lambda y + \frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \quad (38)$$

$$v_y = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x}$$

На контурі перепони і на поверхні землі повинна виконуватися умова

$$v_y dx - v_x dy = 0,$$

або

$$-\phi_0 = cy + \frac{\lambda y^2}{2}. \quad (39)$$

Запровадьмо комплексний потенціал  $w = \phi_0 + i\psi$ , і покладім

$$\Omega(z) = iw = -\phi_0 + i\psi.$$

Перед нами завдача: знайти аналітичну функцію, регулярну в обсягу  $S$  (частина горішньої півплощини зовні контура  $T$ ), коли її дійсна частина на межі обсягу  $S$  набуває задані вартості.

Щоб розв'язати цю завчатку, зобразім  $S$  конформно на горішню половину одиничного кола площини  $\zeta$ .

Коли  $T_1$  є лінія симетрична  $T$  відносно осі  $x$ 'ів, то обсяг площини  $z$  зовні  $T + T_1$  зобразиться при цьому за Schwarz'овим принципом на повному колі площини  $\zeta$ .

Нехай функція  $z = F(\zeta)$  зображає  $S$  на горішню півколо так, щоб нескінченно далека точка обсягу  $S$  зобразилась в  $\zeta = 0$ .

Вартість функції  $-\phi_0$  на контурі перепони в площині  $\zeta$  є

$$-\phi_0 = \Phi(s) = cf(s) + \frac{\lambda f^2(s)}{2},$$

де

$$f(s) = \Re \frac{F(e^{is})}{i}.$$

Продовжимо функцію  $\Omega(z)$  на спіднє півколо, поклавши за Schwarz'овим принципом

$$\Phi(s) = -\Phi(2\pi - s).$$

Шукана функція  $\Omega(\beta)$  має вигляд

$$\Omega(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{1 + \beta e^{-is}}{1 - \beta e^{-is}} ds + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \Phi(\sigma) \frac{1 + \beta e^{-i\sigma}}{1 - \beta e^{-i\sigma}} d\sigma,$$

або

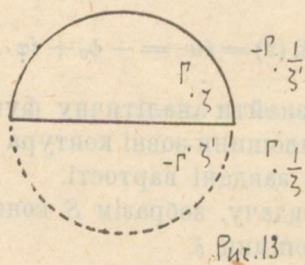
$$\begin{aligned} \Omega(\beta) &= -\frac{2i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{\beta \sin s}{1 - 2\beta \cos s + \beta^2} ds \\ &= -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \int_0^\pi \Phi(s) \cdot \sin ks \cdot ds, \end{aligned}$$

звідки для  $w(\beta)$  дістанемо

$$w(\beta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{\beta \sin s}{1 - 2\beta \cos s + \beta^2} ds = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \int_0^\pi \Phi(s) \sin ks ds. \quad (40)$$

Покладім тепер, що десь зовні контура  $T$  є вихор інтенсивности  $\Gamma$ . Знайдім потенціал швидкостей для течіння, що він викликає.

Нехай  $\zeta$  та точка горішнього півкола, в якій зображається розглядааний вихор.



Збудуємо дзеркальне зображення  $\zeta'$  точки  $\zeta$  відносно діаметра кола, а потім зображення точок  $\zeta$  і  $\zeta'$  відносно обводу. Всього одержимо чотири точки, в яких помістимо вихори з інтенсивностями зазначеними на рис. 13.

Комплексний потенціал, що повстає від вихора,  $\zeta$  виглядатиме так

$$w^*(\beta) = \frac{\Gamma i}{2\pi} \log \frac{(\beta - \zeta')(\beta \zeta' - 1)}{(\beta - \zeta)(\beta \zeta - 1)} \quad (41)$$

Комплексова швидкість, що повстає від  $w^*(\zeta)$  в точці  $\zeta$ , дорівнює

$$\frac{\Gamma i}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta - \zeta'} + \frac{\zeta'}{\zeta' - 1} - \frac{\zeta}{\zeta - 1} \right). \quad (42)$$

Можна дібрати  $\zeta$  так, щоб повна швидкість у точці  $\zeta$  дорівнювала нулеві, тоб-то, щоб течіння було стаціонарне.

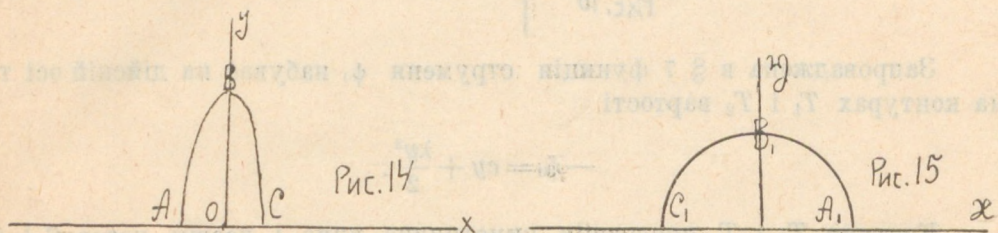
Можна далі дібрати  $\Gamma$  так, щоб швидкість у якійсь точці контура  $T$  мала певну вартість, напр., нуль, що важливо у випадкові, коли контур має кутову точку.

Для прикладу візьмим за  $T$  горішню половину еліпса:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Тут конформне зображення відбувається за допомогою функції

$$z = -\frac{1}{2} \left[ \frac{a+b}{\zeta} + (b-a)\zeta \right]$$



Отже

$$f(s) = a \sin s, \\ \Phi(s) = \frac{\lambda a^2}{4} + ca \sin s - \frac{\lambda a^2}{4} \cos 2s.$$

Підставляючи в (40) та інтегруючи, дістанемо

$$w_0(\zeta) = -ca\zeta - \frac{\lambda a^2}{\pi} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\lambda a^2}{4\pi} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2 \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \quad (43)$$

Для контурів у вигляді многокутників, а такий вигляд мають профілі будівель, розв'язок зводиться до квадратур за допомогою формули Schwarz-Christoffel'ової, що дає конформне зображення обсягу зовні многокутника на коло<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Див. E. Picard, *Traité*, II. p. 328 — 333 (1925).

H. Weber, *Op. c.* Bd. I. p. 355 — 360.

Hurwitz-Courant, *Op. c.* p. 392 — 400.

§ 8. Обтікання сильним вітром двох рівнобіжних нескінченно довгих циліндричних тіл, що лежать на поверхні землі.

Вживаючи зазначень § 7, розглянемо два нескінченно довгих циліндричних тіла, що в поперечному перерозрі дають два контури  $T_1$  і  $T_2$ , які спираються на вісь  $x$ 'ів.

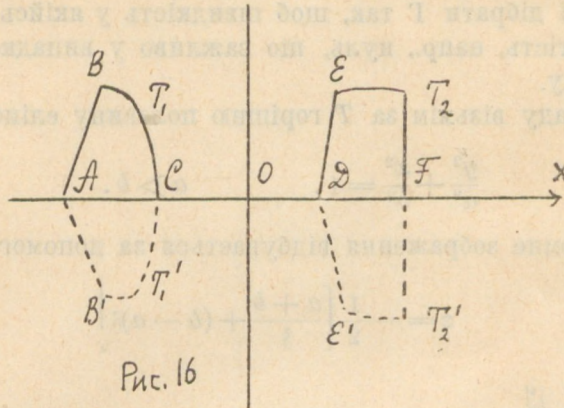


Рис. 16

Запроваджена в § 7 функція струменя  $\psi$ , набуває на дійсній осі та на контурах  $T_1$  і  $T_2$  вартості

$$-\psi_0 = cy + \frac{\lambda y^2}{2}.$$

Контури  $T_1$  і  $T_2$  продовжимо симетрично вниз і назвимо через  $S + S'$

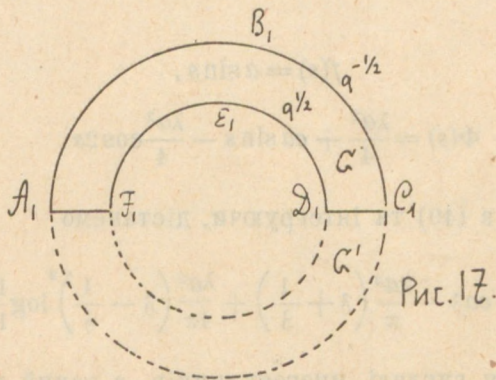


Рис. 17.

частину площини ззовні контурів  $T_1 + T_1'$  і  $T_2 + T_2'$ . Обсяг  $S + S'$  можна конформно зобразити на кільцевий обсяг  $G + G'$  обмежений обводами кола радіусів  $q^{-1/2}$  і  $q^{1/2}$  ( $q < 1$ ).

При цьому симетрія фігур дозволяє вважати, що обсяг  $S$  зобразиться на горішньому півкільці (яке ми зазначимо через  $G$ ), а нескінченно далека точка площини зобразиться в якійсь точці  $z = c$  дійсної осі.

Нехай це конформне зображення повстає за допомогою функції  $z = F(\zeta)$ .

Ми повинні знайти функцію  $\Omega$ , регулярну в середині півкільця  $G$  за вартостями, що набуває її дійсна частина на межах цього півкільця.

За Schwarz'овим принципом продовжимо  $\Omega(\zeta)$  на спіднє півкільце, покладаючи

$$\Phi_1(2\pi - s) = -\Phi_1(s), \quad \Phi_2(2\pi - s) = -\Phi_2(s),$$

де  $\Phi_1(s)$  і  $\Phi_2(s)$  є вартості  $-\phi_0$  на  $A_1B_1C_1$  і відповідно на  $D_1E_1F_1$ .

Зазначимо, що

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1(s) ds = \int_0^{2\pi} \Phi_2(s) ds = 0,$$

і умова регулярності справджується.

За формулою (11) дістанемо

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Phi_1(s) \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 \lg \zeta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) - \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 \lg \zeta}{\pi i} + \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) \right\} ds - \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Phi_2(s) \left\{ \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 \lg \zeta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) - \zeta_3 \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 \lg \zeta}{\pi i} + \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) \right\} ds + \text{Const.} \end{aligned}$$

Звідси, як легко бачити,

$$\begin{aligned} w(\zeta) = & \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Phi_1(s) \frac{p' \left( \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) ds}{p \left( \frac{\omega_1 \lg \zeta}{\pi i} + \frac{\omega_2}{2} \right) - p \left( \frac{\omega_1 s}{\pi} \right)} - \\ & - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Phi_2(s) \frac{p' \left( \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) ds}{p \left( \frac{\omega_1 \lg \zeta}{\pi i} - \frac{\omega_2}{2} \right) - p \left( \frac{\omega_1 s}{\pi} \right)} \quad (44) \\ & \left| \frac{\omega_1}{\pi} p' \left( \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) = \frac{d}{ds} p \left( \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) \right|. \end{aligned}$$

Коли контури  $T_1$  і  $T_2$  є многокутники, розв'язок доходить кінця на підставі розд. 2.

## § 9. Монопланне крило біля поверхні землі.

Розглянемо плоский рух нескінченно довгого циліндричного крила в ідеальній нестисливій рідині, припускаючи, що її обмежує площина рівнобіжна до твірної крила.

В поперечному перерезі ми дістанемо отже півплощину, обмежену простою  $L$  і контуром  $T$ .

Назв'єм цей обсяг  $S$ .

Запровадьмо абсолютні координатні осі  $xoy$  і незмінно звязані з крилом  $x_1o_1y_1$ . Ми припускаємо, що дано в функції часу  $t$  кут  $\lambda$  між  $ox$  і  $o_1x_1$  та положення рухомого початку відносно абсолютних осей.

Диференціюючи ці величини по  $t$ , дістанемо швидкості обертання та поступного руху крила

$$\Omega = \frac{d\lambda}{dt}, \quad a = a_x + ia_y = \frac{dl}{dt}.$$

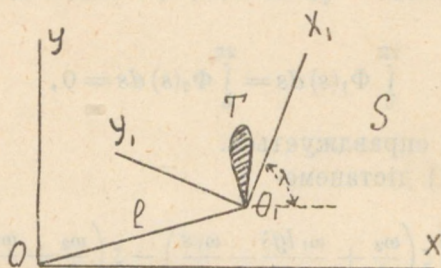


Рис. 18  $\mathcal{L}$

Між комплексовими змінними  $z = x + iy$  і  $z_1 = x_1 + iy_1$  є залежність  $z - l = e^{i\lambda} z_1$ .

Як і в § 1, запровадьмо функцію струменя абсолютного течіння та позначім її через  $\psi_1(x_1, y_1)$  в координатах незмінно звязаних з крилом і через  $\psi(x, y)$  в абсолютних координатах.

Не порушуючи загальності, можемо вважати, що вздовж осі  $x$ 'ів

$$-\psi_1(x_1, y_1) = -\psi(x, y) = 0 \quad (45)$$

На контурі крила буде

$$-\psi_1(x_1, y_1) = \frac{\Omega}{2} z_1 \bar{z}_1 + \Re \left( i z_1 \frac{d\bar{l}}{dt} \right) + c(t), \quad (46)$$

або

$$-\psi(x, y) = \frac{\Omega}{2} (z - l)(\bar{z} - \bar{l}) + \Re \left\{ i e^{-i\lambda} \frac{d\bar{l}}{dt} (z - l) \right\} + c(t),$$

де  $c$  є дійсна функція часу, що визначається з умови регулярности

$$\int_{\gamma} \psi ds = 0.$$

Збудуймо обсяг  $S'$  симетричний  $S$  відносно осі  $x$ 'ів. Обсяг  $S + S'$  можна конформно зобразити на кільце  $(q^{-1/2}, q^{1/2})$  площини комплексового змінного  $\beta$ , де  $q$  є певна функція часу.

Симетрія фігури дозволяє вважати, що обсяг  $S$  при цьому зображається на кільце  $(q^{1/2}, 1)$ , а нескінченно далека точка обсягу  $S + S'$  зображається в точці  $\beta = 1$ .

Нехай це зображення відбувається за допомогою функції  $z = f(\zeta)$ .

Покладім

$$F(\zeta) = f(\zeta) - l. \quad (47)$$

Вартість функції  $-\psi(x, y)$  на обводі кола радіуса  $q^{-1/2}$  рівна

$$\begin{aligned} -\psi(x, y) = \Phi(s) = & \frac{\Omega}{2} F(q^{-1/2} e^{is}) F(q^{-1/2} e^{-is}) + \\ & + \Re \left\{ i e^{i\lambda \frac{d\bar{l}}{dt}} F(q^{-1/2} e^{is}) \right\} + c(t). \end{aligned} \quad (46_1)$$

Ми повинні знайти функцію регулярну в обсягу  $S$  за її вартостями (45) і (46) на межах, або в обсягу  $(q^{-1/2}, 1)$  за вартостями (45) і (46\_1).

Нехай  $\Pi(\zeta)$  є шукана функція.

Продовжім її на кільце  $(1, q^{1/2})$  за Schwarz'овим принципом, покладаючи, що вздовж обвода кола радіуса  $q^{1/2}$

$$-\psi(x, y) = -\Phi(s).$$

Формула (11) дає для  $\Pi(\zeta)$  такий взір

$$\Pi(\zeta) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \left\{ \zeta \left( \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 l g \delta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) + \zeta \left( -\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_1 l g \delta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi} \right) \right\} ds.$$

Звідси

$$w(\zeta) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(s) Z_3 \left( \frac{\omega_1 l g \delta}{\pi i} - \frac{\omega_1 s}{\pi}, q^{1/2} \right) ds. \quad (48)$$

Для моноплана, що його перекрій являє простолінійний відтинок, розв'язок доходить кінця, бо для цього випадку конформне зображення повстає на підставі розд. 2.

## РОЗДІЛ 2.

### Про одну задачу теорії конформного зображення.

В цьому розділі ми розглянемо задачу визначення функції  $z = F(\zeta)$  що зображає конформно частину площини  $z$  зовні двох простих полігонів, що не перетинаються, на частину площини  $\zeta$ , обмежену двома концентричними колами.

Ця задача являє собою узагальнення відомої задачі, що розв'язали Schwarz і Christoffel.

§ 1. Вивід формули.

Зазначім через  $S$  обсяг зовні полігонів  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$ , а через  $G$  обсяг, обмежений двома концентричними колами, і назвім через  $q$  відношення їх радіусів ( $q < 1$ ).

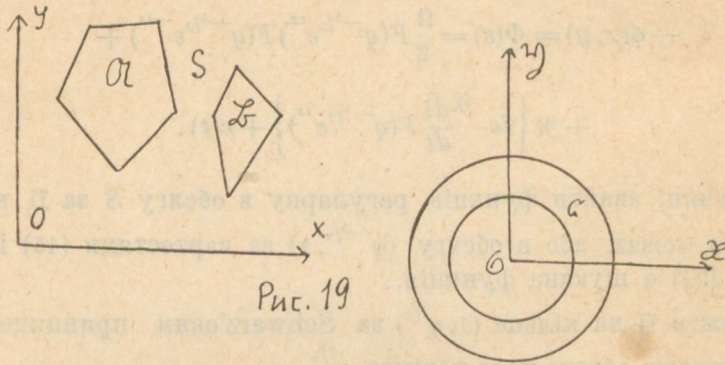


Рис. 19

Як відомо, кожному двозв'язному квазіоднолистовому обсягові (квазіоднолистовий = schlichtartiger) можна приписати певне дійсне число, що мусить бути однакове для двох таких обсягів, щоб один з них міг конформно зобразитися на другому.

За Riemann'овою термінологією двозв'язний обсяг має модуля.

Можна дібрати такий спосіб відносити модулі, коли за модуля кільцевого обсягу  $\epsilon$  відношення радіусів  $q$ . Два кільцеві обсяги з однаковим  $q$  переходять один в один за допомогою перетворення

$$\delta_1 = \alpha \delta_2.$$

Приймім тому, що обсяг  $G$  обмежений колами радіусів  $q^{-1/2}$  і  $q^{1/2}$ , і покладім, що нескінченно далека точка площини  $z$  зображається в точці  $\delta = c$  дійсної півоси  $\Re \delta > 0$  обсягу  $G$ .

Зазначім через  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_m\pi$  і  $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \dots, \beta_n\pi$  внутрішні кути многокутників  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$ , а через  $a_1, a_2, \dots, a_m$  і  $b_1, b_2, \dots, b_n$  точки обводів кола  $(q^{+1/2})$  і  $(q^{-1/2})$ , що в них зображаються вершки полігонів.

Припустім, що функцію  $z = F(\zeta)$ , яка зображає конформно  $S$  на  $G$ , знайдено, і будемо її продовжувати за Schwarz'овим принципом, будуючи дзеркальні зображення.

Ми будуємо спочатку дзеркальні зображення обсягу  $S = G_0$  відносно якоїсь сторони полігона  $\mathcal{A}$  і якоїсь сторони полігона  $\mathcal{B}$ . Дістанемо трьохлистову поверхню

$$S_1 = \Gamma_{-1} \Gamma_0 \Gamma_1,$$

кожен із листів якої матимемо по два многокутники.

Назв'їм полігон  $\mathcal{A}$  (відповідно  $\mathcal{B}$ ) листа  $\Gamma$  вільним, якщо ми одержали лист  $\Gamma$  з листа  $\Gamma_0$  за допомогою дзеркального зображення відносно якоїсь сторони многокутника  $\mathcal{B}_0$  (відповідно  $\mathcal{A}_0$ ).

Поверхня  $S_1$  має два вільних полігони, з яких один лежить на листі  $\Gamma_{-1}$ , а другий на листі  $\Gamma_1$ .

Збудуймо тепер поверхню  $S_2$ , зображуючи дзеркально трьохлистову поверхню  $S_1$  відносно будь-якої сторони вільного полігона листа  $\Gamma_{-1}$  і якоїсь сторони вільного полігона листа  $\Gamma_1$ . Ми дістанемо дев'ятилистову поверхню

$$S_2 = \Gamma_{-1} \Gamma_{-3} \Gamma_{-2} \Gamma_{-1} \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

що має знову два вільних полігони на листах  $\Gamma_{-1}$  і  $\Gamma_1$ .

Продовживши цей процес до нескінченности, ми прийдемо до поверхні з нескінченним числом листів  $S_\infty$ .

Подібно будуючи дзеркальні зображення на площині  $\mathfrak{z}$ , ми дістанемо нескінченну кількість концентричних кільцевих обсягів

$$G = G_0, G_{\pm k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Кожному з них відповідає певен лист збудованої попереду поверхні  $S_\infty$ . Зазначім, що лист  $\Gamma_k$ , коли  $k$  паристе, здобуваемо за допомогою певного обертання та трансляції листа  $\Gamma_0$ .

Відповідне кільце  $G_k$  одержується із  $G_0 = G$  через перетворення

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} q^{2k}.$$

Функція

$$\frac{dz'}{z'} = \Phi(\mathfrak{z}) d\mathfrak{z}, \quad \text{де } z' = \frac{dz}{d\mathfrak{z}},$$

при трансляції та обертанні площини  $z$  залишається незмінною, отже  $\Phi(\mathfrak{z})$  задовольняє умову

$$\Phi(\mathfrak{z} q^2) = q^{-2} \Phi(\mathfrak{z}). \quad (1)$$

З другого боку, коли ми заступимо  $\mathfrak{z}$  через  $\mathfrak{z} e^{2\pi i}$ , тоб-то зробимо обхід по замкнутому контуру в середині кільця, то ми повинні дістати попередню вартість  $z$ . Це приводить до другого рівняння

$$\Phi(\mathfrak{z} e^{2\pi i}) = \Phi(\mathfrak{z}). \quad (2)$$

Запровадьмо дійсне число  $\omega_1$  і суто уявне число  $\omega_2$  так, щоб

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} = e^{\pi i \tau}, \quad \frac{\tau}{i} > 0,$$

і покладім

$$\Phi(\mathfrak{z}) = \Psi \left( \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \mathfrak{z} \right).$$

Тоді рівняння (1) і (2) набудуть вигляду

$$\Psi\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta + 2k\omega_1\right) = \Psi\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta\right), \quad (3)$$

$$\Psi\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta + 2k\omega_2\right) = q^{-2k} \Psi\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta\right),$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Отже ми бачимо, що  $\Psi$  є двоякоперіодична функція другого роду з спеціальними чинниками<sup>1)</sup>

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \frac{1}{q^2}.$$

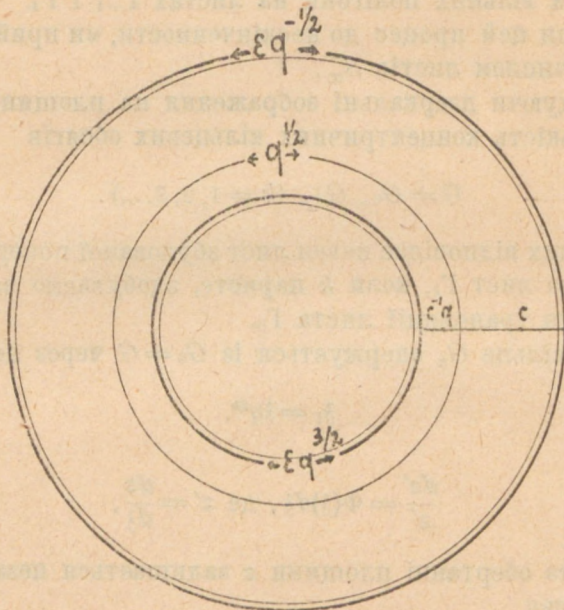


Рис. 20

Щоб на межі основного обсягу не було особливих точок, приймим за основний обсяг кільце

$$(\varepsilon q^{-1/2}, \varepsilon q^{3/2}),$$

де

$$1 < \varepsilon < q^{-1/2}.$$

Особливими точками в цьому обсягові будуть точки

$$\delta = a_1, a_2, \dots, a_m,$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n,$$

$$c,$$

$$qc^{-1}.$$

<sup>1)</sup> Див. Appel-Lacour, Fonctions elliptiques. Paris 1922. P. 376-377.

Легко бачити, що в околицях цих точок будуть такі розклади

$$z - A = (\delta - a)^2 \alpha \{ \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1(\delta - a) + \dots \},$$

$$z - B = (\delta - b)^{2-\beta} \{ \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1(\delta - b) + \dots \},$$

$$z = \frac{l_{-1}}{\delta - c} + l_0 + l_1(\delta - c) + \dots$$

$$z = \frac{s_{-1}}{\delta - qc^{-1}} + s_0 + s_1(\delta - qc^{-1}) + \dots,$$

Звідси знаходимо, що всі ці точки є прості полюси функції  $\Phi$ , яка в їх околицях виглядає

$$\Phi(\delta) = \frac{1 - \alpha}{\delta - a} + \dots$$

$$\Phi(\delta) = \frac{1 - \beta}{\delta - b} + \dots$$

$$\Phi(\delta) = -\frac{2}{\delta - c} + \dots$$

$$\Phi(\delta) = -\frac{2}{\delta - qc^{-1}} + \dots$$

Почнім тепер будувати функцію  $\Psi$ . Для цього зазначимо, що

$$\delta\Psi\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \delta\right)$$

є еліптична функція, що має прості полюси

$$a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n; c, qc^{-1}$$

в середині рівнобіжника періодичності.

Цим полюсам відповідають такі résidus

$$(1 - \alpha_1) a_1, \dots; (1 - \beta_1) b_1, \dots; -2c, -2qc^{-1}.$$

Легко бачити, що всі ці властивості посідає функція

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\delta) = \frac{\omega_1}{\pi i} \left\{ \Sigma(1 - \alpha) Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\delta}{a}\right) + \Sigma(1 - \beta) Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\delta}{b}\right) \right. \\ \left. - 2Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\delta}{c}\right) - 2Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\delta^c}{q}\right) \right\} + C, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $C$  є стала, при умові

$$\Sigma(1 - \alpha) + \Sigma(1 - \beta) = 4.$$

Ця умова виконується сама собою, бо співвідношення між кутами полігонів мають вигляд

$$\Sigma(1 - \alpha) = 2, \quad \Sigma(1 - \beta) = 2.$$

Коли-б ми взяли спочатку кільцевий обсяг  $(1, q^{-1})$ , де  $q < 1$ , то дістали-б

$$\begin{aligned} \oint \Phi(\zeta) d\zeta = & \frac{\omega_1}{\pi i} \left\{ \Sigma(1-\alpha) Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\zeta}{a}\right) + \Sigma(1-\beta) Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\zeta}{b}\right) \right. \\ & \left. - 2Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\zeta}{c}\right) - 2Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg cz\right) \right\} + C, \\ & (|a|=1, |b|=q^{-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Інтеграл  $\oint \Phi(\zeta) d\zeta$ , що визначає збільшення  $\lg z'$  при обході по замкненому контуру, повинен дорівнювати кратності  $2\pi i$ . Звідси одразу дістаємо, що  $C$  є ціле число.

Розгляньмо обсяг  $S^*$ , що нескінченно мало відрізняється від  $S$ . Йому відповідає  $q^*$  теж нескінченно мало відмінне від  $q$ . Тому  $S^*$  можна конформно зобразити на обсяг  $G^*$  нескінченно мало відмінний від  $G$ .

За відомою лемою<sup>1)</sup> і  $\Phi^*(\zeta)$  буде нескінченно мало відмінна від  $\Phi(\zeta)$ .

Звідси випливає що  $C$  є якесь число однакове для всіх двозв'язних обсягів  $S$ , які мають нескінченно далеку точку в середині.

Щоб його знайти, звернімось до формули (5) і будемо необмежено зменшувати  $q$ . При цьому полігон  $\mathfrak{B}$  стягатиметься в якусь точку  $z_0$ , якій відповідатиме точка  $\zeta = \infty$ .

Функція  $\Phi(\zeta)$  матиме в точці  $\zeta = \infty$  особливість, що її можна позбутися (hebbare Unstetigkeit). Тоді ми дістанемо зображення обсягу зовні одного полігона на коло одиничного радіуса, і наша функція  $\Phi(\zeta)$  повинна дати Schwarz'ову функцію.

Зробивши граничний перехід за допомогою формули<sup>2)</sup>

$$Z(u, \omega_2 = \infty) = \frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2\omega_1},$$

одержимо

$$\Phi(\zeta) = \frac{C}{\zeta} + \Sigma \frac{1-\alpha}{\zeta-a} - \frac{2}{\zeta-c} - \frac{2}{\zeta-\frac{1}{c}}.$$

Звідси виходить, що  $C=0$ .

Отже ми прийшли до диференціального рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \lg \frac{dz}{d\zeta} = & \frac{\omega_1}{\pi i \zeta} \left\{ \Sigma(1-\alpha) Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\zeta}{a}\right) + \Sigma(1-\beta) Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\zeta}{b}\right) \right. \\ & \left. - 2Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\zeta}{c}\right) - 2Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{cz}{q}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Див. напр., L. Bieberbach, *Moderne Funktionentheorie*, 1927, p. 13.

<sup>2)</sup> Appell-Lacour, p. 31.

Для інтегрування цього рівняння зазначимо, що

$$Z\left(\frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\lambda}{u}\right) = \frac{\pi i \lambda}{\omega_1} \frac{d}{d\lambda} \lg \vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{\lambda}{u}\right).$$

Отже

$$c_1 z + c_2 =$$

$$= \int \frac{d\lambda}{\vartheta_1^2\left(\frac{\lg \lambda - \lg c}{2\pi i}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{\lg c \lambda - \lg q}{2\pi i}\right)} \Pi \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg \lambda - \lg a}{2\pi i}\right) \right\}^{1-\alpha} \Pi \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg \lambda - \lg b}{2\pi i}\right) \right\}^{1-\beta} \quad (7)$$

### § 2. Приклад.

Як приклад<sup>1)</sup>, розглянемо обсяг  $S$ , обмежений двома протилежними боками прямокутника  $A_1 A_2 B_1 B_2$ .

В цьому разі

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

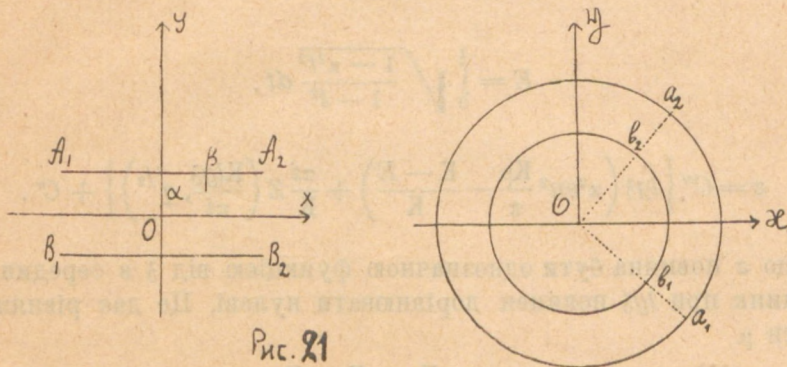


Рис. 21

і симетрія фігури дозволяє вважати, що

$$a_1 = q^{-1/2} e^{-i\pi/4}; \quad a_2 = \frac{1}{qa_1}; \quad b_1 = qa_1; \quad b_2 = \frac{1}{a_1}; \quad c = 1.$$

На підставі цього і співвідношення

$$\vartheta_1(v, q^{1/2}) = \frac{2\vartheta_1(v, q) \vartheta_0(v, q)}{\vartheta_2(0, q^{1/2})}$$

<sup>1)</sup> Пор. Н. Вебер, Die partielle Differentialgleichungen... Bd. I, 1910, p. 368. Ця задача трапляється в Helmholtz'a в статті „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen“ (Monatsberichte d. konigl. Akad. d. Wissensch, 1868) там, де описано спосіб знаходити розподіл електрики на двох рівнобіжних нескінченно довгих плоских смугах.

Остаточну формулу в Helmholtz'a, як означає Н. Вебер, подано неправильно.

формула (7) дає

$$z = C_1 \int \frac{d\delta}{\delta \vartheta_1^2 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i}, q^{1/2} \right)} \vartheta_1 \left( \frac{lg\delta - lga_1}{2\pi i}, q^{1/2} \right) \vartheta_1 \left( \frac{lg\delta + lga_1}{2\pi i}, q^{1/2} \right) + C_2.$$

З другого боку

$$\frac{\vartheta_1(v+c)\vartheta_1(v-c)}{\vartheta_1^2(v)} = A \left\{ \frac{1}{sn^2 2Kc} - \frac{1}{sn^2 2Kv} \right\},$$

де  $A$  — стала,

$$\omega_1 = K = \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}, \quad V\sqrt{x} = \frac{2(h^{1/4} + h^{3/4} + \dots)}{1 + 2h + \dots}, \quad h = q^{1/2},$$

і взір для  $z$  набуває такого вигляду

$$z = C'' \left\{ lg\delta \left( \frac{1}{sn^2 \frac{Klga_1}{\pi i}} - \frac{K-E}{K} \right) + \frac{\pi i}{K} Z \left( \frac{Klg\delta}{\pi i}, q^{1/2} \right) \right\} + C'.$$

де

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\kappa^2 t^2}{1-t^2}} dt,$$

або

$$z = C'' \left\{ lg\delta \left( \kappa^2 sn^2 \frac{K\mu}{\pi} - \frac{K-E}{K} \right) + \frac{\pi i}{K} Z \left( \frac{Klg\delta}{\pi i}, q^{1/2} \right) \right\} + C'.$$

А що  $z$  повинна бути однозначною функцією від  $\delta$  в середині кільця, то сучинник при  $lg\delta$  повинен дорівнювати нулеві. Це дає рівняння, щоб визначити  $\mu$ .

$$\kappa^2 sn^2 \frac{K\mu}{\pi} = \frac{K-E}{K}.$$

Розв'язуючи його, дістанемо

$$\mu = \frac{\pi \lambda}{K} \int \frac{dt}{V(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)} = \frac{\pi K(\lambda)}{K}, \quad \lambda = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{K-E}{K}}. \quad (8)$$

При цьому взір для  $z$  набуває вигляду

$$z = CZ \left( \frac{Klg\delta}{\pi i}, q^{1/2} \right) + C',$$

де, як легко бачити,  $C$  дійсна.

Щоб знайти сталі  $C, C'$  і  $q$ , покладім спочатку  $\delta = b_1$ , а потім

$$\delta = a_2 = \frac{1}{b_1}.$$

Одержимо два співвідношення

$$-\beta - i\alpha = CZ \left( \frac{Klg b_1}{\pi i} \right) + C',$$

$$\beta + i\alpha = -CZ \left( \frac{Klg b_1}{\pi i} \right) + C',$$

з яких випливає, що  $C' = 0$ ; рівняння ж для  $C$  і  $q$  набуває вигляду

$$-\beta - i\alpha = CZ \left( \frac{Klg b_1}{\pi i} \right),$$

або

$$-\beta - i\alpha = -CZ_3 \left( \frac{K\mu}{\pi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\pi i}{K} C.$$

Звідси

$$C = \frac{2K\alpha}{\pi},$$

$$\beta = \frac{2K\alpha}{\pi} Z_3 \left( \frac{K\mu}{\pi} \right). \quad (9)$$

Останню формулу легко привести до вигляду

$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi} \{ KE(\lambda) - EK(\lambda) \}, \quad (10)$$

де

$$E(\lambda) = \int_0^{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \kappa^2 t^2}{1 - t^2}} dt.$$

Остаточна формула для  $z$  така

$$z = \frac{2K\alpha}{\pi} Z \left( \frac{Klg \delta}{\pi i}, q^{1/2} \right). \quad (11)$$

### РОЗДІЛ 3.

#### Обчислення сил.

У розвідці проф. С. А. Чаплигіна „О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло“ розглядається довольний плоский рух нескінченно довгого циліндричного крила і обчислюється сили, що на його діють при умові постійної циркуляції.

Навсправжки ця умова не виконується, і при всякій зміні режиму від крила одриваються вихри, що одразу викликає зміну циркуляції. Однак за теорією поверхневого шару навіть при постійному режимі повстає безнастанне звільнення вихрів, так що циркуляцію можна розгля-

дати як постійну лиш пересічно за деякий перемежок часу. Не вважаючи на це, обчислювана за формулою Н. Е. Жуковського підймальна сила погоджується з експериментом.

А тому можна гадати, що не вважаючи на припущення про постійну циркуляцію, формули С. А. Чаплигіна дадуть завдовольаще погодження з експериментом принаймні для невеличких хитаннів режиму, що з ними доводиться мати до діла, досліджуючи питання стійкості.

У цьому розділі результати С. А. Чаплигіна узагальнюється на рух в трьох вимірах. Згідно з припущенням про постійність циркуляції, я роблю деякі припущення про вихрове поле зовні крила. Я гадаю, що ці припущення можна допускати при невеликих хитаннях режиму.

Вжитий в цьому розділі спосіб являє невелику зміну методи підрахунку сил, що М. Lagally подав у праці „Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben“<sup>1)</sup> для випадку постійного режиму.

### § 1. Деякі формули векторної аналізи.

Далі вживатимемо таких зазначень:

$\varphi, \psi$  — скаляр;  $\mathfrak{A} = a_x i + a_y j + a_z k, \Omega = Pi + Qj + Rk$  — вектор;

$r = xi + yj + zk$  — радіус-вектор;

$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  — скалярний добуток;

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  — векторіальний добуток;

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  — тензоріальний добуток (діада Gibbs'a), тоб-то тензор з компонентами  $a_x b_x, a_x b_y, \dots, a_z b_z$ ;

$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор Hamilton'ів;

$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi; \nabla \cdot \mathfrak{A} = \text{div } \mathfrak{A}; \nabla \times \mathfrak{A} = \text{curl } \mathfrak{A}$ .

Умовімося при перемножуванні векторів дужок не писати, коли добутки йдуть порядком: векторіальний, скалярний, тензоріальний.

$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{C})$  визначає вектор з компонентами

$$a_x(b_x c_x) + a_y(b_x c_y) + a_z(b_x c_z), a_x(b_y c_x) + a_y(b_y c_y) + a_z(b_y c_z), \dots$$

Отже

$$(1) \quad \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{B},$$

$$(2) \quad \nabla \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \nabla \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A},$$

$$(2_1) \quad \nabla \cdot (rv) = r \text{div } v + v.$$

<sup>1)</sup> Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Н. 6.

Легко перевірити формули

$$(3) \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

$$(4) \quad \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B},$$

$$(5) \quad \nabla (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \cdot \nabla \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \times \text{curl } \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \times \text{curl } \mathfrak{A},$$

$$(6) \quad \mathfrak{r} \times [\nabla \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{B})] = \nabla \cdot (\mathfrak{r} \times \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

$$(7) \quad \mathfrak{r}\mathfrak{r} \cdot \text{curl } \mathfrak{v} - \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = \nabla \cdot (\mathfrak{r}\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}),$$

$$(8) \quad \nabla \cdot (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}\Omega \times \mathfrak{r}) - \mathfrak{r} \times [\nabla (\mathfrak{v} \cdot \Omega \times \mathfrak{r})] = \Omega \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} - \mathfrak{r}\mathfrak{r} \cdot \text{curl } \mathfrak{v}),$$

при  $\text{div } \mathfrak{v} = 0$ :

$$(9) \quad \nabla (\mathfrak{v} \cdot \Omega \times \mathfrak{r}) - \nabla \cdot (\mathfrak{v}\Omega \times \mathfrak{r}) = \mathfrak{v} \times \Omega + (\Omega \times \mathfrak{r}) \times \text{curl } \mathfrak{v}.$$

Зазначім через  $J$  об'єм, обмежений замкненою поверхнею  $F$ , через  $d\tau$  і  $d\omega$  їх елементи, через  $\mathfrak{n}$  одиничний вектор в напрямі внутрішньої нормалі  $\nu$  до поверхні, так що

$$d\omega = \mathfrak{n}d\omega$$

є орієнтований елемент поверхні.

Прикладаючи основну формулу

$$\int_J \frac{\partial \phi}{\partial x} d\tau = - \int_F \phi \cos(\nu x) d\omega,$$

дістанемо

$$(10) \quad \int_J \nabla \cdot \mathfrak{v} d\tau = - \int_F \mathfrak{v} \cdot d\omega,$$

$$(11) \quad \int_J \nabla \varphi d\tau = - \int_F \varphi d\omega,$$

$$(12) \quad \int_J \nabla \times \mathfrak{v} d\tau = - \int_F d\omega \times \mathfrak{v},$$

$$(13) \quad \int_J \nabla \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) d\tau = - \int_F \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot d\omega,$$

$$(14) \quad \int_J \mathfrak{r} \times [\nabla \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{B})] d\tau = \int_J \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} d\tau - \int_F \mathfrak{r} \times \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot d\omega.$$

Подаймо ще дві формули спеціальнішого характеру, що згадуться далі:

$$(15) \quad \int_W \Omega \times (\text{curl } \mathfrak{v} \times \mathfrak{r}) d\tau = 2 \int_W \text{curl } \mathfrak{v} \times (\Omega \times \mathfrak{r}) d\tau,$$

$$(16) \quad \int_W \mathfrak{A} \times (\mathfrak{r} \times \text{curl } \mathfrak{v}) d\tau = 2 \int_W \mathfrak{r} \times (\mathfrak{A} \times \text{curl } \mathfrak{v}) d\tau,$$

де  $\Omega$  і  $\mathcal{U}$  є сталі, а інтеграція робиться по об'єму замкненої вихрової рурки ( $v$  є швидкість частинки рідини).

Ці формули залишаються в силі, коли інтегрування провадити по скінченному простору  $R$ , зовні якого  $\text{curl } v = 0$ .

Щоб довести, помітьмо, що елемент об'єму рурки можна написати у вигляді

$$d\tau = d\vec{r} \cdot d\vec{s},$$

де  $d\vec{s} = i dx + j dy + k dz$  є орієнтований елемент вихрової лінії, а  $d\vec{r}$  є орієнтований елемент перекрою елементарної рурки.

За Stokes'овою і Helmholtz'овою теоремою

$$\text{curl } v \cdot d\vec{r} = d\Gamma$$

є постійна вздовж елементарної рурки циркуляція.

Отже

$$\begin{aligned} & [\Omega \times (\text{curl } v \times r) - 2 \text{curl } v \times (\Omega \times r)] d\tau = \\ & = [\Omega \times (d\vec{s} \times r) - 2 d\vec{s} \times (\Omega \times r)] d\Gamma = \\ & = [d\vec{s}(\Omega \cdot r) - r(\Omega \cdot d\vec{s}) - 2\Omega(d\vec{s} \cdot r) + 2r(\Omega \cdot d\vec{s})] d\Gamma. \end{aligned}$$

Взір у дужках є повний диференціал, що й доводить формулу (15). Подібно доводиться і формула (16), яка зустрічається в цитованій роботі M. Lagally.

## § 2. Рівняння руху.

Розглядатимемо крило обмежених розмірів, що крім основного одностайного і прямолінійного руху (нормальний режим) творить ще додаткові змінні рухи в ідеальній нестисливій рідині.

Зазначім через  $x, y, z$  координати точки відносно прямокутних осей, незмінно звязаних з крилом (рухомі осі), через  $a_x, a_y, a_z$  ( $\mathcal{U}$ ) і через  $P, Q, R$  ( $\Omega$ ) проекції на рухомі осі абсолютної швидкості початку рухомих координат і кутові швидкості обертання крила відносно цього початку.

Для нормального режиму  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0, \Omega = 0$ .

Тоді проекції на рухомі осі абсолютної швидкості точки крила будуть

$$(17) \quad a_x + Qz - Ry, \quad a_y + Rx - Pz, \quad a_z + Py - Qx.$$

Зазначмо через  $w_x, w_y, w_z$  проекції на рухомі осі абсолютної швидкості частинки повітря.

Вони мають вартості

$$(18) \quad \begin{aligned} w_x &= a_x + Qz - Ry + \dot{x} = a_x + Qz - Ry + v_x, \\ w_y &= a_y + Rx - Pz + \dot{y} = a_y + Rx - Pz + v_y, \\ w_z &= a_z + Py - Qx + \dot{z} = a_z + Py - Qx + v_z. \end{aligned}$$

Величини  $w_x, w_y, w_z$  на нескінченності рівні нулевi. Через  $v = v_x i + v_y j + v_z k$  ми зазначаємо відносну швидкість частинки.

Зробім тепер такі основні припущення про вихрове поле абсолютного течіння:

1) вихори перебувають тільки на обмеженому віддаленні від крила,

2) в безпосередній близькості від крила вихрове поле стаціонарне і вихрові лінії спрямовані по лініях течіння відносного руху повітря.

Зазначмо через  $\varphi_0$  потенціал швидкостей в течінні рідини (що перебуває в спокої на нескінченності), викликаним одностайним рухом крила з швидкістю  $\mathcal{U}_0$ , і покладім

$$w_{0x} = v_{0x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad w_{0y} = v_{0y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad w_{0z} = v_{0z} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z},$$

де  $v_0$  є вартість вектора  $v_0$  для нормального режиму.

Помітьмо, що на нескінченності  $v_0$  стає нулем, а на поверхні крила

$$v_0 \cdot d_0 = 0.$$

З нашого припущення виходить, що поблизу крила

$$(19) \quad \begin{aligned} w_x &= v_{0x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ w_y &= v_{0y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w_z &= v_{0z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Причiм на нескінченності  $\nabla \varphi$  стає нулем, а на поверхні крила

$$(20_1) \quad \nabla \varphi \cdot d_0 = \mathcal{U} \cdot d_0 + (\Omega \times r) \cdot d_0,$$

де  $d_0$  означає орієнтований елемент поверхні крила.

З (18) і (19) випливає, що поблизу крила

$$(20) \quad v = v_0 + \nabla \varphi - \mathcal{U} - \Omega \times r = v_1 - \Omega \times r,$$

причiм

$$(21) \quad v_{1\infty} = -\mathcal{U}.$$

Знайдім проєкції на рухомі осі абсолютного прискорення частинки повітря.

За Coriolis'овою теоремою маємо для осі  $x'$ ів:

$$\begin{aligned} \dot{a}_x &- (a_y R - a_z Q) + (\dot{Q}z - R\dot{y}) - x(P^2 + Q^2 + R^2) + \\ &+ P(Px + Qy + Rz) + \dot{x} + 2(Qz - R\dot{y}). \end{aligned}$$

Звідси рівняння відносного руху повітря набуває вигляду

$$(22) \quad \frac{dv}{dt} + 2\Omega \times v + \dot{\Omega} \times r - r\Omega \cdot \Omega + \\ + \Omega\Omega \cdot r + \mathfrak{M} - \mathfrak{M} \times \Omega = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

$$\text{За (20)} \quad \text{curl } v = \text{curl } v_0 - 2\Omega,$$

і для безпосередньої близькості крила рівняння (22) дає

$$\text{grad } \chi = v \times \text{curl } v_0$$

де

$$\chi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v \cdot v + \frac{1}{2} (\Omega \cdot r)^2 - \frac{1}{2} (\Omega \cdot \Omega) (r \cdot r) + \frac{p}{\rho} + r \cdot \Omega \times \mathfrak{M}$$

(бо  $v_0$  не залежить од часу).

Згідно з припущенням 2) ми нехтуємо величиною

$$\text{curl } v_0 \times v$$

для околиці крила. Отже, поблизу крила  $\chi$  є стала, так що тиск  $p$  визначається формулою

$$(23) \quad -\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v \cdot v - \frac{1}{2} \Omega \times r \cdot \Omega \times r + r \cdot \Omega \times \mathfrak{M}.$$

Рівняння (23) легко привести до таких виглядів

$$(24) \quad -\frac{p}{\rho} = -\frac{p^*}{\rho} + v_0 \cdot v_1 - \frac{1}{2} v_0 \cdot v_0 - v_0 \cdot \Omega \times r \\ = -\frac{p^*}{\rho} + v_0 \cdot v - \frac{1}{2} v_0 \cdot v_0$$

де

$$(25) \quad -\frac{p^*}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi - \mathfrak{M} \cdot \text{grad } \varphi - \Omega \times r \cdot \text{grad } \varphi.$$

Користуючись з формул (24) і (25), можна обчислити рівнодійну  $\mathfrak{F}$  і момент відносно початку координат  $\mathfrak{M}$  сил тиску, що діють на крило.

Ці величини визначаються формулами

$$\mathfrak{F} = \int_F p d_0, \quad \mathfrak{M} = \int_F r \times p d_0,$$

де інтеграція відбувається по поверхні крила, а  $d_0$  є орієнтований в середину елемент поверхні крила.

§ 3. Обчислення  $\mathfrak{F}^*$  і  $\mathfrak{M}^*$ .

Будемо спочатку обчислювати ті частини величин  $\mathfrak{F}$  і  $\mathfrak{M}$ , що повстають від  $p^*$ , і які ми зазначимо через  $\mathfrak{F}^*$  і  $\mathfrak{M}^*$ . На підставі сказаного в попередньому § відносно  $\nabla\varphi$  ми висновуємо, що  $\varphi$  являє потенціал швидкостей абсолютного течіння повітря, викликаного рухом крила із швидкостями  $\mathfrak{U}, \Omega$ .

Величини  $\mathfrak{F}^*$  і  $\mathfrak{M}^*$  являють силу та момент в цьому течінні. За відомою теорією<sup>1)</sup> вони просто визначаються через кінетичну енергію  $T$  повітря в течінні, що визначається потенціалом швидкостей  $\varphi$ .

Ці формули мають вигляд

$$\mathfrak{F}_x^* = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial a_x} + R \frac{\partial T}{\partial a_y} - Q \frac{\partial T}{\partial a_z}, \dots$$

(26)

$$\mathfrak{M}_x^* = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial P} + a_x \frac{\partial T}{\partial a_y} - a_y \frac{\partial T}{\partial a_z} + R \frac{\partial T}{\partial Q} - Q \frac{\partial T}{\partial R}, \dots$$

Кінетична енергія  $T$  має взір

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_A \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi d\tau = \frac{1}{2} \rho \int_F \varphi \nabla\varphi \cdot d\sigma,$$

(27)

де  $A$  означає простір зовні крила.

На підставі формули (20<sub>1</sub>) цей взір набуває вигляду

$$2T = \rho \mathfrak{U} \cdot \int_F \varphi d\sigma + \rho \Omega \cdot \int_F \varphi r \times d\sigma.$$

(27<sub>1</sub>)

А що<sup>2)</sup>

$$\frac{\partial T}{\partial a_x} i + \frac{\partial T}{\partial a_y} j + \frac{\partial T}{\partial a_z} k = \rho \int_F \varphi d\sigma,$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} i + \frac{\partial T}{\partial Q} j + \frac{\partial T}{\partial R} k = \rho \int_F \varphi r \times d\sigma,$$

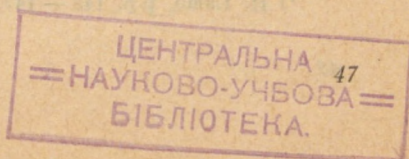
то величини  $\mathfrak{F}^*$ ,  $\mathfrak{M}^*$  можна представити ще так:

$$\mathfrak{F}^* = -\rho \frac{d}{dt} \int_F \varphi d\sigma - \rho \Omega \times \int_F \varphi d\sigma,$$

(28<sub>1</sub>)

<sup>1)</sup> Див., напр., Н. Lamb, Hydrodynamics, 1924; p.p. 154—155.

<sup>2)</sup> Н. Lamb, p. 154.



$$(28_2) \quad \mathfrak{M}^* = -\rho \frac{d}{dt} \int_F \varphi r \times d_0 - \rho \mathfrak{A} \times \int_F \varphi d_0 - \rho \int_F \Omega \times (\varphi r \times d_0).$$

Приведім взір величин  $\mathfrak{P}^*$  і  $\mathfrak{M}^*$  для крила, що має форму еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В цьому разі<sup>1)</sup>

$$2T = \frac{4}{3} \pi abc \rho (A_1 a_x^2 + B_1 a_y^2 + C_1 a_z^2 + A_2 P^2 + B_2 Q^2 + C_2 R^2),$$

де

$$A_1 = \frac{\alpha}{2 - \alpha}, \quad B_1 = \frac{\beta}{2 - \beta}, \quad C_1 = \frac{\gamma}{2 - \gamma},$$

$$A_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(b^2 - c^2)^2 (\gamma - \beta)}{2(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)(\beta - \gamma)},$$

$$B_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(c^2 - a^2)^2 (\alpha - \gamma)}{2(c^2 - a^2) + (c^2 + a^2)(\gamma - \alpha)}, \quad C_2 = \dots,$$

$$\alpha = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta}, \quad \beta = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\Delta}, \quad \gamma = \dots,$$

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}.$$

Отже

$$\mathfrak{P}_x^* = \frac{4}{3} \pi abc \rho \left( -A_1 \frac{da_x}{dt} + B_1 R a_y - C_1 Q a_z \right), \dots$$

$$\mathfrak{M}_x^* = \frac{4}{3} \pi abc \rho \left\{ -A_2 \frac{dP}{dt} + a_y a_z (B_1 - C_1) + QR (B_2 - C_2) \right\}, \dots$$

#### § 4. Обчислення $\mathfrak{P}$ .

Повна рівнодійсна сил тиску  $\mathfrak{P}$  визначається на підставі (24) формулою

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* - \rho J_1 + \frac{1}{2} \rho J_2,$$

де

$$J_1 = \int_F v_0 \cdot v d_0, \quad J_2 = \int_F v_0 \cdot v_0 d_0.$$

Зазначім через  $d_{01}$  елемент поверхні, орієнтований в бік рідини, так що на поверхні крила  $F$

$$d_{01} = -d_0.$$

<sup>1)</sup> Н. Lamb, p. 143 — 147.

Обведем крило сферою  $K$  великого радіуса  $r$ . На сфері

$$d\sigma = d\sigma_1 = -\frac{r}{r} d\omega.$$

Обчислім інтеграли  $J_1$  і  $J_2$ .

Зауважмо <sup>1)</sup> спочатку, що, не міняючи руху рідини зовні крила, можна замінити крило рідиною, що перебуває в покої за винятком тонкого поверхневого шару, де повинно прилучити якісь вихори (це є прилучені вихори Н. Е. Жуковського).

Ці прилучені вихори, вихори зовні крила та величини  $\mathfrak{M}$  і  $\Omega$  визначають в зовнішньому просторі те саме течіння, що й крило в його русі. При цьому ми припускаємо, що рідина скрізь нестислива.

Через вихори вільні та прилучені ми визначимо інтеграли  $J_1$  і  $J_2$ . Припустім, що сфера  $K$  містить у своїй середині всі вихори. Простір у середині сфери позначім через  $R$ , між  $F$  і  $K$  через  $A_1$ , простір зовні крила через  $A$  і в середині крила через  $J$ .

Радіус сфери необмежено збільшуватимемо.

До того-ж ми часто писатимемо одразу  $A$  замість  $A_1 = R - J$ , коли через це не повстають непорозуміння.

Маємо:

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_{K+F} v_0 \cdot v d\sigma_1 + \int_K v_0 \cdot v d\sigma = \int_{A_1} \nabla (v_0 \cdot v) d\tau + \int_K v_0 \cdot v d\sigma = \int_K v_0 \cdot v d\sigma + \\ &+ \int_{A_1} \nabla \cdot (v_0 v) d\tau + \int_{A_1} \nabla \cdot (v v_0) d\tau + \int_{A_1} v_0 \times \text{curl } v d\tau + \int_A v \times \text{curl } v_0 d\tau = \\ &= \int_A v_0 \times \text{curl } v d\tau + \int_A v \times \text{curl } v_0 d\tau + 2\Omega \times \int_A v_0 d\tau + \\ &+ \int_K v_0 \cdot v d\sigma_1 - \int_K v v_0 \cdot d\sigma - \int_K v_0 v \cdot d\sigma, \\ J_2 &= - \int_{F+K} v_0 \cdot v_0 d\sigma_1 + \int_K v_0 \cdot v_0 d\sigma = \int_{A_1} \nabla (v_0 \cdot v_0) d\tau + \int_K v_0 \cdot v_0 d\sigma = \\ &= 2 \int_A v_0 \times \text{curl } v_0 d\tau - 2 \int_K v_0 v_0 \cdot d\sigma + \int_K v_0 \cdot v_0 d\sigma. \end{aligned}$$

Покладаючи

$$S = \int_K v v_0 \cdot d\sigma + \int_K v_0 v \cdot d\sigma - \int_K v_0 \cdot v d\sigma - \int_K v_0 v_0 \cdot d\sigma + \frac{1}{2} \int_K v_0 \cdot v_0 d\sigma,$$

<sup>1)</sup> Див., напр., P. Appell, Traite de Mécanique Rationnelle, T. III, 1921; p. 453.

дістанемо

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* - \rho \int_A v_0 \times \text{curl} (v_1 - v_0) d\tau - \rho \int_A v \times \text{curl} v_0 d\tau - 2\rho\Omega \times \int_A v_0 d\tau + \rho S.$$

Почнім обчислювати  $S$ . Згідно з припущенням течіння на великій відстані від крила має потенціал. Можна вважати, що цей потенціал повстає від системи джерел в початку координат.

Потенціал  $k$  — кратного джерела в початку координат, як відомо, визначається формулою

$$\varphi_{-k} = A_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_{k-1}} \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial h_s} = l_s \frac{\partial}{\partial x} + m_s \frac{\partial}{\partial y} + n_s \frac{\partial}{\partial z},$$

де  $A_k$  є довільна стала, а  $l, m, n$  косинуси довільного напрямку.

Знаначаючи через  $\Phi_0$  потенціал, від якого повстає  $v_0$ , покладім згідно з сказаним

$$\Phi_0 = (\mathfrak{C} \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \dots,$$

де

$$\mathfrak{C} = e_x i + e_y j + e_z k.$$

Член  $\varphi_{-1} = \frac{A}{r}$  є відсутній, бо течіння скрізь нестисливе.

Отже на великому віддаленні

$$v_0 = (\mathfrak{C} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \dots$$

А що

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (\mathfrak{C} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{-\mathfrak{C} + 3 \frac{\mathbf{r}}{r} \mathfrak{C} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^3},$$

то на поверхні сфери  $K$

$$(29) \quad v_0 = -\frac{\mathfrak{C} - 3 \mathfrak{C} \cdot \mathbf{m}}{r^3} + \dots$$

Сталу  $\mathfrak{C}$  можна визначити через вихори<sup>1)</sup>.

Обчислім для цього двома способами інтеграл

$$j = \int_K v_0 \cdot \mathbf{r} d\sigma = \int_K r v_0 \cdot d\sigma.$$

З одного боку

$$j = - \int_R \nabla \cdot (r v_0) d\tau,$$

<sup>1)</sup> Пор. спосіб обчислення  $\mathfrak{C}$ , що вжив М. Lagally.

і на підставі (2<sub>1</sub>)

$$= - \int_R v_0 d\tau - \int_R r \operatorname{div} v_0 d\tau = - \int_{A_1} v_0 d\tau,$$

а з другого боку

$$\int_K v_0 \cdot r d\sigma = \frac{2}{r^3} \int_K \mathfrak{C} \cdot r d\sigma + \dots = - \frac{8}{3} \pi \mathfrak{C} + \varepsilon(r),$$

де  $\varepsilon(r)$  йде до нуля при  $r \rightarrow \infty$ , і ми маємо

$$(30) \quad \frac{8}{3} \pi \mathfrak{C} = \int_A v_0 d\tau.$$

З огляду на (5) і на (2)

$$\nabla(r \cdot v_0) - \nabla \cdot (rv_0) - \nabla \cdot (v_0 r) = r \times \operatorname{curl} v_0 - 3v_0,$$

а звідси легко одержати, що

$$(31) \quad \int_R r \times \operatorname{curl} v_0 d\tau = 3 \int_A v_0 d\tau.$$

Формули (30) і (31) дозволяють представити  $\mathfrak{C}$  у різних виглядах.  $v_1$  на великому віддаленні має розклад

$$(29_1) \quad v_1 = - \mathfrak{M} + (\mathfrak{C}_1 \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \dots$$

Щоб обчислити  $S$ , складім взір, який входить в нього під знаком інтегралів

$$\begin{aligned} & v v_0 \cdot d\sigma + v_0 v \cdot d\sigma - v_0 \cdot v d\sigma - v_0 v_0 \cdot d\sigma + \frac{1}{2} v_0 \cdot v_0 d\sigma = \\ & = - \frac{2}{r^3} (\Omega \times r) \mathfrak{C} \cdot d\sigma - \frac{1}{r^3} \mathfrak{C} \cdot \Omega \times r d\sigma + \varepsilon(r). \end{aligned}$$

Тому

$$S = \frac{2}{r^3} \int_K d\sigma \times \Omega \mathfrak{C} \cdot r + \frac{1}{r^3} \int_K \nabla(\mathfrak{C} \cdot \Omega \times r) d\tau = \frac{4}{3} \pi \Omega \times \mathfrak{C}.$$

Звідси на підставі (15), (30), (31)

$$(32) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}^* - \rho \int_A (v_1 + \mathfrak{M}) \times \operatorname{curl} v_0 d\tau - \rho \int_A v_0 \times \operatorname{curl} (v_1 - v_0) d\tau \\ &= \rho \int_J (\mathfrak{M} + \Omega \times r) \times \operatorname{curl} v_0 d\tau. \end{aligned}$$

### § 5. Обчислення $\mathfrak{M}$ .

Повний момент  $\mathfrak{M}$  сил тиску відносно початку координат визначається на підставі (24) формулою

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* - \rho J_1 + \frac{1}{2} \rho J_2 + \rho J_3,$$

де

$$J_1 = \int_F \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_0, \quad J_2 = \int_F \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0, \quad J_3 = \int_F \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) d\mathbf{v}_0.$$

Обчислення інтегралів  $J_1, J_2, J_3$  провадиться так само, як і в попередньому §.

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_{F+K} \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_0 = \int_{F+K} d\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 = - \int_{A_1} \nabla \times [\mathbf{r} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1] d\boldsymbol{\tau} = \\ &= \int_{A_1} \mathbf{r} \times \nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) d\boldsymbol{\tau} = \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1)] d\boldsymbol{\tau} + \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla \cdot (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0)] d\boldsymbol{\tau} + \\ &\quad + \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \times \text{curl } \mathbf{v}_1) d\boldsymbol{\tau} + \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_1 \times \text{curl } \mathbf{v}_0) d\boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= - \int_{F+K} \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0 = \int_{F+K} d\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 2 \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0)] d\boldsymbol{\tau} + \\ &\quad + 2 \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \times \text{curl } \mathbf{v}_0) d\boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= - \int_{F+K} \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) d\mathbf{v}_0 = \int_{F+K} d\mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= - \int_{A_1} \nabla \times [\mathbf{r} (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] d\boldsymbol{\tau} = \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] d\boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

Звідси на підставі (14)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}^* - \rho \int_A \mathbf{r} \times [\mathbf{v}_0 \times \text{curl } (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)] d\boldsymbol{\tau} - \rho \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_1 \times \text{curl } \mathbf{v}_0) d\boldsymbol{\tau} + \rho S + \\ &\quad + \rho \int_F \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_0 + \rho \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] d\boldsymbol{\tau}, \end{aligned}$$

де

$$S = \int_K \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_0 + \int_K \mathbf{r} \times \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{v}_0 - \int_K \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{v}_0.$$

Помічаючи, що

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_0 + \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] d\boldsymbol{\tau} &= \int_{F+K} \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{v}_0 + \\ &\quad + \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] d\boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

з огляду на (8) набуває вигляду

$$\boldsymbol{\Omega} \times \int_{A_1} (\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \text{curl } \mathbf{v}_0 - \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\boldsymbol{\tau},$$

дістанемо

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* - \rho \int_A \mathbf{r} \times [\mathbf{v}_0 \times \text{curl}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)] d\tau - \rho \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_1 \times \text{curl} \mathbf{v}_0) d\tau + \rho \Omega \times \int_{A_1} (\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \text{curl} \mathbf{v}_0 - \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\tau + \rho S.$$

Для обчислення  $S$  складім взір, що входить в  $S$  під знаком інтегралів.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{v} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{v} &= \frac{1}{r^3} \mathfrak{E} \times \mathbf{r} (-\mathfrak{A} \cdot d\mathbf{v} + \\ &+ \frac{2}{r^3} \mathfrak{E}_1 \cdot n d\omega + \dots) + (\mathfrak{A} \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \mathfrak{E}_1 \times \mathbf{r} + \dots) \frac{2}{r^3} \mathfrak{E} \cdot n d\omega - \\ - \frac{1}{r^3} \mathfrak{E} \times \mathbf{r} \frac{2}{r^3} \mathfrak{E} \cdot n d\omega + \varepsilon(r) &= \frac{2}{r^3} \mathfrak{E} \cdot n \mathfrak{A} \times \mathbf{r} d\omega - \frac{1}{r^3} \mathfrak{E} \times \mathbf{r} \mathfrak{A} \cdot d\mathbf{v} + \varepsilon(r). \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{r^3} \int_K d\mathbf{v} \times \mathfrak{E} \mathfrak{A} \cdot \mathbf{r} - \frac{2}{r^3} \int_K d\mathbf{v} \times \mathfrak{A} \mathfrak{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{2}{r^3} \int_R \nabla \times [\mathfrak{A} \mathfrak{E} \cdot \mathbf{r}] d\tau - \\ &- \frac{1}{r^3} \int_R \nabla \times [\mathfrak{E} \mathfrak{A} \cdot \mathbf{r}] d\tau = 4\pi \mathfrak{E} \times \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

На підставі одержаних формул, співвідношення

$$\int_R (\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \text{curl} \mathbf{v}_0 - \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) d\tau = 0,$$

що випливає із (7), і формули

$$\Omega \times \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \text{curl} \mathbf{v}_0 = \mathbf{r} \times [(\Omega \times \mathbf{r}) \times \text{curl} \mathbf{v}_0],$$

дістанемо

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}^* - \rho \int_A \mathbf{r} \times [\mathbf{v}_0 \times \text{curl}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)] d\tau - \rho \int_A \mathbf{r} \times [(\mathbf{v}_1 + \mathfrak{A}) \times \text{curl} \mathbf{v}_0] d\tau \\ (33) \quad &- \rho \int_j \mathbf{r} \times [(\mathfrak{A} + \Omega \times \mathbf{r}) \times \text{curl} \mathbf{v}_0] d\tau, \end{aligned}$$

тому що з огляду на (30), (31) і (16)

$$4\pi \mathfrak{E} \times \mathfrak{A} = -\frac{1}{2} \mathfrak{A} \times \int_R \mathbf{r} \times \text{curl} \mathbf{v}_0 d\tau = + \int_R \mathbf{r} \times (\mathfrak{A} \times \text{curl} \mathbf{v}_0) d\tau.$$

§ 6. Пласкорівнобіжне течіння, як граничний випадок.

Покажимо тепер, як добути з (32) і (33) формули С. А. Чаплигіна для пласкорівнобіжного течіння.

Приймімо, що циркуляція  $\Gamma$  навколо крила постійна і що течіння зовні крила скрізь на обмеженому віддаленні має потенціал.

Переходячи до двох вимірів, ми замінімо скрізь  $d\tau$  через  $d\sigma$  — елемент площі  $A$  або  $J$ ,  $r$  через  $z = x + iy$ ,  $\Omega$  через  $\omega = R$ . Зазначимо через  $q$  площу перекрою крила, через  $z_c$  центр ваги цього перекрою, через  $C$  контур перекрою, через  $w_0$ ,  $w$ ,  $w_1$  комплексові потенціали, від яких повстають  $v_0$ ,  $\nabla\varphi$ ,  $v_1$ , так що

$$v'_0 = \frac{dw_0}{dz}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{dw}{dz}, \quad v'_1 = \frac{dw_1}{dz},$$

де  $\mathfrak{A}'$  є комплексове число, супречене з  $\mathfrak{A}$ , і нехай  $\psi$  буде функція струменя для течіння з потенціалом  $\varphi$  ( $w = \varphi + i\psi$ ).

Підкреслімо, що  $w_0$  є та частина повного комплексового потенціалу, яка визначає циркуляцію.

Інтеграли, що входять в (32) і (33) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{A} \times \int_J \text{curl } v_0 d\tau &= i\mathfrak{A} \int_C dw_0 = i\mathfrak{A}\Gamma, \\ \int_J (\Omega \times r) \times \text{curl } v_0 d\tau &= \omega \int_J z \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) d\sigma = \omega \int_C z dw_0, \\ -\int_J r \times (\mathfrak{A} \times \text{curl } v_0) d\tau &= \int_J \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) (a_x x + a_y y) d\sigma = \\ &= \Re[\mathfrak{A}' \int_J \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) z d\sigma] = \Re[\mathfrak{A}' \int_C z dw_0], \end{aligned}$$

Решта інтегралів, як легко бачити, стає нулем.

Отже ми дістаємо такі формули для плаского руху:

$$(34) \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* + i\rho\mathfrak{A}\Gamma - \rho\omega \int_C z dw_0,$$

$$(35) \quad M = M^* + \rho\Re[\mathfrak{A}' \int_C z dw_0].$$

Формули (34) і (35) відрізняються тільки зазначеннями від формул (71) і (74) С. А. Чаплигіна.

Зазначім через  $\nu$  внутрішню нормаль до контура крила, а через  $ds$  елемент дуги крила.

Тоді

$$\cos \nu x = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos \nu y = \frac{dx}{ds},$$

так що для орієнтованого елемента контура дістанемо

$$d_0 = -dy + idx = idz.$$

На поверхні крила має місце (20<sub>1</sub>).

Отже на контурі

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = -a_x dy + a_y dx + \omega(xdx + ydy),$$

і можна вважати, що на контурі

$$\phi = a_x y - a_y x - \frac{\omega}{2} z z'.$$

Маємо

$$\int_F \varphi d_0 = i \int_C w dz + \int_C \phi dz = -i \int_C z dw - \mathfrak{A}q - i\omega z_c q,$$

помічаючи, що

$$\int_C w dz = -\int_C z dw,$$

бо  $w$  визначає потенціал без циркуляції.

Інтеграл (28<sub>1</sub>) і (28<sub>2</sub>) стануть такими:

$$\Omega \times \int_F \varphi d_0 = i\omega \int_F \varphi d_0 = \omega \int_C z dw - i\omega \mathfrak{A}q + \omega^2 z_c q,$$

$$\mathfrak{M} \times \int_F \varphi d_0 = -\Re [i \mathfrak{M}' \int_F \varphi d_0] = -\Re (\mathfrak{M}' \int_C z dw + \omega \mathfrak{M}' z_c q),$$

$$\int_F \varphi \times d_0 = \frac{1}{2} \int_C \varphi d(z z') = \frac{1}{2} \Re \int_C w d(z z') = -\frac{1}{2} \Re \int_C z z' dw.$$

На підставі цього

$$(36) \quad \mathfrak{P}^* = i\rho \frac{d}{dt} \int_C z dw - \rho\omega \int_C z dw + \rho q \left( \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + i\omega \mathfrak{M} \right) + \rho q z_c (i\omega - \omega^2),$$

$$(37) \quad \mathfrak{M}^* = \rho \Re \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_C z z' dw + \mathfrak{M}' \int_C z dw + \omega q z_c \mathfrak{M}' \right).$$

§ 7. Застосування до пропелера.

Розгляньмо пропелер, що має постійну кутову швидкість  $\Omega$  і постійну поступовну швидкість  $\mathfrak{U}$  та запровадьмо до його загальні формули (32) і (33).

У цьому разі течіння відносно пропелера є стаціонарне.

Зазначаючи через  $v_x, v_y, v_z(v)$  і  $w_x, w_y, w_z(w)$  проєкції на рухомі осі відносної та абсолютної швидкості частинки повітря, а через  $\varphi$  потенціал швидкостей абсолютного течіння, викликаного рухом пропелера, матимемо

$$w = \mathfrak{U} + \Omega \times r + v,$$

$$w - \nabla\varphi = v_0,$$

$$\text{curl } v_0 \times v = 0.$$

З (32) і (33) випливають наступні формули для сили і моменту

$$(38) \quad \mathfrak{P} = -\rho \int_J (\mathfrak{U} + \Omega \times r) \times (\text{curl } v + 2\Omega) d\tau - \rho \int_A w \times (\text{curl } v + 2\Omega) d\tau,$$

$$(39) \quad \mathfrak{M} = -\rho \int_J r \times [(\mathfrak{U} + \Omega \times r) \times (\text{curl } v + 2\Omega)] d\tau - \\ - \rho \int_A r \times [w \times (\text{curl } v + 2\Omega)] d\tau.$$

Перші члени цих формул відповідають теоремі Н. Е. Жуковського, а другі являють індуктивні дії вільних вихорів.

## ЗМІСТ.

	Стор.
Вступ . . . . .	193 — 201
<b>Розділ 1. Як знаходити комплексний потенціал.</b>	
§ 1. Комплексний потенціал для моноплана . . . . .	202 — 204
§ 2. Проблема Dirichlet для обсягу, обмеженого двома концент- ричними обводами кола . . . . .	205 — 207
§ 3. Комплексний потенціал без циркуляції для біплану . . . . .	207 — 209
§ 4. Комплексний потенціал при наявності циркуляцій для біплану . . . . .	209 — 212
§ 5. Приклад 1-ий . . . . .	212 — 213
§ 6. Приклад 2-ий . . . . .	213 — 216
§ 7. Обтікання дужим вітром нескінченно довгого циліндрич- ного тіла, що лежить на поверхні землі . . . . .	216 — 219
§ 8. Обтікання сильним вітром двох рівнобіжних нескінченно довгих циліндричних тіл, що лежать на поверхні землі . . . . .	220 — 221
§ 9. Монопланне крило біля поверхні землі . . . . .	221 — 223
<b>Розділ 2. Про одну завдачу теорії конформного зображення.</b>	
§ 1. Вивід формули . . . . .	224 — 229
§ 2. Приклад . . . . .	229 — 231
<b>Розділ 3. Обчислення сил.</b>	
§ 1. Деякі формули векторної аналізи . . . . .	232 — 234
§ 2. Рівняння руху . . . . .	234 — 236
§ 3. Обчислення $\mathfrak{P}^*$ і $\mathfrak{M}^*$ . . . . .	237 — 238
§ 4. Обчислення $\mathfrak{F}$ . . . . .	238 — 241
§ 5. Обчислення $\mathfrak{M}$ . . . . .	241 — 243
§ 6. Пласкорівнобіжне течіння, як граничний випадок . . . . .	244 — 245
§ 7. Застосування до пропелера . . . . .	246

ЦЕНТРАЛЬНА  
 = НАУКОВО-УЧБОВА =  
 БІБЛІОТЕКА.

ДРУКАРСЬКІ ПОМИЛКИ.

Стор.	Ряд.	Надруковано	Треба
193	16	$= P_x + iP_y$	$\mathfrak{P} = P_x + iP_y$
194	16	нулева	скінчена
208	7	$-\psi = x_y - \dots$	$-\psi = xa_y - \dots$
211	6	$\frac{A^2 \dots}{q^\beta \wp \left( \frac{lg\delta + lgc}{2\pi i} \right) \wp \left( \frac{lg\delta + lgq - lgc}{2\pi i} \right)}$	$\frac{A^2 \dots}{q^\beta \wp_0 \left( \frac{lg\delta + lgc}{2\pi i} \right) \wp_0 \left( \frac{lg\delta + lgq - lgc}{2\pi i} \right)}$
212	22	$\zeta(u, h) \frac{\eta_1}{\omega_1} u$	$\zeta(u, h) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u$
213	13	$\dots - lg \wp \left( \frac{lg\delta}{2\pi i} \right) \}$	$\dots - lg \wp_0 \left( \frac{lg\delta}{2\pi i} \right) \}$
217	11	$\dots + \frac{\lambda y^2}{2} + \psi$	$\dots + \frac{\lambda y^2}{2} + \psi_0$
217	13	$+\frac{\partial \psi}{\partial y}$	$+\frac{\partial \psi_0}{\partial y}$
217	14	$-\frac{\partial \psi}{\partial x}$	$-\frac{\partial \psi_0}{\partial x}$
217	18	$\frac{\lambda y^2}{2}$	$\frac{\lambda y^2}{2}$
218	12	$w(\delta)$	$w_0(\delta)$
223	6	$\{ ie^{i\lambda} \dots$	$\{ ie^{-i\lambda} \dots$

**В И Д А Н Н Я**  
**ФІЗИЧНО-МАТЕМАТИЧНОГО ВІДДІЛУ**  
**УКРАЇНСЬКОЇ АКАДЕМІЇ НАУК**  
**У КИЇВІ.**

**I. Записки Фізично-Математичного Відділу:**

- Том I, вип. 1 (1923), ц. 75 коп.; т. I, вип. 2 (1924), ц. 1 крб.; т. I, вип. 3 (1925)  
ц. 1 крб. 50 коп.; т. I, вип. 4 (1925), ц. 1 крб. 25 коп.  
Том II, вип. 1 (1926), ц. 3 крб. 50 к.; т. II, вип. 2 (1927), ц. 1 крб. 75 к.; т. II,  
вип. 3 (1927). Ц. 2 крб., т. II, в. 4 (друк.).

**II. Труди Фізично-Математичного Відділу:**

- Том I, вип. 1 Акад. П. Тутковський: Славчансько-Овруцький кряж та узбережжя  
ріки Славчани (1923). Ц. 60 коп.  
" " 2. Проф. М. Оглоблін: Застосування комплексних величин до теорії  
суставних ланцюгів (1924). Ц. 15 коп.  
" " 3. Проф. М. Кравчук: Про квадратичні форми та лінійні перетворення  
(1924). Ц. 75 коп.  
" " 4. Акад. П. Тутковський: Узбережжя ріки Уборти (1925). Ц. 1 крб. 50 к.  
" " 5. Б. П. Ормонт: Про електрохімічне добування оливкового арсеніту  
(1925). Ц. 40 к.  
" " 6. Акад. П. Тутковський: Узбережжя ріки Жерева (1925). Ц. 60 к.  
" " 7. Акад. П. Тутковський і проф. К. Симінський: Кам'яні будівельні  
матеріали Київщини (1925). Ц. 1 крб. 50 к.  
" " 8. Акад. П. Тутковський: Родовища залізної руди та керамічних мате-  
ріалів в Листвинському районі на Овруччині (1925). Ц. 75 к.  
" " 9. Акад. П. Тутковський: Копальні мікрофавни України, їх геологічна  
вага і методи їх дослідження. (1925). Ц. 5 крб.  
Том II, вип. 1. Акад. О. Фомін: Флора України. I. Pteridophyta (1926). Ц. 1 р. 50 к.  
" " 2. М. Шарлемань: Матеріали до орнітофавни Київщини та Волини  
(1926). Ц. 90 к.  
" " 3. М. Шарлемань: Зоогеографічні райони України (1926). Ц. 30 к.  
" " 4. Збірник праць Дніпрянської Біологічної станції, під керівництвом  
проф. Д. Белінга, в. 1 (1926). Ц. 2 крб. 25 коп.  
" " 5. Збірник праць Біологічного Інституту ім. Хв. Омельченка, під керу-  
ванням акад. І. Шмальгавзена В. 1 (1926). Ц. 2 крб. 75 к.  
Том III, вип. 1. Ак. М. Павлова: Кладовище вісток потретинних ссавців на лівому березі  
Волги між Сентилеєм та с. Новодівочим. I. Camellidae (1926). Ц. 75 к.  
" " 2. Акад. М. Крилов: Про різні узагальнення Ritz'ової методи та ме-  
тоду найменших квадратів для наближеного інтегрування рівнянь  
математичної фізики (1926). Ц. 75 к.  
" " 3. Акад. М. Крилов і М. Боголюбов: Про Rayleigh'ів принцип в теорії  
диференціальних рівнянь математичної фізики та про одну Ейле-  
рову методу в варіаційнім численні (1926). Ц. 50 к.  
" " 4. Проф. М. Лебедев: Про порівняння російського Карбону з Карбоном  
інших країн (1926). Ц. 60 к.  
" " 5. С. Парамонов: Матеріали до монографії роду Bombyllus L (1926).  
Ц. 1 крб. 50 к.  
" " 6. Акад. М. Крилов: Про наближене розв'язування лінійних інтеграль-  
них рівнянь (1926). Ц. 65 к.

- Том III, вип. 7. Збірник праць Дніпрянської Біологічної станції, під керуванням проф. Д. Белінга, в. 2 (1927). Ц. 2 крб. 50 к.
- Том IV, вип. 1. Акад. В. Шапошніков: Про вогкість текстильної сировини (1926). Ц. 70 к.
- ” ” 2. Збірник праць Зоологічного Музею вип. 1 (1926). Ц. 1 крб. 50 к.
- ” ” 3. Збірник праць Інституту Технічної Механіки. Під керув. проф. К. Симінського (1926). В. 1. Ц. 1 крб. 65 к.
- ” ” 4. Збірник праць Зоологічного Музею, вип. 2 (1927). Ц. 1 крб. 50 коп.
- ” ” 5. Акад. В. Плотников та М. Вендецький. Електрохімія розчинів алюмінійного броміду в нітробензолі (1927). Ц. 60 к.
- ” ” 6. П. Балабай. Вудова та функція забрового апарату міноги (1927). Ц. 80 к.
- Том V, вип. 1. Акад. Д. Граве та Ю. Соколов: Про рух перигелія Меркурія (1926). Ц. 40 к.
- ” ” 2. Проф. М. Кравчук: Про спосіб М. Крилова в теорії наближеної інтеграції диференціальних рівнянь (1926). Ц. 65 к.
- ” ” 3. М. Куренський: Про інтегрування диференціальних рівнянь з частковими похідними при багатьох залежних змінних (1927). Ц. 1 крб. 75 к.
- ” ” 4. Акад. М. Кащенко: Огляд діяльності Київського Акліматизаційного Саду у відділі лікарських рослин (1927). Ц. 2 крб.
- ” ” 5. Збірник праць Інституту Технічної Механіки. Під керув. проф. К. Симінського, в. 2 (1927). Ц. 2 крб. 75 коп.
- Том VI, вип. 1. Збірник праць Біологічного Інституту ім. Хв. Омельченка, під кер. акад. І. Шмальгавена, в. 2 (друкується).
- Том VII, вип. 1. Збірник праць Зоологічного Музею, в. 3 (1927). Ц. 2 крб. 25 к.
- ” ” ” 2. Н. Ахієзер. Аеродинамічні досліді (1928). Ц. 95 коп.
- ” ” ” 3. Проф. В. Правдич-Немінський. Про реакцію крові (друк.).
- ” ” ” 4. Збірник праць Інституту Технічної Механіки. Під керув. проф. К. Симінського, в. 3. (1928) (друкується).
- Том VIII, вип. 1. Проф. В. Бурксер. Солоні озера України (закінч. друком).

Державні установи та товариства, котрі вдаються безпосередньо до Академії Наук (Київ, вул. Короленка [кол. Володимирська] 54, тел. 14—26), мають на академічних виданнях 35% знижки. Інший склад видань — „Книгоспілка“, Київ, вул. Короленка № 46.

Ціна 95 коп.

