ANALYSE
DES ÉQUATIONS.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
IMPRIMEURS DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

ANALYSE

DES

ÉQUATIONS DÉTERMINÉES.

PAR M. FOURIER,

DE L'INSTITUT ROYAL DE FRANCE, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, ETC.

PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

1831.

AVERTISSEMENT

DE L'ÉDITEUR.

L'IMPRESSION de cet ouvrage était à peine commencée lorsque la mort a frappé l'auteur, qui avait entièrement consacré aux sciences les dernières années de sa vie. Il a pu jeter les yeux sur les quatre premières feuilles, mais aucun ordre pour le tirage n'avait encore été donné. M. Fourier avait formé le projet de publier ses travaux sur l'analyse algébrique en deux parties, dont l'une devait comprendre l'Introduction, un Exposé général du sujet, et les deux premiers livres. La deuxième partie, comprenant les cinq derniers livres, aurait été imprimée dans le cours de l'année suivante. En jetant un premier coup d'œil sur les papiers qui nous ont été remis, il nous avait paru que la rédaction de la première partie était entièrement achevée, et qu'il ne restait plus qu'à livrer le manuscrit à l'impression. Mais un examen plus attentif a fait reconnaître qu'il manquait au second livre les détails annoncés dans les n^os 2 et 19, et qui ont pour objet d'apprendre à régler les calculs d'approximation des racines de manière à n'effectuer que des opérations nécessaires, et à ne déterminer jamais que des chiffres exacts. L'auteur avait seulement commencé, sur deux feuillets séparés, la rédaction de cet article. Cette rédaction a été complétée avec l'aide d'anciens manuscrits, et l'on y a ajouté comme exemple le calcul de l'approximation de la racine de l'équation $x^3-2x-5=0$, que l'on a portée facilement jusqu'à la 32^e décimale. Cette addition a été intercalée dans le deuxième livre, à la place que l'ordre des matières indiquait : elle commence à l'article 24 et finit à l'article 30 inclusivement. Tout le reste de l'ouvrage a été imprimé conformément à la rédaction préparée par l'auteur. Les légers changements, en fort petit nombre, qu'exigeait l'exactitude ne méritent pas d'être mentionnés.

A l'égard des livres suivants le travail n'en est pas à beaucoup près aussi avancé. Les matériaux existent à la vérité en grande partie, et l'Exposé synoptique que l'on publie aujourd'hui fait connaître d'une manière générale le sujet de l'ouvrage et l'ordre que l'on se proposait de suivre. Cet ouvrage peut donc être en quelque sorte restitué, et les recherches qui devaient en former le sujet ne seront point perdues pour les progrès des sciences. Mais quelques soins que l'on puisse y apporter, il manquera toujours aux parties à la rédaction desquelles l'auteur n'aura pas mis lui-même la dernière main, sans parler du mérite du style, cet intérêt qu'un esprit supérieur répand toujours sur un sujet dont il s'est occupé pendant tout le cours de sa vie, et qu'il a approfondi par de longues méditations.

L'examen des questions qu'il était nécessaire de résoudre pour perfectionner l'analyse algébrique sont un des premiers objets qui aient occupé M. Fourier. Les travaux de Viete, d'Harriot, de Descartes, de Newton, et ceux même des grands géomètres qui ont brillé dans le dernier siècle, avaient laissé imparfaite ce qu'on peut nommer la partie pratique de l'algèbre, c'est-à-dire les procédés au moyen desquels on distinguerait avec promptitude et sûreté la nature des racines d'une équation, et l'on en obtiendrait une évaluation numérique exacte ou très-approchée. Les difficultés les plus importantes sont aujourd'hui complétement résolues. Au moyen des propositions nouvelles qui ont été découvertes par M. Fourier, on peut employer avec sûreté les diverses méthodes d'approximation proposées pour le calcul des racines, et ces méthodes ont reçu tout le développement et la perfection qui étaient à désirer. Nous n'entrerons ici dans aucun détail à ce sujet. La PRÉFACE, l'INTRODUCTION et l'EXPOSÉ SYNOPTIQUE, apprendront au lecteur, mieux que nous ne pourrions le faire, la nature et l'étendue de ces recherches, quel est l'esprit dans lequel elles ont été entreprises, et sous quel aspect l'auteur a considéré l'analyse algébrique. Mais nous nous proposons de faire connaître, au moyen des documents certains que nous avons sous les yeux, les diverses époques auxquelles les principaux résultats qui sont exposés dans cet ouvrage ont été obtenus et mis au jour.

Le plus ancien de ces documents est une copie d'un mémoire intitulé *Recherches sur l'algèbre*. Cette copie est incomplète : il ne reste que les vingt-huit premières pages. L'écrivain avait laissé en blanc, dans plusieurs endroits, la place des signes algébriques qui ont été en partie écrits par M. Fourier. La dernière feuille porte l'attestation suivante, donnée par une personne qui est vivante, et dont l'exactitude et la véracité ne peuvent être suspectes.

« Je soussigné, ancien professeur de mathématiques et de physique au collége d'Auxerre, certifie que ce mémoire sur l'algèbre, composé de quatorze feuillets que j'ai cotés et paraphés, est écrit (les notes et corrections exceptées) de la main de M. Bonard, ancien professeur de mathématiques à l'école royale militaire d'Auxerre, décédé en 1819; qu'à mon retour de l'école Normale en 1795, il me le montra, en me parlant avec admiration de son auteur M. Fourier, son ancien élève, qui professait alors l'analyse à l'école Polytechnique, et qui l'avait composé, me dit-il, étant à peine âgé de dix-huit ans; et il ajouta qu'une copie plus soignée de cet écrit avait été envoyée à Paris en 1787. Auxerre, le 26 mars 1826. Signé Roux. » La signature de M. Roux est légalisée par M. le maire d'Auxerre.

Nous donnons un extrait de la partie de ce mémoire qui a été conservée.

Article I^er^. L'auteur remarque que les équations du premier degré sont résolues par la division numérique ou littérale, les équations binomes par les extractions de racines, et que s'il existe une méthode générale pour la résolution des équations, elle doit être analogue à ces opérations qui n'en seraient que des cas particuliers.

II. Imperfection des méthodes connues.

III. Examen des méthodes particulières des 2^e^, 3^e^ et 4^e^ degrés. On se propose dans la résolution des équations du 3^e^ et du 4^e^ degré d'exprimer chacune des racines par une suite de radicaux, afin de n'avoir plus qu'à évaluer ces expressions selon les valeurs particulières des coefficients de l'équation donnée; en sorte que tout l'artifice consiste à exprimer les racines de l'équation par certaines fonctions des racines d'équations binomes qui sont censées résolues. On remarque à ce sujet 1° que cet artifice n'est d'aucun usage pour les équations littérales, si ce n'est pour celles du 2^e^ degré, et qu'ainsi si l'on peut trouver une méthode générale pour résoudre ces équations, il faut pour atteindre ce but suivre une route différente; 2° qu'à l'égard des équations numériques, pour que la solution en soit complète, il faut, indépendamment de la solution de ces équations, pouvoir évaluer chacun des radicaux qui composent l'expression des racines : or on peut prouver que cette évaluation suppose la résolution de certaines classes d'équations non moins composées que celle qu'on veut résoudre, et ceci a lieu même dans le 2^e^ degré que l'on regarde comme entièrement résolu. L'auteur entre dans les détails nécessaires pour justifier cette assertion. Il remarque par exemple que l'extraction de la racine carrée du nombre 12345678 suppose la résolution des quatre équations suivantes, $x^2-12=0$, $x^2+60x-334=0$, $x^2+700x-956=0$, et $x^2+7020x-25578=0$, dont la première seule est binome, et qui sont telles que, résolues à moins d'une unité près, une racine de chacune est un chiffre de la racine cherchée. De plus si l'on voulait appliquer la méthode du 2^e degré à l'une de ces équations, on serait conduit à résoudre d'abord toutes celles qui la précèdent, puis elle-même. Cette remarque s'étend à tous les degrés, et en général une simple extraction de racine numérique suppose la résolution d'autant d'équations du même degré qu'il doit y avoir de chiffres à la racine : la première seulement de ces équations est binome, les autres ont tous leurs termes ; et leur racine, qu'il faut obtenir à moins d'une unité près, est un chiffre de la racine cherchée. La nature de ces équations est telle qu'il suffit pour les résoudre de faire l'essai des neuf premiers nombres.

IV. En ayant égard aux remarques précédentes, à l'inconvénient des cas irréductibles, qui se présenteraient sans doute dans tous les degrés, aux expressions incommensurables, tandis que les racines ne le sont pas, à la complication des expressions et à la difficulté extrême de résoudre tous les degrés de la même manière, enfin à ce que les formules ne s'appliquent pas aux équations littérales, on est porté à croire que ces moyens sont indirects, et que l'on peut leur en substituer de plus simples et de plus généraux. L'auteur a donc considéré la résolution des équations sous un point de vue différent des méthodes ordinaires, en regardant la résolution des équations numériques de tous les degrés comme une opération arithmétique absolument de la même nature que les extractions de racines, et la résolution des équations littérales comme une question semblable dans tous ses points aux extractions algébriques des racines littérales. Il termine cet article par ces deux remarques : 1° que dans la résolution des équations littérales on doit supposer celle des équations numériques ; 2° que pour trouver un chiffre quelconque d'une racine d'une équation numérique on ne peut se dispenser d'éprouver successivement la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 9.

Les articles V^e et suivants sont consacrés à la résolution des équations littérales. Nous indiquons seulement ici les sommaires de ces articles qui contiennent l'énoncé des principales règles, sans démonstration.

V. Remarques préliminaires.

VI. Règle pour connaître successivement les premiers termes des racines.

VII. (Le contenu de cet article est effacé.)

VIII. Règle pour connaître le second terme d'une racine dont on connaît le premier.

IX. Règle pour connaître un terme quelconque d'une racine dont on connaît le terme précédent.

X. Réflexions sur la méthode précédente.

XI. Applications de la méthode précédente.

XII. Extraction d'une racine carrée.

XIII. Équations indéterminées dans lesquelles on suppose l'une des variables infinie ou infiniment petite.

La suite du manuscrit traite de la résolution des équations numériques.

L'article XIV contient des remarques sur le théorème de Descartes. L'auteur avance que l'énoncé de ce théorème n'est point borné au seul cas où l'équation a toutes ses racines réelles, et il se propose d'établir deux vérités nouvelles. La première consiste en ce que le théorème dont il s'agit doit être entendu de la manière suivante : « 1° Quelles que soient les racines d'une équation dont aucun des coefficients n'est zéro, elle ne peut avoir plus de racines positives que de changements de signe, et plus de racines négatives que de permanences. S'il y a moins de racines positives que de variations, et moins de racines négatives que de permanences, celles qui manquent sont imaginaires, en sorte que si l'équation a toutes ses racines réelles, il y a autant de racines positives que de variations de signe, et autant de négatives que de permanences. 2° Il ne peut manquer qu'un nombre pair de racines positives et un nombre pair de racines négatives, en sorte qu'une équation qui aurait un nombre impair de permanences ou un nombre impair de variations, aurait dans le premier cas au moins une racine réelle négative et dans le second au moins une racine réelle positive. »

XV. La seconde vérité que l'auteur entreprend d'établir est purement historique : elle consiste en ce que Descartes a connu au moins la première partie de la proposition précédente. Cette assertion est justifiée en montrant que l'on doit attribuer aux expressions employées par ce grand géomètre un sens différent de celui que De Gua leur a prêté.

XVI. L'auteur pense que l'on ne doit pas supposer, comme l'insinue De Gua, que Descartes n'ait trouvé son théorème que par induction. En effet il est possible de déduire de la composition des équations une démonstration purement algébrique de ce théorème.

XVII. Cet article est employé à développer cette démonstration. Elle consiste à prouver que si l'on considère un produit quelconque formé par la multiplication de plusieurs facteurs imaginaires trinomes, et réels binomes positifs ou négatifs, et que l'on multiplie ce produit par un nouveau facteur positif, ou par un nouveau facteur négatif, la multiplication introduira dans le premier cas au moins une variation de signe de plus, et dans le second cas au moins une permanence de plus; d'où il suit qu'une équation a au moins autant de variations de signe que de racines positives, et au moins autant de permanences de signe que de racines négatives; ou bien, conformément à l'énoncé de Descartes, qu'*il peut y avoir* dans *chaque* équation autant de racines réelles positives qu'il y a de variations, et autant de racines réelles négatives qu'il y a de permanences de signes.

XVIII. L'auteur explique la formation d'une courbe parabolique dont la description fait connaître la nature des racines d'une équation. On considère l'inconnue x comme une abscisse, et le premier membre de l'équation comme exprimant la valeur d'une ordonnée correspondante y. Les points d'intersection de la courbe avec l'axe donnent les racines réelles positives ou négatives. Il y a toujours au moins autant de racines réelles que la courbe coupe de fois son axe. L'auteur dit *au moins* parce qu'il peut arriver que quelques-unes de ces racines coïncident en un point multiple. Si le nombre de ces racines égales entre elles est pair, la courbe touche son axe en donnant de part et d'autre du point de contact des ordonnées de même signe; dans le cas contraire la courbe coupera son axe en donnant des ordonnées de signe différent de part et d'autre du point d'intersection. Lorsque la courbe s'approchant de son axe ne parvient pas à le couper, il y a un point de minimum : dans ce cas deux racines sont imaginaires. Il peut arriver aussi que plusieurs racines soient imaginaires sans qu'il y ait dans ces points autre chose qu'une inflexion, ou même sans que la courbure de la ligne parabolique soit altérée par aucune singularité.

XIX. Cet article indique la manière d'appliquer la considération des courbes dont il s'agit à la théorie des équations. $y = x^m + p\,x^{m-1} +$ etc. étant l'équation d'une courbe parabolique, on suppose que cette équation ayant été différentiée, on en ait tiré successivement les expressions de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et enfin celle de $\frac{d^my}{dx^m}$ qui sera toujours une constante. Chacun de ces rapports étant regardé comme l'ordonnée d'une courbe dont les abscisses sont les mêmes que celles de l'équation proposée, on imagine que toutes ces courbes sont décrites sur les mêmes axes, en ayant un point commun pour l'origine des abscisses. Cela posé, il existera entre trois quelconques de ces courbes, pourvu qu'elles soient consécutives, les relations suivantes. 1° Les ordonnées croîtront ou diminueront en faisant croître l'abscisse correspondante selon qu'à cette même abscisse répondra dans la seconde courbe une ordonnée positive ou négative. Si cette ordonnée de la seconde courbe est zéro, il y aura au point correspondant de la première un maximum ou un minimum, ou, pour parler plus exactement, la tangente sera parallèle aux abscisses. 2° En un point quelconque de la première courbe, la ligne sera convexe ou concave selon que le point correspondant de la troisième appartiendra à une ordonnée positive ou à une ordonnée négative. Si cette dernière ordonnée est zéro, le point considéré de la première courbe est un point d'inflexion visible ou invisible. Ces principes sont d'une application féconde dans la question présente, parce qu'en vertu de la dépendance réciproque des courbes on peut juger facilement des propriétés de la première courbe en décrivant successivement toutes les autres en commençant par les moins composées.

XX. L'auteur montre que les considérations précédentes font connaître complètement la nature des racines d'une équation du 3^e degré qu'il a prise pour exemple.

XXI. Il remarque que dans cette équation la suite des signes des coefficients est telle que la nature des racines est entièrement déterminée, mais qu'il peut arriver, et ce sont les cas les plus fréquents, que cette suite de signes ne soit pas suffisante. On peut être incertain, par exemple, si deux racines sont réelles ou imaginaires, parce que l'on ignore si la courbe coupera son axe ou si elle feindra seulement de le couper. Il faudrait pour faire cette distinction employer non-seulement les signes, mais les valeurs des coefficients, ce qui supposerait la résolution des équations, qui est l'objet même de la recherche. On rencontre d'ailleurs des cas, et c'est alors que l'on doit employer la méthode précédente, où certains coefficients étant égaux à zéro, la nature des racines est entièrement connue.

XXII. On remarque que, pour la description de chacune des courbes successives, on ne fait usage que de son ordonnée correspondante à l'origine des abscisses; que cette ordonnée est toujours le produit d'un des coefficients de l'équation par un facteur numérique positif introduit par la différentiation; enfin que l'on n'emploie que le signe de ce coefficient. D'après cela on se propose cette question : Étant donnée la suite des signes des coefficients d'une équation, trouver dans tous les cas quelle est ou quelle peut être la nature des racines. On décrira donc successivement toutes les courbes, au moyen des deux principes qui ont été énoncés précédemment, en commençant par la plus simple, et la dernière indiquera par ses points d'intersection avec l'axe le nombre des racines, soit existantes, soit possibles. En effet dans la description de plusieurs courbes on ignorera si deux racines doivent être faites réelles ou imaginaires; mais dans ce cas il faut toujours les supposer réelles, afin de connaître le plus grand nombre possible des racines. Au reste il sera toujours facile, par les mêmes moyens, de trouver de quelle manière l'imaginarité des racines de quelques courbes précédentes peut influer sur la nature des racines de la dernière courbe.

XXIII. La solution de la question précédente donne lieu à plusieurs applications. On en déduit immédiatement la démonstration de la première partie du théorème de Descartes, en premier lieu pour le cas où l'équation proposée n'a pas de racines imaginaires, puis pour toutes les équations. La seconde partie du théorème de Descartes est évidente dans tous les cas où aucun des coefficients n'est zéro. Dans ce dernier cas on trouvera facilement la troisième partie. Lorsqu'il manquera quelques termes dans une équation on appliquera le théorème de Descartes de la manière suivante : si le nombre des termes qui manquent est pair, on comparera seulement les deux termes subsistants séparés par ceux qu'on suppose évanouis, et la combinaison qu'on trouvera entre eux indiquera une seule racine, toutes les autres étant imaginaires; si le nombre des termes évanouis est impair, on comparera seulement les termes subsistants qu'ils séparent. Si ces deux termes font une permanence, on n'en conclura aucune racine; s'ils font une variation on en conclura deux racines, l'une positive, l'autre négative. En appliquant la règle précédente on parviendra aux propositions connues sur les équations binomes et trinomes.

XXIV. L'objet de cet article est la recherche des limites des racines d'une équation, recherche qui se réduit toujours à la solution du problème suivant : Deux nombres étant proposés, trouver combien l'équation a de racines entre ces deux nombres. Les principes précédents peuvent être appliqués de la manière suivante à la recherche dont il s'agit. Supposons qu'on ait reconnu qu'une équation peut avoir cinq racines positives, et qu'on demande combien elle peut avoir de racines entre o et un nombre positif, comme 10. Substituant dans la proposée $x+10$, on diminuera chaque racine de 10 unités. Admettons maintenant que la transformée ne puisse plus avoir que deux racines positives : on en conclura qu'il peut y avoir trois des racines positives de la proposée entre o et 10. On dit « qu'il peut y avoir », parce qu'il peut arriver que quelques-unes de ces racines soient imaginaires, mais elles seront toujours en nombre pair. Ainsi dans l'exemple cité deux des racines entre o et 10 peuvent être imaginaires, mais il y en a au moins une qui est réelle. En disant que deux racines peuvent devenir imaginaires entre o et 10, on ne prétend pas d'ailleurs donner des limites aux racines imaginaires, mais énoncer seulement que si ces racines existent elles se trouvent entre o et 10. Au reste il est facile de voir que les racines qui seraient imaginaires ne peuvent être limitées que deux à deux, quatre à quatre, et ainsi de suite. En général si le nombre des racines comprises entre deux limites est pair, on ignore si ces racines sont réelles ou imaginaires; mais si ce nombre est impair, on est assuré qu'entre ces limites il se trouve au moins une racine réelle. Par conséquent pour qu'il n'y ait plus aucun doute sur la nature des racines, il faut ou que chacune d'elles se trouve entre deux limites, ou que, par un moyen quelconque, on soit assuré si celles qu'on ne peut limiter ainsi sont réelles ou imaginaires. En effet, quoique deux racines se trouvent toutes deux entre deux limites très-rapprochées, on n'en peut pas conclure qu'elles soient imaginaires, parce qu'on est toujours censé ignorer si en resserrant ces limites on ne parviendrait pas à séparer les racines. Il faut donc un caractère auquel on puisse reconnaître l'imaginarité de ces racines, et c'est le défaut de ce caractère qui rend entièrement défectueuse la méthode des cascades. On trouvera deux moyens de s'assurer de l'imaginarité des racines. Au reste cette dernière recherche, en y procédant directement, est peut-être ce qu'il y a de plus difficile dans la question présente. L'auteur termine cet article en annonçant qu'il va passer aux règles pour la résolution des équations numériques, par lesquelles il se propose de trouver les valeurs exactes des racines commensurables, les valeurs des racines irrationnelles aussi approchées qu'on le voudra, enfin de discerner celles des racines qui sont imaginaires. Si ces règles sont bien conçues il faut qu'elles tiennent lieu de la division numérique, de l'extraction des racines de tous les degrés, et surtout qu'elles ne puissent manquer de conduire au but dans tous les cas imaginables. Il suffit d'ailleurs de donner des règles pour les racines positives, parce que les négatives peuvent facilement être rendues positives.

XXV. Cet article est intitulé: Règle pour connaître le nombre de chiffres d'une racine quelconque et le premier de ces chiffres. Nous le copions textuellement. « On substituera $x+1$ à la place de l'inconnue en observant de commencer la substitution par les plus hautes puissances de x, de disposer verticalement toutes les parties de chacun des coefficients numériques, de ne faire aucune réduction dans ces coefficients, enfin d'indiquer par des zéros celles des parties des coefficients qui manqueraient dans quelques cas particuliers. Toutes ces particularités étant observées, lorsqu'il s'agira de substituer dans la proposée pour l'inconnue $x+$ un terme numérique que je représente par N, on procédera ainsi à cette substitution. Dans la transformée par $x+1$ on multipliera par N la première partie d'un coefficient de x; réduisant le produit avec la même partie du même coefficient, on multipliera le résultat par N. On continuera ainsi d'opérer sur le résultat en le multipliant par la troisième partie et multipliant le résultat par N jusqu'à ce qu'on ait fait la réduction de la dernière partie, auquel cas le résultat de cette réduction sera le coefficient numérique qui, dans la transformée par $x+N$, doit accompagner la puissance de x dont on vient de considérer le coefficient. Par ce moyen on formera la table suivante. On écrira les nombres 0, 1, 10, 100, en les disposant verticalement. A côté de chacun de ces nombres on écrira les signes seulement des termes des transformées par $x+0$, $x+1$, $x+10$, $x+100$, etc., en continuant cette opération jusqu'à ce qu'une des transformées n'ait que des signes positifs, ce qui ne peut jamais manquer d'arriver. Alors entre deux des nombres 0, 1, 10, 100, etc. il y aura autant de racines possibles que la transformée par le premier nombre aura de variations de plus que la transformée par le second. On connaîtra donc le nombre des chiffres qui composent l'expression de chacune des racines. Je suppose présentement que l'une des racines ait été trouvée avoir trois chiffres : pour en connaître le premier on écrira les nombres 200, 300, 400, etc., à côté desquels on rangera les signes des transformées donnés par chacun de ces nombres; puis on jugera par la combinaison des signes quels sont les deux nombres consécutifs entre lesquels se trouve la racine cherchée, c'est-à-dire qu'on déterminera le premier chiffre de la racine. »

XXVI. L'intitulé de cet article est : Règle pour trouver un chiffre quelconque d'une racine dont on connaît le chiffre précédent. Nous en donnons encore la copie textuelle. « On suppose que dans l'exemple précédent on ait connu que la racine se trouve entre 600 et 700, auquel cas son premier chiffre est 6. On cherchera la transformée par $x+600$, qu'on a déja calculée, puis appliquant à cette équation la règle précédente, on trouvera le premier chiffre de la racine qui n'est composee que de deux chiffres. Ce premier chiffre sera le second de la racine demandée. Connaissant ce second chiffre, que je suppose 4, dans la transformée par $x+40$, qu'on aura calculée précédemment, on cherchera le premier chiffre d'une racine qui ait moins de deux chiffres : ce premier chiffre sera le troisième cherché. En général on observera la règle suivante. On choisira la transformée donnée par la substitution de x plus la partie de la racine qui vient d'être découverte. On cherchera par les règles précédentes le premier chiffre de celle de toutes ses racines qui aura le moins de chiffres : ce premier chiffre sera celui qui dans la racine demandée suit ceux que l'on connaît déja. Si plusieurs racines de cette transformée doivent avoir un même moindre nombre de chiffres, on pourrait choisir celle qu'on voudrait de ces racines. On continuera d'appliquer ces règles jusqu'à ce qu'on ait trouvé tous les chiffres de la racine, auquel cas, si la valeur est entière, on ne pourra manquer de la connaître. Si la racine est incommensurable on cherchera par les mêmes principes autant de chiffres décimaux qu'on le jugera nécessaire. »

XXVII. L'auteur remarque qu'en appliquant la méthode précédente, si deux ou plusieurs racines doivent avoir quelques-uns de leurs premiers chiffres communs, on trouvera ces premiers chiffres multiples. Si deux racines devaient être imaginaires on trouverait par cette méthode une suite de chiffres doubles pour l'expression de ces racines. Par conséquent si dans la recherche des racines on en trouve deux ou un plus grand nombre qui soient incommensurables, et en même temps telles que les chiffres des unités entières et d'approximation soient multiples doubles, par exemple, on sera dans l'incertitude sur la nature de ces racines, c'est-à-dire si elles sont égales et incommensurables, inégales et incommensurables, ou bien imaginaires. A la vérité il est facile de s'assurer par les méthodes connues si le premier cas a lieu, mais on ne peut distinguer les deux autres. Il manque donc ici un caractère auquel on puisse reconnaître si les deux racines sont imaginaires. La question consiste, dans le cas où deux racines seraient exprimées par plusieurs chiffres communs à l'une et à l'autre, à trouver si ces deux racines sont inégales ou si elles sont imaginaires.

XXVIII. Cet article est intitulé : Première Solution de la question précédente. Cette solution consiste à chercher une quantité moindre que la plus petite différence de deux racines de la proposée. On substitue $x+y$ à la place de x dans la proposée, puis on élimine x entre la transformée qui en résulte et la proposée elle-même. L'équation finale en y est du degré m^2 : elle aura m racines égales à zéro, et par conséquent sera, en divisant par y autant de fois qu'il sera nécessaire, du degré

$m(m-1)$. Tous les termes pairs manqueront toujours. Ainsi faisant $y^2 = z$, l'équation en z sera du degré $\frac{m(m-1)}{2}$. Dans cette dernière équation on cherchera par les règles précédentes une quantité plus petite que la plus petite racine positive, c'est-à-dire une quantité telle que la transformée que donnerait la substitution de z plus cette quantité ait les mêmes signes que l'équation en z, ou au moins qu'elle ait le même nombre de variations. Soit d cette quantité : $\sqrt{d}$ sera plus petite que la plus petite racine positive de l'équation en y. On approchera des racines dont il s'agit jusqu'à ce qu'elles ne puissent différer que d'une quantité plus petite que $\sqrt{d}$. Si en faisant cette approximation ces racines se séparent, elles sont réelles. Si, cette approximation faite, elles sont encore exprimées par les mêmes chiffres, elles sont imaginaires si leur nombre est pair, et dans le cas contraire une seule d'entre elles est réelle.

XXIX. L'auteur remarque « que cet artifice peut faire reconnaître les racines égales; qu'on peut aussi s'en servir pour reconnaître si une équation proposée a ou n'a pas toutes ses racines réelles, et que c'est pour cet usage même qu'il a été imaginé. Toutes choses étant comme dans l'article qui précède, si l'équation en z a toutes ses racines positives, ou, ce qui revient au même, si ses termes ont alternativement les signes $+$ et $-$, la proposée n'a pas de racines imaginaires, et réciproquement. On peut aussi par ce moyen connaître dans bien des cas le nombre des racines imaginaires. Au reste tous les cas possibles sont prévus dans l'énoncé des règles précédentes. On trouvera dans les applications qui suivent des moyens plus directs et plus faciles pour découvrir l'imaginarité des racines. On se contentera de les appliquer à quelques exemples qui suffisent pour faire voir qu'ils sont généraux, et qu'il ne leur manque que d'être mis en ordre et réduits à une pratique facile. »

XXX. Cet article est le dernier de la partie du manuscrit qui a été conservée. Le discours est interrompu à la fin du 14^e feuillet ou de la 28^e page, et sur cette dernière page, aussi bien que sur une partie de l'avant-dernière, les intervalles laissés en blanc par l'écrivain pour y placer les lettres et signes algébriques n'ont point été remplis. Les figures indiquées dans le texte n'existent pas non plus. Nous rapporterons ici le premier et le dernier des exemples donnés par l'auteur. Étant proposée l'équation

$$x^3 - 51x^2 + 524x + 2760 = 0,$$

on connaît d'abord que cette équation ne peut avoir que deux racines positives et une négative. La racine négative est sûrement réelle; mais les deux positives pourraient être imaginaires. Pour trouver les racines positives on opérera comme il suit. Substituant $x+1$ au lieu de x, on aura la transformée suivante.

$$\begin{array}{rrrr} x^3 + & 3x^2 + & 3x + & 1 \\ & -51 & -102 & +\ 51 \\ & & +524 & +\ 524 \\ & & & +2760. \end{array}$$

Appliquant les règles prescrites, on formera la table suivante,

0..............	+	—	+	+
1..............	+	—	+	+
10..............	+	—	—	+
100..............	+	+	+	+.

On connaît à l'inspection de cette table que les deux racines ne sont ni entre 0 et 1, ni entre 1 et 10, mais qu'elles se trouvent toutes deux entre 10 et 100; qu'ainsi chacune d'elles est exprimée par deux chiffres. Pour trouver la plus petite de ces deux racines on formera par une pratique extrêmement facile la table qui suit.

20.........	+	+	—	+
30.........	+	+	+	—
40.........	+	+	+	+.

Cette table fait connaître que la première racine est entre 20 et 30, et la seconde entre 30 et 40. Ainsi 2 est le premier chiffre de l'une et 3 est le premier chiffre de l'autre. Pour trouver le second chiffre de la première on substituera dans la proposée $x+20$ à la place de x, et l'on trouvera

$$x^3+9x^2-316x+840=0,$$

équation dans laquelle le premier chiffre d'une racine exprimée par un seul chiffre sera le second demandé. Faisant dans cette équation $x=x+1$, on aura

$$\begin{array}{rrrr} x^3 + & 3x^2 + & 3x + & 1 \\ & +9 & +\ 18 & +\ 9 \\ & & -316 & -316 \\ & & & +840 \end{array}$$

et d'après cela

0.........	+	+	—	+
1.........	+	+	—	+
2.........	+	+	—	+
3.........	+	+	—	0

3 étant donc la racine de la proposée exprimée par un seul chiffre, est le second de la racine cherchée qui est par conséquent 23. On pourrait de même trouver la seconde racine, qui est incommensurable, en cherchant son second chiffre, puis autant de chiffres décimaux qu'on voudra l'exiger. Le dernier exemple présenté par l'auteur est l'équation

$$x^3 - 5x + 6 = 0,$$

qui a sûrement une racine réelle négative, et peut avoir deux racines positives. L'auteur cherche d'abord la racine négative, dont le premier chiffre est -2. Quant aux deux racines positives, il procède de cette manière. Substituant $x+1$ à la place x, il a en premier lieu

$$\begin{array}{llll} x^3 & +3x^2 & +3x & +1 \\ & +0 & +0 & +0 \\ & & -5 & -5 \\ & & & +6; \end{array}$$

il forme ensuite le tableau

0.........	+	0	—	—
1.........	+	+	—	+
10.........	+	+	+	+;

puis le tableau

1.........	+	+	—	+
2.........	+	+	+	+.

Les deux racines se trouvent entre 1 et 2, et l'on peut soupçonner qu'elles sont imaginaires. L'auteur reconnaît en premier lieu que les deux racines sont effectivement imaginaires, en formant l'équation au carré des différences, au moyen de laquelle on voit d'abord que la proposée ne doit pas avoir toutes ses racines réelles, et de plus que l'unité est plus petite que la moindre différence des racines de la proposée, d'où il résulte que les racines cherchées sont nécessairement imaginaires, puisqu'elles seraient comprises entre 1 et 2. Il ajoute ensuite les remarques suivantes, que nous copierons textuellement. « On peut s'assurer de cette imaginarité d'une autre manière, et on va donner une idée de cette seconde méthode, qui est plus directe et plus expéditive que la précédente, en l'appliquant à ce dernier exemple. Si en effet on y applique les principes précédents, en décrivant les courbes qui précèdent celle qui doit représenter les racines de la proposée, on ne trouvera rien d'indéterminé. Mais à l'égard de cette dernière on ignorera si dans la description la courbe atteindra on n'atteindra pas la partie positive de l'axe; car pour la partie négative il n'y a aucun doute. Dans le premier cas, que représente la 5^e figure, les deux racines sont réelles et positives; dans le second (fig. 6^e) ces deux racines manquent à l'équation. La question est de trouver lequel de ces deux cas a lieu. Pour cela je place dans les deux figures les axes désignés par les chiffres et , de manière que le premier donne par ses intersections avec toutes les courbes la suite donnée par la substitution de et que le second donne la suite . Alors je remarque que si la figure 5^e doit avoir lieu, c'est-à-dire si les racines doivent être réelles, la sous-tangente de la dernière courbe au point où l'axe des ordonnées coupe celui des abscisses ne peut atteindre la première des racines. J'observe que dans le cas de la 6^e figure il est possible que cette sous-tangente qui répond à l'axe conduise au-delà du minimum, c'est-à-dire que l'axe placé à son extrémité peut donner la suite . Que conclura-t-on donc de cette remarque dans le cas présent? qu'il faut calculer la sous-tangente qui répond à l'axe , examiner si l'axe placé à son extrémité donne la suite des signes . Dans ce cas on est assuré que les deux racines cherchées sont imaginaires. Si cet axe donne encore deux variations, il restera encore le même doute sur la nature des racines. Que faudra-t-il donc faire alors? calculer un nouveau chiffre pour les deux racines. Si ce chiffre est encore commun on réitérera l'examen de la sous-tangente, et on continuera ainsi jusqu'à ce que les deux racines se séparent, ou que la sous-tangente en indique l'imaginarité: car il est impossible, si les deux racines ne sont pas égales, que l'un de ces cas n'arrive pas. Or dans tous les cas, en se servant de la méthode des courbes, il ne peut y avoir de doutes que sur la nature de deux racines. Ainsi on peut toujours employer l'artifice précédent, qui, comme on va le voir, est d'une pratique très-facile. L'expression de la sous-tangente est . Dans le cas présent, c'est-à-dire au point où répond l'axe , l'ordonnée est , et la tangente ou l'ordonnée de la courbe précédente est , comme l'indique la transformée par qui est . Ainsi la sous-tangente qui répond à l'abscisse est , qui étant retranché de cette abscisse donne pour l'abscisse qui répond à l'axe . Or la substitution de apprend que cet axe ne donne aucune variation. Donc les racines cherchées sont imaginaires. Je pourrais appliquer ce même artifice à beaucoup d'autres exemples : celui-là suffit pour prouver qu'il est général. Ce même moyen renferme la méthode d'approximation de , quoiqu'il paraisse en différer beaucoup. On voit delà que dans certains cas cette méthode d'approximation peut ne pas conduire au but. »

Il est évident que le nom omis dans cette dernière phrase est celui de Newton, et il ne serait pas moins facile de suppléer à toutes les autres lacunes : mais cela n'est nullement nécessaire, puisqu'il ne peut exister aucune incertitude sur le sens de l'article. Nous avons cru devoir donner un extrait étendu de cet ancien manuscrit parce qu'il est intéressant de voir sous quelle forme l'auteur avait d'abord présenté ses recherches, et parce qu'on y reconnaît que dès cette époque M. Fourier était en possession des parties les plus importantes de l'ouvrage que nous publions aujourd'hui : la résolution des équations littérales, la séparation des racines des équations numériques, et la distinction des deux cas où il existe entre deux limites très-voisines ou un couple de racines imaginaires, ou deux racines réelles presque égales, distinction fondée sur le tracé de la tangente menée par le point de la courbe correspondant à l'une des limites, et la comparaison de la valeur de la sous-tangente à la différence des deux limites.

Ces premières recherches ont été présentées à l'ancienne Académie des sciences. Il en est fait mention en ces termes dans le plumitif, séance du 9 décembre 1789. « M. Fourier a commencé la lecture d'un Mémoire sur les équations algébriques. MM. Monge, Legendre et Cousin. » On ne trouve aucune autre indication relative à ce travail dans les plumitifs des années suivantes.

Le second manuscrit que nous devons faire connaître est un programme ou résumé général du cours d'analyse fait par M. Fourier à l'école Polytechnique. Cet ouvrage, composé de neuf feuilles, avait été conservé dans les papiers de l'auteur. Il ne portait aucune signature ; mais des recherches faites dans ces dernières années ont constaté qu'il est écrit de la main de M. Dinet. Il suffira de citer le passage suivant.

« Il ne peut y avoir dans une équation numérique plus de racines réelles positives qu'il n'y a dans la suite de ses termes de changements de signes, ni plus de racines négatives que de permanences de signes. »

« Si le nombre des changements de signe est impair, il se trouve dans l'équation au moins une racine réelle positive. Il y a au moins une racine réelle négative si le nombre des permanences est impair, conformément à l'article..... »

« Si dans les fonctions X, X', X'', etc. données par la différentiation d'une équation $X=0$, on substitue successivement deux nombres a et b, de même signe, et que l'on forme les deux suites des signes de ces résultats, l'excèdant du nombre des changements de signe de la suite qui répond au plus grand nombre b sur le nombre des changements de signe de la suite qui répond au nombre a indique le plus grand nombre des racines qui peuvent être comprises entre a et b, en sorte qu'il ne peut jamais y en avoir plus entre ces deux limites. »

« Si l'une ou l'autre des substitutions précédentes réduit à zéro quelques-unes des fonctions X, X', X'', etc., on pourra donner le signe $+$ ou le signe $-$ au terme qui s'évanouit. Si on choisit d'abord les signes propres à donner le plus grand nombre possible de changements de signe, puis ceux qui en donnent le moindre nombre possible, et que ces deux nombres diffèrent, il y aura dans l'équation au moins autant de racines imaginaires qu'il y a d'unités dans cette différence. »

Voici maintenant l'attestation consignée par M. Dinet à la suite du manuscrit. « Ces feuilles, au nombre de neuf, m'ont été présentées par M. Fourier : j'ai reconnu qu'elles avaient été écrites par moi en 1797, dans les derniers mois que j'ai passés à l'école Polytechnique. Mon but en les écrivant était de me former un tableau succinct des leçons que j'avais reçues de M. Fourier à l'école Polytechnique, afin de me préparer à subir l'examen pour l'admission au corps des élèves ingénieurs constructeurs de vaisseau. J'avais fait le même travail sur les leçons de mécanique données par M. de Prony. En sorte qu'il est constant que la suite des propositions dont l'énoncé est inscrit dans ces feuilles a été développée par M. Fourier pendant les années 1796 et 1797. En rédigeant cette déclaration j'ai paraphé ces neuf feuilles au recto et au verso. A Paris, le 5 avril 1830. » Signé Dinet.

Le troisième manuscrit qui se trouve dans nos mains est intitulé : « Mémoire sur les limites des racines des équations algébriques. » Ce Mémoire contient une exposition détaillée des parties les plus importantes des livres I et II du présent ouvrage. Il suffira de citer l'attestation par laquelle il est terminé.

« Le présent mémoire composé de vingt-six pages a été écrit dans le courant de l'année 1804. M. Fourier, préfet du département de l'Isère, nous donna connaissance dans cette même année de divers théorèmes sur la résolution des équations algébriques et nous en communiqua les démonstrations. Le premier était textuellement énoncé comme il suit. Étant donné une équation numérique $\varphi x = 0$ d'un degré m, si dans le premier membre φx et dans les m fonctions $\varphi' x$, $\varphi'' x$, $\varphi''' x$, etc. que l'on déduit de la première par des différentiations successives, on substitue deux nombres différents a et b, que l'on observe pour chacune de ces deux limites combien la suite des $m+1$ résultats provenant de la substitution contient de variations de signes, on connaîtra combien l'équation proposée peut avoir de racines entre les deux limites substituées. »

« L'équation $\varphi x = 0$ ne peut avoir plus de racines entre a et b qu'il n'y a d'unités de différence entre le nombre A des variations de signe de la suite qui répond à la moindre limite a, et le nombre B des variations de signe qui répond à la plus grande limite b. »

« Si l'équation n'a point entre a et b autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans la différence A — B, celles qui manquent sont en nombre pair, et correspondent à un pareil nombre de racines imaginaires dans la proposée $\varphi x = 0$. »

« Le second théorème contenait une règle importante qui dispense de recourir à la formation de l'équation au carré des différences, et sert à distinguer promptement avec certitude les racines réelles des racines imaginaires dans les équations numériques de tous les degrés. »

« Les autres remarques qui nous furent communiquées ont pour objet, 1° de diriger par des règles certaines l'application de la méthode d'approximation de Newton, 2° l'emploi des séries récurrentes pour trouver toutes les racines tant réelles qu'imaginaires et les diviseurs de tous les degrés dans les équations numériques. »

« Désirant conserver les principaux éléments de cette nouvelle théorie des équations, nous rédigeâmes du consentement de M. Fourier un nombre assez considérable de notes qui contenaient les démonstrations et les vues principales. »

« Le présent écrit fut achevé le premier. Nous concourûmes tous les deux à sa rédaction ; il a été écrit de la main de Chabert l'un de nous, et nous déclarons qu'il n'y a été fait aucun changement depuis 1804. »

« Nous avons rédigé avec plus de soin plusieurs autres notes sur le même objet dans le cours des années suivantes 1805 et 1806, et nous n'avons cessé d'engager M. Fourier depuis l'année 1804 jusqu'aujourd'hui à publier ses découvertes sur la théorie des équations algébriques. »

Signés Chabert, doyen de la faculté des sciences de l'Académie de Grenoble; Bret, professeur à la faculté des sciences de l'Académie de Grenoble.

« Et en outre, moi, soussigné Bret, professeur à la faculté des sciences de l'Académie de Grenoble, déclare qu'il est à ma parfaite connaissance que dans les premiers mois de l'an 1803 M. Fourier expliqua publiquement à l'école Polytechnique les deux théorèmes ci-dessus rappelés, savoir 1° celui qui fait connaître le plus grand nombre de racines qu'une équation puisse avoir entre deux nombres donnés, 2° la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires. J'étais alors élève de l'école Polytechnique (*). Je me souviens très-distinctement que, sur la demande d'un des élèves, M. Fourier voulut bien donner quelques développements sur ce second objet, et qu'il se servit d'une construction fort élégante pour rendre sensible la vérité de cette démonstration. »

« Et pour que les faits ci-dessus énoncés demeurent constants nous avons redigé et signé la présente déclaration que nous affirmons sur notre honneur être véritable. Grenoble, ce 15 mars 1812.

Signés Bret; Chabert.

« (*) Dans la seconde division, et j'assistai avec tous les élèves à cette explication donnée par M. Fourier. Je rédigeai au sortir de la séance la démonstration du 1er théorème. »

« Quant à la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires, elle nous fut publiquement communiquée avec la démonstration dans la même séance à l'École polytechnique. »

« Le présent est écrit de ma main, ainsi que la déclaration précédente dont il fait partie. »

Signé Bret, professeur de mathématiques transcendantes à la faculté des sciences.

Les deux citations précédentes établissent avec certitude que M. Fourier a exposé dans les cours de l'école Polytechnique, avant et après l'époque de l'expédition d'Égypte, les principales propositions qui servent de base à ses méthodes de résolution des équations numériques.

L'auteur a fait mention de ces recherches dans son Mémoire sur la statique qui a été imprimé en l'an 6 (1797) dans le 5e cahier du Journal de l'école Polytechnique. On lit, page 46, « Nous avons dessein de publier dans ce recueil une suite de mémoires contenant des recherches nouvelles sur la théorie des équations. On se propose de reprendre dans son entier le problème de la résolution générale des équations... »

Les recherches dont il s'agit ont été également communiquées par l'auteur pendant le cours de l'expédition d'Égypte, soit dans la conversation, soit par des écrits présentés à l'Institut du Caire. Nous n'avons pas été à même de consulter les archives de cet Institut, mais nous trouvons dans la Décade égyptienne diverses indications des Mémoires lus par M. Fourier.

« 26 fructidor an 6. Mémoire sur la résolution générale des équations algébriques. »

« 1er jour complémentaire an 6. Sur une roue à vent destinée à l'arrosage. »

« 16 frimaire an 7. Mémoire de mécanique générale. »

« 16 pluviose an 7. Recherches sur les méthodes d'élimination. »

« 11 messidor an 7. Mémoire contenant la démonstration d'un nouveau principe d'algèbre. »

Nous avons sous les yeux des écrits de la main de M. Fourier, qui ne portent à la vérité aucune date, ni aucune attestation étrangère, mais qui néanmoins doivent être regardés comme étant certainement, ou les Mémoires mêmes lus à l'Institut du Caire, ou du moins les minutes de ces Mémoires conservées par l'auteur. Les sujets traités dans ces écrits, qui se rapportent exactement aux indications précédentes, et la nature du papier et de l'encre qui prouvent qu'ils ont été faits en Égypte, ne laissent aucun doute à cet égard. Le dernier contient la démonstration très-développée du théorème principal relatif à la distinction des limites des racines réelles au moyen de la considération des signes donnés par la substitution d'une suite de nombres dans les fonctions dérivées.

Nous possédons également plusieurs notes très-étendues, dont une partie est écrite de la main de M. Chabert, et qui sont évidemment les notes mentionnées dans l'attestation précédente. Les propositions relatives à la distinction et au calcul des racines qui sont exposées dans les *deux premiers livres du présent ouvrage y sont développées fort en* détail. Il y a des exemples d'application de ces méthodes à diverses équations, pour lesquelles on a construit et discuté la suite des courbes données par les équations dérivées. La plupart des feuilles portent de la main de M. Chabert et de la même écriture que le texte, la date de divers mois de l'an 12.

Le passage suivant d'une lettre adressée par M. Poisson à M. Fourier, et portant la date du 24 avril 1807, confirme la vérité des faits que nous énonçons ici..... « Un docteur en médecine vient de publier un ouvrage sur la résolution numérique des équations..... Le docteur a entrevu votre théorème sur les changements de signes; il a de fortes raisons de penser qu'il a lieu dans les cas des racines imaginaires; j'en ai une bien plus forte que toutes les siennes, puisque vous m'avez dit autrefois que vous aviez une démonstration générale de cette proposition. Vous devriez bien publier au moins les différents théorèmes sur lesquels est fondée votre méthode pour résoudre les équations...... »

Enfin nous citerons presque en entier une lettre qui nous a été adressée par M. Corancez.

« Monsieur, avant son départ pour l'Égypte, M. Fourier était en possession du théorème qui fait la base de ses méthodes, et qui sert à déterminer la limite du nombre des racines d'une équation *algébrique* qui sont comprises entre deux nombres pris à volonté. C'est le même théorème dont M. B. a fait depuis tant d'usage dans son Mémoire publié en 1806 ou 1807. Fourier l'avait publié dans ses cours à l'école Polytechnique avant 1797, comme peuvent l'attester Girard, et tous les ingénieurs et élèves de l'école qui le suivirent en Égypte, et qui y parlaient de cette découverte comme d'une chose connue. »

« Ce n'est qu'en Égypte que j'eus connaissance de ce théorème que Fourier me communiqua, et dont il m'a souvent parlé sans m'indiquer comment il y était parvenu. J'en trouvai une démonstration que je lui ai communiquée depuis lors, à notre retour en France, sur le brick anglais *Good Design* où nous étions compagnons de captivité. M. Fourier approuva cette démonstration, comme celle qui se présente le plus naturellement. Mais elle a l'inconvénient de laisser de l'incertitude sur le passage des racines imaginaires. Dans sa démonstration Fourier a remédié à cet inconvénient. Il ne m'a au surplus communiqué cette démonstration que d'une manière trop générale pour que je puisse en parler. »

« J'avais inséré ma démonstration dans un Mémoire sur les séries qui expriment les racines ou fonctions de racines d'une équation. Dans ce Mémoire, que j'ai redigé à Alep, je reconnais, comme de raison, que le théorème était dû à M. Fourier. C'est ce qui l'engagea, il y a deux ans, à me demander ce Mémoire. La déclaration qu'il contient est sans doute celle qu'il désigne dans le passage que vous me citez. Ce Mémoire, resté chez Fourier, doit se retrouver dans ses papiers. C'est un cahier cartonné petit in-12, et portant la date d'Alep, an XII ou an XIII. »

« Il est certain que M. Fourier a lu un Mémoire sur les équations à l'Institut du Caire. C'était, autant que je puis m'en fier à ma mémoire, un précis de l'esprit et des résultats de ses méthodes, mais sans aucun détail de calcul. Vous en trouverez certainement mention faite dans la Décade égyptienne et dans le Courrier du Caire. »

« J'ajouterai qu'en Égypte Fourier était déja en possession de sa méthode d'approcher de la vraie valeur des racines au moyen des fractions continues, méthode dont il appuyait l'examen et la démonstration sur l'inclinaison des tangentes dans les courbes paraboliques. Fort antérieurement à cette époque, lorsqu'il commença à Auxerre à s'occuper de la théorie des équations, Fourier m'a souvent dit qu'il s'était longtemps amusé à décrire graphiquement la proposée et toutes ses dérivées en donnant à chaque courbe des couleurs différentes pour les distinguer et en suivre le cours. »

Asnières, 2 février 1831. *Signé* CORANCEZ.

Nous indiquerons maintenant les divers écrits relatifs à l'analyse algébrique qui ont été publiés ou présentés à l'Académie des sciences par M. Fourier depuis son retour à Paris en 1815.

Le Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris, année 1818, contient un article intitulé : « Question d'analyse algébrique », dans lequel sont exposés sommairement les divers principes et règles d'après lesquels on doit se guider en faisant usage de la méthode d'approximation des racines due à Newton, lorsque l'on connaît d'ailleurs deux limites qui comprennent entre elles une racine réelle.

On trouve dans le même Bulletin pour l'année 1820 deux autres articles intitulés : « Usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines, page 156, et Seconde partie de la Note relative aux limites des racines, page 181. » Les théorèmes relatifs à la séparation des racines, et à la distinction des cas où deux racines sont réelles ou imaginaires par le calcul des sous-tangentes, ont été publiés pour la première fois dans ces deux articles par la voie de l'impression. On a vu d'ailleurs non-seulement que l'auteur était en possession de ces théorèmes bien antérieurement à cette époque, mais qu'il les avait exposés publiquement dans les cours de l'école Polytechnique avant le départ et après le retour de l'expédition d'Égypte. Le mérite d'une découverte appartient à celui qui la fait connaître le premier : la publication par la voie de l'impression n'est pas le seul moyen de faire connaître des propositions nouvelles : il en existe plusieurs autres, tels que le dépôt authentique d'un manuscrit, ou l'exposition de ces propositions dans des leçons publiques. Ce dernier moyen exige à la vérité que cette exposition soit prouvée par le témoignage des auditeurs. Nous produisons ici plusieurs témoignages dus à des personnes tout-à-fait désintéressées, et dont la véracité ne peut assurément être suspecte. Les droits de l'auteur à la découverte des propositions dont il s'agit antérieurement à l'année 1797 sont donc établis d'une manière incontestable.

M. Fourier a présenté à l'Académie des sciences, le 14 janvier 1822, des Recherches sur l'analyse algébrique. Ce travail se composait de trois manuscrits. Le premier, sur lequel l'auteur a mis à l'encre rouge un nouveau titre et la date du 14 janvier 1822, est un exposé général des principaux résultats relatifs à la résolution des équations numériques ou littérales : il est écrit de la main de M. André Raynaud, ancien employé de la préfecture du département de l'Isère, qui en a paraphé toutes les pages, et a mis sur la dernière un attestation constatant que cette copie a été faite dans le mois de novembre 1807. Le second manuscrit est un exposé détaillé des recherches relatives à l'application des séries récurrentes à la résolution des équations algébriques : une partie des feuilles est écrite de la main de M. Fourier, une autre partie de la main de M. Chabert. Ces feuilles portent chacune les dates des mois de ventose et de floréal an 12. M. Fourier a effacé ces dates à l'encre rouge, et mis à la fin sa signature avec la nouvelle date du 14 janvier 1822. Le troisième manuscrit est un exposé succinct des résultats développés dans le précédent. La présentation de ces recherches est mentionnée dans l'analyse de travaux de l'Académie pendant l'année 1821 : les principaux points sont indiqués, et particulièrement les propositions relatives à l'application des séries récurrentes qui formeront le sujet du VI^e livre du présent ouvrage.

Le 10 et le 17 novembre 1823 ont été présentées la première et la seconde partie d'un Mémoire d'analyse indéterminée sur le calcul des conditions d'inégalité. L'objet de ce mémoire est exposé dans l'Analyse des travaux de l'Académie pendant l'année 1823, page 29 et suivantes. L'auteur indique diverses applications à des questions qui appartiennent à la mécanique ou à l'analyse générale, et particulièrement celle qui se rapporte à l'usage des équations de condition lorsque l'on se propose de trouver les valeurs des inconnues qui rendent la plus grande erreur, abstraction faite du signe, la moindre possible. Cette dernière application est développée plus complètement dans l'Analyse des travaux de l'Académie pendant l'année 1824, page 38.

Le 3 janvier 1827, M. Fourier a présenté un Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux fonctions appelées transcendantes et spécialement aux questions de ce genre qui appartiennent à la théorie de la chaleur. Ce Mémoire a été inséré par extrait dans le Bulletin des sciences de la Société philomatique pour l'année 1826, et imprimé en entier dans le tome VII des Mémoires de l'Académie des sciences qui a paru en 1827. L'auteur y a énoncé la proposition qui est exposée page 45 du présent ouvrage, et qui consiste principalement en ce que, dans le calcul par approximation des racines des équations algébriques au moyen des fractions continues, on peut dans tous les cas omettre l'emploi de l'équation au carré des différences, en procédant immédiatement au calcul des fractions continues comme si l'on était assuré que toutes les racines étaient réelles, et en se guidant par l'usage du théorème qui fait connaître combien il peut exister de racines entre deux limites données.

Enfin le dernier Mémoire relatif à l'analyse algébrique, qui est aussi le dernier ouvrage de l'auteur, a été lu le 9 mars 1829. Il est intitulé : « Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendantes », et a été imprimé dans le tome X des Mémoires de l'Académie des sciences.

En exposant dans son ouvrage les découvertes qu'il a faites sur les parties les plus importantes de l'analyse algébrique, M. Fourier a présenté ces vérités nouvelles comme étant les fruits de ses propres travaux, dont la propriété ne pouvait lui être contestée. Cette circonstance seule suffit assurément pour donner sur ce point la plus entière conviction à toutes les personnes qui l'ont connu. Mais nous avons pensé qu'il était nécessaire pour le public de montrer que M. Fourier était autorisé à s'honorer des découvertes dont il s'agit, non-seulement parce qu'il les avait véritablement faites, mais aussi parce qu'il existait des témoignages écrits qui, d'après les règles et usages littéraires, lui en assuraient la priorité.

Nous terminons cet Avertissement en déclarant que les manuscrits dont nous avons fait mention seront déposés par la suite au secrétariat de l'Institut, et que nous sommes prêts à les communiquer aux personnes qui cultivent les sciences et qui désireraient en prendre connaissance.

Paris, 1er juillet 1831.

NAVIER.

Membre de l'Académie des sciences de l'Institut.

PRÉFACE.

Les philosophes d'Alexandrie ont connu quelques éléments d'un art qui a pour objet la grandeur mesurable, et qui consiste à suppléer aux opérations de l'esprit par la combinaison régulière d'un petit nombre de signes. Cet art a pris un grand essor chez les nations modernes ; il est devenu l'analyse mathématique, science sublime, qui, en nous découvrant les lois générales du mouvement et celles de la chaleur, explique tous les grands phénomènes de l'univers, et qui éclaire la société civile dans ses usages les plus importants.

La théorie des équations déterminées, principal fondement de cette science analytique, a été long-temps arrêtée dans ses progrès par des difficultés capitales que l'on peut résoudre aujourd'hui. C'est le but que je me suis proposé dans cet ouvrage ; il est le fruit d'un long travail entrepris dès ma première jeunesse, et que les soins les plus divers n'ont pour ainsi dire jamais interrompu.

La recherche des racines des équations est la question principale de la théorie. Je me suis attaché à traiter complètement cette question, et je l'ai résolue par une méthode exacte et générale dont l'application est toujours facile et s'étend à toutes les fonctions déterminées.

Elle ne dérive point d'une vue singulière, et en quelque sorte indépendante des théorèmes déja connus; au contraire, elle rappelle et emprunte tous ces éléments; elle montre les rapports qu'ils ont entre eux et en développe les conséquences les plus éloignées.

Les découvertes capitales qui ont fondé l'analyse algébrique sont les théorèmes de François Viete sur la composition des coefficients; la règle que Descartes a donnée dans sa Géométrie concernant le nombre des racines positives ou négatives; celle du parallèlogramme analytique due à Newton et que Lagrange a démontrée; la méthode newtonienne des substitutions successives; les recherches de Waring et de Lagrange sur les fonctions invariables des racines et sur l'équation aux différences; la théorie des fractions continues, telle qu'elle est expliquée dans les ouvrages de Lagrange; enfin la méthode que Daniel Bernoulli a déduite des séries récurrentes.

Nous avons rappelé ces éléments dans notre ouvrage, non pour en expliquer les principes, qui sont connus depuis long-temps, mais pour leur donner une extension entièrement nouvelle, et résoudre toutes les questions fondamentales que les premiers inventeurs ont considérées. Il n'y en a aucune qui n'y soit discutée avec le plus grand soin. Il résulte de cet examen une méthode *exégétique* universelle qui ne laisse rien d'incertain, parce qu'elle donne des règles faciles et usuelles pour la distinction des racines imaginaires. Le lecteur attentif pourra juger s'il est vrai que ces problèmes difficiles soient tous complètement résolus.

Ces principes appartiennent à l'analyse générale, et notre théorie n'est point bornée aux équations algébriques; elle résoud toutes les équations déterminées.

Les questions les plus importantes de la philosophie naturelle, comme celles qui ont pour objet d'exprimer les dernières oscillations des corps, ou les conditions de la stabilité du système solaire, ou divers mouvements des fluides, ou enfin les lois mathématiques de la chaleur, exigent une connaissance approfondie de la théorie des équations.

J'indiquerai maintenant l'ordre que l'on a suivi dans la composition et la rédaction.

Les éléments de la science sont exposés clairement dans plusieurs ouvrages qui ont rendu cette étude facile et commune. Je suppose ici que les théorèmes principaux sont connus du lecteur; je les ai rapportés dans l'Introduction. Je présente sous ce titre l'indication historique des sources principales, avec l'énoncé exact et précis de toutes les propositions qu'il est nécessaire de se rappeler très-distinctement avant de lire ce traité. Cette énumération marque le point dont je suis parti; toutes les recherches suivantes sont nouvelles.

Parmi ces propositions élémentaires qui forment l'introduction, j'ai compris quelques théorèmes très-simples de l'analyse appelée infinitésimale. On ne peut faire aucun progrès considérable dans la théorie des équations, sans quelqu'usage de l'analyse différentielle, ou, ce qui est la même chose, de la méthode des fluxions. Les sciences n'admettent pas toujours l'ordre contingent et pour ainsi dire fortuit qui s'est établi dans le cours des inventions. Les connaissances mathématiques les plus diverses sont toutes de la même nature, leur étude ne demande qu'une attention persévérante; on a appelé transcendantes celles qui ont été découvertes les dernières.

J'ai conservé sans aucune innovation les dénominations usitées, afin de ne point exiger l'étude importune de notations nouvelles, qui ne sont presque jamais nécessaires. A la vérité plusieurs de ces dénominations ont été admises avant que l'on eût acquis une connaissance très-exacte des éléments. Il pourrait être utile d'y apporter quelque changement; il est préférable d'attendre cet avantage du progrès continuel des idées et de l'assentiment des géomètres.

Toutes les recherches qui doivent composer cet ouvrage sont achevées depuis long-temps. On publie aujourd'hui les deux premiers livres qui contiennent ce que la théorie des équations a de plus essentiel, et forment en quelque sorte un traité distinct. La seconde partie, qui termine l'ouvrage, et dont l'étendue est à peu près égale à celle de la première, paraîtra l'année suivante.

Comme les deux premiers livres ne donneraient qu'une idée incomplète de l'objet de ces recherches, il m'a paru nécessaire de présenter d'avance une Exposition synoptique qui réunisse tous les résultats et fasse bien connaître leurs rapports mutuels.

Une vue principale avait été indiquée par François Viète, que l'on peut regarder comme le second inventeur de l'algèbre. Harriot, Oughtred, Wallis et Newton l'avaient adoptée; mais on s'en est écarté, et l'on a suivi une route très-différente, nécessairement bornée, et qui n'aboutit qu'à des recherches purement curieuses, sans qu'on ait pu résoudre une seule des difficultés qu'elles présentaient. Je propose aujourd'hui de ramener la science à des principes plus simples et plus féconds qui se lient à tous les éléments déja connus, et contribueront certainement aux progrès des autres branches de l'Analyse mathématique.

Paris, 1829.

Jh. FOURIER.

INTRODUCTION.

(1) Nous avons reçu des Grecs et des Arabes les premières notions de l'algèbre. Les livres de Diophante, qui sont aujourd'hui le plus ancien monument de cette science, portent tous les caractères de l'invention. L'auteur résout par une analyse ingénieuse un ordre assez étendu de questions relatives aux propriétés des nombres; la lecture de la partie de cet ouvrage qui nous a été transmise, suffit pour prouver que les règles élémentaires de l'algèbre étaient déja connues à l'école d'Alexandrie.

L'antique civilisation de l'Orient est attestée par les productions admirables des arts; mais l'histoire n'a conservé qu'un souvenir confus de ces temps qui ont précédé de plusieurs siècles les origines fabuleuses de la Grèce.

Les principes de l'algèbre indienne, tels qu'on en trouve quelques vestiges, ont-ils été communiqués aux Arabes, aux Perses, et ensuite à l'Europe, ou plutôt les géomètres grecs ne sont-ils pas les vrais et seuls inventeurs? Le défaut de monuments ne permet plus de résoudre entièrement cette question. Quoi qu'il en soit, les théories fort étendues dont la science analytique se compose maintenant sont toutes l'ouvrage des modernes.

actually 1202

Léonard Bonacci de Pise a écrit vers l'année 1150, au retour de ses voyages en Grèce et en Asie, le premier traité de cette science qui ait paru dans l'Occident. Celui de Luc Paciolo fut publié au commencement du XVI^e siècle, époque à jamais mémorable dans l'histoire de l'Europe. Scipion Ferrei parvint à résoudre les équations du 3^e degré, ou plutôt il en donna une transformation ingénieuse et inattendue. Tartaglia, Cardan et ensuite Raphaël Bombelli renouvelèrent ou répandirent cette découverte. Louis Ferrari de Bologne découvrit une solution du même genre pour les équations du 4e degré. Ces formules ne conduisirent point à la résolution des équations supérieures, et même pour le 3e et le 4e degré elles sont inapplicables dans un grand nombre de cas. On n'avait résolu complètement par un moyen semblable que les équations du second degré; la formule très-simple qui donne cette solution était connue dès l'origine de l'algèbre.

François Viète, l'un des plus illustres fondateurs des sciences mathématiques, considéra sous un point de vue beaucoup plus général la question de la résolution des équations. Il entreprit de découvrir une méthode *exégétique* propre à déterminer les valeurs effectives des inconnues, et fonda ses recherches sur les vrais principes du calcul algébrique. Mais on ne pouvait point alors former cette méthode parce qu'elle exige quelque connaissance de l'analyse différentielle.

Viète remarqua le premier la composition des coefficients, ce qui est l'origine de la théorie des équations. Il fit connaître toute l'étendue des formules de l'algèbre, et il en découvrit de nouvelles applications, en sorte qu'on peut le regarder comme le second inventeur de cette science.

Harriot, Oughtred, Wallis suivirent la doctrine de Viète, et le premier de ces géomètres donna aux équations une forme générale que l'on a conservée.

Descartes exprima par des équations les propriétés des lignes courbes, et fonda ainsi l'analyse générale des fonctions, qui devait bientôt s'appliquer aux plus grands phénomènes de l'univers. Il enrichit l'algèbre d'une heureuse découverte, celle qui exprime les rapports singuliers du nombre des racines positives ou négatives avec les signes des coefficients. Wallis, l'un des plus ingénieux promoteurs de l'analyse moderne, mais historien partial, a fait d'inutiles efforts pour attribuer l'invention de cette *règle des signes* à Harriot son compatriote.

L'algèbre proprement dite a reçu de Newton deux méthodes capitales: l'une est celle que l'on a désignée sous le nom de *parallélogramme analytique;* elle fut annoncée en 1676 à Leibnitz, qui en désira la communication. Cette règle, dont Lagrange a donné une démonstration analytique, et que Laplace a étendue à un autre ordre de questions, avait eu pour objet la formation des séries; mais elle appartient surtout à l'algèbre, comme un de ses éléments principaux. C'est une des branches de la résolution exégétique que Viète avait en vue. La seconde méthode algébrique due à Newton est celle des substitutions successives; elle s'applique à toutes les parties de l'analyse mathématique.

Albert Girard, qui écrivait en Hollande, a connu le premier les propositions qui expriment la somme des puissances entières des racines. Newton donna ces théorèmes dans son Arithmétique universelle, et il en indique l'usage pour trouver la valeur approchée de l'une des racines. C'est en quelque sorte l'origine de la méthode des séries récurrentes, que Daniel Bernoulli a déduite d'autres principes, et qui a été clairement exposée et discutée dans les ouvrages d'Euler et de Lagrange. Ces propriétés des séries récurrentes forment une des principales théories algébriques.

Les règles d'élimination, et les théorèmes relatifs aux fonctions des racines, sont les conséquences générales des remarques de Viète et d'Albert Girard sur la composition des coefficients. Les propositions de ce genre ne conduisent point à une méthode applicable qui ferait connaître effectivement les racines; mais elles expriment des rapports théoriques très-importants.

Hudde d'Amsterdam a découvert les propriétés des racines égales. Ces théorèmes, qui ont été connus avant la méthode différentielle, et qui toutefois dérivent des mêmes principes, forment un élément simple et nécessaire de l'analyse algébrique.

Je ne rappellerai point les tentatives multipliées, qui ont eu pour objet de réduire en formules analogues à celles de Cardan les racines des équations de tous les degrés. Cette recherche aurait pour objet de trouver toutes les racines d'une équation par un nombre limité d'opérations simples, dont la nature est déterminée d'avance, et dont aucune ne peut donner plus de deux valeurs réelles différentes. On n'obtient ainsi que des transformations très-compliquées, où la vérité que l'on cherche est beaucoup plus cachée qu'elle ne l'était dans l'équation elle-même. Le temps, et pour ainsi dire l'espace, manqueraient bientôt à l'analyste pour effectuer de tels calculs, si le degré de l'équation était élevé. Les vues de Leibnitz et de Thschirnhausen sur ce genre de questions n'ont pu être réalisées. Les ouvrages de Lagrange, de Vandermonde et de quelques-uns de leurs successeurs, ont assez fait connaître les limites de cette recherche.

De Gua, de l'Académie des Sciences de Paris, a considéré les courbes paraboliques qui rendent si manifestes plusieurs propriétés importantes des équations, et il a donné une proposition remarquable sur la nature des racines.

Rolle inventa une règle pour trouver les limites des racines, en diminuant successivement d'une unité le degré de l'équation. Cette méthode, quoique imparfaite, conduit dans plusieurs cas à la connaissance des limites, et elle n'est autre chose qu'une application très-simple de l'analyse différentielle, dont Rolle refusait d'admettre les principes. Au reste cette tentative n'eut aucune suite, parce que l'inventeur ne put surmonter l'obstacle principal qui avait arrêté tous les analystes précédents, et qui consistait à distinguer avec certitude les racines imaginaires. La règle que Newton a proposée, à l'imitation de celle de Descartes, pour énumérer ces racines, n'est point suffisante, et l'inventeur en reconnaissait l'imperfection; elle atteste seulement la difficulté de la question. Lagrange et Waring parvinrent à la résoudre au moyen de l'équation qui exprime la plus petite différence des racines de la proposée; mais cette solution est seulement théorique, l'application en serait impraticable si le degré de l'équation était un peu élevé.

L'un des plus célèbres géomètres de l'Académie des Sciences de Paris, Fontaine, avait proposé une méthode générale pour reconnaître la nature des racines des équations. Une discussion approfondie de cette méthode a montré l'imperfection inévitable à laquelle elle est sujette, et les recherches ultérieures ont confirmé le jugement qui en a été porté par D'Alembert et Lagrange.

J'ai cité dans des Mémoires précédents, et j'aurai occasion d'indiquer dans le cours de cet ouvrage, les recherches plus récentes qui ont été publiées sur la résolution des équations numériques. Quant à l'usage des fractions continues pour l'expression des racines, ce procédé n'est pas un élément essentiel de l'algèbre; il peut être remplacé par un mode quelconque de développement arithmétique.

Je me suis proposé dans l'énumération précédente de rappeler l'origine et les progrès de l'algèbre, en indiquant toutes les sources principales de l'histoire de cette science; et je viens d'exprimer le plus distinctement qu'il m'a été possible le caractère de chaque découverte.

(2) L'ouvrage que je publie a pour objet l'examen de toutes les questions fondamentales de l'analyse algébrique. Les deux premiers livres concernent la résolution numérique des équations, et l'on y trouvera une solution complète et facile de ce problème célèbre.

Dans les deux livres suivants, on a eu pour but de généraliser les premières recherches, et de résoudre aussi par une méthode exégétique du même genre les équations littérales qui contiennent une ou plusieurs inconnues.

J'ai traité, dans divers Mémoires lus à l'Institut de France, d'autres questions qu'il importait d'examiner pour donner plus d'étendue à l'analyse algébrique.

1° On a démontré dans ces Mémoires que l'emploi des séries récurrentes n'est point borné au calcul de certaines racines réelles, et qu'il s'applique à toutes les racines ou réelles ou imaginaires, et en général à chacun des coefficients des facteurs composés de tous les ordres.

2° On a exposé les principes de l'analyse des inégalités, et des applications variées de cette analyse, qui se lie à celle des probabilités.

Ces recherches sur les séries récurrentes et sur les inégalités, appartiennent aussi aux théories algébriques: je les ai comprises dans ce traité, parce qu'elles servent à fonder les conséquences principales. Je pense que cet ouvrage contribuera à fixer les éléments généraux de l'analyse des équations, en donnant à cette analyse une forme nouvelle qu'elle conservera toujours.

La résolution des équations numériques a été l'objet d'un traité spécial publié par Lagrange, et connu de tous les géomètres. L'illustre auteur a eu principalement en vue, dans cet ouvrage, d'exposer de nouveau et de perfectionner la méthode qu'il avait donnée dans le recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1767 et 1768. Les notes qu'il a jointes à ce traité présentent aussi une discussion très-ingénieuse et très-claire de diverses autres questions algébriques. La méthode que j'ai suivie est fondée sur d'autres principes. J'ai donné dans des Mémoires précédents (Société Philomatique, année 1820, pag. 156 et 181) la substance de cette méthode. Je reproduirai ici l'ensemble des propositions, avec toutes les démonstrations et les développements nécessaires.

On rappellera d'abord quelques définitions et l'énoncé de plusieurs théorèmes fondamentaux, dont la démonstration se trouve dans tous les traités généraux. J'ai supposé la connaissance de ces éléments, et je vais en rapporter l'énoncé en faisant connaître distinctement le sens que j'attache aux définitions communes, et aux propositions déja établies.

(3) Nous considérons une équation algébrique de la forme suivante:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} \ldots\ldots + a_{(m-1)} x + a_{(m)} = 0.$$

L'exposant m est entier, et les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ sont des nombres donnés positifs ou négatifs. Nous désignons par X ou fx le premier membre de cette équation. X est une fonction algébrique et entière de x; elle indique une suite d'opérations élémentaires que l'on pourrait effectuer sur la variable x: la forme de ces opérations est parfaitement connue, et le nombre en est limité.

Si un nombre α substitué au lieu de x dans la fonction algébrique fx donne zéro pour résultat, on appelle ce nombre α une racine de l'équation proposée; et dans ce cas le premier membre fx est exactement divisible par $x-\alpha$.

Une équation peut avoir plusieurs racines différentes $\alpha, \beta, \gamma \ldots$: ces racines correspondent à autant de facteurs du premier degré $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma \ldots$; le premier membre fx est divisible par chacun de ces facteurs et par leur produit.

Si les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ de la proposée ne sont point des nombres, mais s'ils contiennent des lettres a, b, c, etc. qui représentent des grandeurs connues, en sorte que ces coefficients soient formés d'une somme de termes tels que $\mathrm{H}\,a^p\,b^q$, l'équation est appelée *littérale*: p, q sont des exposants numériques donnés, positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, et les coefficients H sont aussi des nombres connus. La résolution de l'équation littérale consiste à trouver pour x un polynome formé de termes tels que $\mathrm{H}'\,a^{p'}\,b^{q'}$, qui, substitué à la place de x, réduise à zéro le premier membre de l'équation.

Les opérations qui servent à extraire la racine carrée ou cubique, ou la racine d'un degré quelconque d'un nombre donné A ou d'une quantité littérale A, sont connues depuis long-temps; on en exprime le résultat par le radical $\sqrt[m]{\mathrm{A}}$. Les premiers inventeurs de l'algèbre ayant résolu les équations du second degré par l'emploi du radical $\sqrt[2]{\mathrm{A}}$, on s'est long-temps proposé de résoudre les équations algébriques de tous les degrés par un procédé analogue, c'est-à-dire au moyen des seules opérations exprimées par les signes radicaux. Considérée sous ce point de vue, la résolution consisterait à assigner pour une équation proposée d'un degré quelconque un nombre limité d'opérations, tellement ordonnées que le résultat de la dernière fût une des racines, en n'admettant au nombre de ces opérations à effectuer que les règles élémentaires du calcul, et celles qui sont indiquées par les signes radicaux.

Quelques auteurs ont appelé résolution générale des équations celle qui exprimerait ainsi les valeurs des racines au moyen d'un nombre fini de radicaux, ce qui est très-facile pour les équations du second degré.

On a trouvé aussi des formules de ce genre pour les équations du troisième et du quatrième degré; mais on a reconnu ensuite que ces transformations ne sont point propres à donner effectivement les valeurs des racines numériques ou littérales, et qu'au contraire elles s'écartent beaucoup du but réel que l'on se propose, qui est de connaître en nombres, ou en une suite de monomes, les valeurs des racines. Nous prouverons dans le cours de cet ouvrage que l'on parvient facilement à trouver ces valeurs par des opérations spéciales effectuées sur tous les coefficients à la fois, et qui ne consistent point à combiner entre elles un certain nombre d'extractions de racines. Les formules qui résultent de ces combinaisons ne font point connaître les racines cherchées. En effet si ces racines sont des nombres ou entiers ou irrationnels, on ne trouve pas ces nombres, mais des expressions très-complexes dans lesquelles on ne reconnaîtrait point les valeurs des racines: on peut seulement prouver que les valeurs inconnues équivalent à ces expressions développées; la valeur cherchée reçoit une forme singulière où elle est plus cachée que dans l'équation qu'il fallait résoudre. Toutes les fois qu'une équation d'un degré quelconque a plus de deux racines réelles, on est assuré que toutes les racines se présenteraient sous la forme des quantités imaginaires, et il faut une démonstration pour prouver qu'elles sont réelles. Si la racine cherchée est un polynome fini, comme serait $a^2 - b^2 + a^5$, l'expression en radicaux ne donnerait point ce polynome, elle ne ferait connaître les racines que si l'équation est du second degré. Proposer de résoudre ainsi une équation élevée, c'est assigner d'avance certaines opérations que l'on a voulu choisir, savoir celles qui servent à extraire les racines carrées, cubiques, quatrièmes, etc., et demander dans quel ordre il faut effectuer un nombre limité de telles opérations, en sorte que le résultat de la dernière donne toutes les racines. On présuppose ce qui est inconnu, savoir la nature du calcul qui doit donner ces racines. L'analogie du second degré est trop incomplète pour fonder ce jugement *a priori* sur l'espèce des opérations. Il était même assez facile de prévoir qu'un nombre limité d'extractions de racines de divers ordres ne peut pas conduire à la connaissance effective des valeurs cherchées, car il n'y a aucune extraction de racine qui donne en nombres réels plus de deux valeurs différentes, et l'on ne voit pas comment il serait possible qu'en effectuant un nombre fini de ces opérations, on arrivât à une dernière qui donnerait un nombre impair de valeurs différentes.

Quoique cette remarque ne forme point une démonstration régulière de l'impossibilité de la solution, elle suffirait pour avertir de l'inutilité de la recherche, qui présente en effet une sorte de contradiction ; aussi est-il arrivé que l'on n'a pu trouver une expression réelle des racines de l'équation du troisième degré, lorsque l'équation a plus de deux racines réelles. De là on peut conclure qu'il en serait de même de l'équation générale du quatrième degré, et des degrés supérieurs ; car si l'on pouvait trouver en général pour ces équations plus de deux racines réelles, la difficulté inhérente au troisième degré ne subsisterait pas. Il est manifeste qu'en présupposant la nature des opérations, dont on demande un nombre fini, on imprime à la recherche un caractère trop particulier. Si la perfection de l'analyse algébrique exigeait une telle solution, il faudrait renoncer à connaître les racines des équations, et la science, ainsi bornée dès son origine, ne pourrait faire aucun progrès : mais nous prouverons par la suite que la marche de cette science est à la fois plus assurée et incomparablement plus simple.

En effet on reconnaîtra qu'il est facile de découvrir toutes les racines par une méthode générale de *son propre genre*, qui n'est point une combinaison des règles élémentaires des extractions de racines, mais qui dépend du calcul simultané de tous les coefficients de la proposée. Si les racines sont des nombres finis, l'opération s'arrête d'elle-même, et donne ces nombres. Si ces racines sont irrationnelles, on les détermine aussi exactement qu'on le veut. Lorsque l'équation est littérale, et que les racines sont des poly-

3.

nomes finis, on trouve immédiatement ces polynomes, non par une suite d'essais incertains, comme on l'a proposé autrefois dans l'Arithmétique universelle et d'autres ouvrages, mais par une opération régulière et facile dont la marche est toujours la même. Si les racines ne peuvent être exprimées par un nombre fini de termes, on trouve successivement toutes les parties des racines, c'est-à-dire des suites de monomes dont chacune étant substituée par ordre dans le premier membre rend tous les termes nuls. La lecture de notre ouvrage ne laissera aucun doute sur la vérité de ces conséquences.

Lorsque les grandeurs inconnues sont exprimées par plusieurs équations, par exemple si l'on propose deux équations algébriques pour déterminer x et y qui entrent dans chacune des équations, la résolution a pour objet de trouver deux valeurs de x et y qui, substituées ensemble dans chaque équation, en réduisent le premier membre à zéro. Ces valeurs doivent être exprimées, soit en nombres, soit par des suites de monomes tels que $\mathrm{H}a^p b^q \ldots$, selon que les équations sont numériques ou littérales; et il s'agit de déterminer tous les systèmes possibles de deux valeurs de x et y propres à satisfaire aux équations proposées. La même question s'applique aux équations qui contiennent trois inconnues, ou un plus grand nombre.

On a déduit des propriétés des lignes trigonométriques une résolution des équations des premiers degrés, beaucoup plus claire et plus utile que celle qui dépendrait de la combinaison des signes radicaux; et c'est encore dans les ouvrages de Viète que l'on trouve l'origine de ce procédé. Mais on ne parvient pas par cette voie à une résolution générale des équations.

(4) Nous traiterons dans les deux premiers livres des équations à une seule inconnue, et dont les coefficients sont des nombres donnés.

Les nombres inconnus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dont chacun aurait la propriété de réduire à zéro le premier membre de l'équation $\mathrm{X} = 0$, sont appelés racines *réelles* de l'équation. Le nombre des racines réelles ne peut pas être plus grand que le degré m de l'équation, mais il peut être moindre; et lorsque cela arrive, on nomme *imaginaires* ces racines *déficientes*, en sorte que le nombre total des racines réelles ou imaginaires d'une équation du degré m est toujours égal à m.

Il y a des équations qui n'ont aucune racine réelle, parce qu'il n'existe aucun nombre α, tel que le premier membre X puisse être rendu nul en donnant à x une valeur subsistante α; ou, ce qui est la même chose, qui soit divisible par $x-\alpha$. Mais quels que soient les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ de la fonction algébrique fx, on peut toujours trouver deux nombres positifs ou négatifs μ et ν, tels que la fonction fx soit exactement divisible par le facteur du second degré $x^2+\mu x+\nu$.

On a remarqué depuis long-temps, et ensuite on a démontré cette proposition fondamentale. Ainsi la fonction X peut toujours être considérée comme égale au produit $(x^2+\mu x+\nu)\,\mathrm{F}x$: on désigne ici par $\mathrm{F}x$ une autre fonction algébrique.

Si l'équation du second degré $x^2+\mu x+\nu=0$ a deux racines réelles α et β, en sorte que le facteur $x^2+\mu x+\nu$ soit le produit $(x-\alpha)(x-\beta)$, les nombres α et β sont aussi des racines réelles de la proposée $\mathrm{X}=0$. Il peut arriver qu'il n'y ait aucun nombre qui réduise à zéro le facteur du second degré $x^2+\mu x+\nu$: ce cas est celui des racines imaginaires.

On regarde ces racines imaginaires de l'équation $x^2+\mu x+\nu=0$ comme appartenant à l'équation $\mathrm{X}=0$. Ainsi l'expression des racines imaginaires d'une équation algébrique n'est autre chose que le signe convenu d'un facteur du second degré $x^2+\mu x+\nu$ qui divise le premier membre de cette équation, et qui ne peut être rendu nul par la substitution d'aucun nombre mis à la place de x. Cette distinction des racines imaginaires, et les dénominations qui l'expriment, se sont introduites dans un temps où l'on n'avait point encore acquis une connaissance complète de la nature des équations. Il est certain qu'on pourrait les remplacer par des expressions plus claires; mais il n'y aurait aucun avantage à changer aujourd'hui les dénominations usitées : il est seulement nécessaire d'en connaître exactement le véritable sens.

(5) On peut regarder comme une abscisse variable la quantité x qui entre dans la fonction algébrique fx, et la valeur numérique de la fonction comme l'ordonnée correspondante y. Si l'on supposait que x reçoit toutes les valeurs possibles positives ou négatives, et si l'on déterminait la forme de la courbe, on connaîtrait distinctement la nature de la fonction fx; les points d'intersection de la courbe et de l'axe correspondraient aux racines réelles. Pour déterminer la forme de la courbe, en substituant des valeurs de x dans la fonction fx, il faudrait attribuer à x toutes ses valeurs successives, ce qui ne peut s'effectuer; mais nous prouverons par la suite que l'on parvient à déterminer complètement cette forme par un nombre très-limité de substitutions. Pour cela on ne considère pas seulement la fonction donnée fx, on considère aussi toutes celles qui en dérivent par des différentiations répétées.

Nous supposons ici que les principes et l'usage de l'analyse différentielle sont connus du lecteur. On ne pourrait point perfectionner la théorie des équations sans recourir à ces principes; la résolution complète des équations numériques doit être regardée comme une des plus importantes applications du calcul différentiel. Au reste nous indiquons expressément dans cette introduction les propositions qui dépendent de l'analyse infinitésimale, et que nous employons dans le cours de nos recherches. Ces propositions sont démontrées dans tous les traités généraux, et il faut remarquer que les procédés de ces calculs sont très-simples, et que la vérité en est pour ainsi dire manifeste lorsqu'on les applique aux fonctions algébriques qui forment les premiers membres des équations. En général, nous employons dans le cours de cet ouvrage les dénominations et notations les plus généralement reçues, et qui sont presque toutes celles que les inventeurs ont proposées. Ainsi nous conservons le signe connu d'une quantité infiniment petite, c'est-à-dire d'une quantité variable dont on considère une infinité de valeurs et qui devient plus petite que toute grandeur donnée. Nous désignons aussi par $\frac{1}{0}$ une quantité infiniment grande, c'est-à-dire une quantité qui n'a point une valeur actuelle déterminée, mais qui est variable et qui augmente sans limite, en sorte qu'elle devient plus grande que toute quantité donnée.

Soient fx, $\frac{d}{dx}fx$, $\frac{d^2}{dx^2}fx$, $\frac{d^3}{dx^3}fx$, etc., des fonctions algébriques désignées par $fx, f'x, f''x, f'''x$, etc., et dont chacune se déduit de la précédente en différentiant par rapport à x, et divisant par dx. On substitue certains nombres dans cette suite de fonctions, et la comparaison des résultats conduit, comme nous le démontrerons bientôt, à la connaissance des racines de l'équation $fx=0$, et à celle des lignes courbes dont les équations sont $y=fx$, $y=f'x$, $y=f''x$, $y=f'''x$, etc. Il ne suffirait point, pour découvrir les racines de la proposée $fx=0$, de substituer certains nombres dans la fonction fx; il est nécessaire aussi de faire ces substitutions dans les fonctions subordonnées $f'x$, $f''x$, $f'''x$, etc.

En substituant un nombre a à la place de x dans une fonction donnée, on connaît la valeur correspondante de la fonction qui est représentée par l'ordonnée; mais si l'on substitue aussi ce même nombre a dans la fonction $\frac{d}{dx}fx$, ou $f'x$, on détermine un autre caractère de la même fonction fx; on connaît si cette fonction tend à augmenter ou à diminuer lorsque la valeur a de l'abscisse augmente, et l'on a la mesure exacte de l'augmentation ou de la diminution *virtuelle*. Cette mesure est la valeur correspondante de $f'a$, ou de la fluxion du premier ordre; elle est représentée dans la figure par la tangente trigonométrique de l'angle que l'élément de l'arc fait avec la parallèle à l'axe des abscisses.

On connaît de la même manière si la première fluxion tend à augmenter ou à diminuer, lorsque la valeur a de x augmente, et cette disposition à augmenter ou à diminuer est aussi une quantité mesurable: on la détermine en substituant le même nombre a dans la seconde fluxion $f''x$. Il en est de même des fluxions de tous les ordres.

La quantité $\frac{d}{dx}fx$, ou $f'x$, est, à proprement parler, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable, et les affections des courbes rendent très-sensibles toutes les conséquences de ce genre.

La valeur de la fonction $\frac{dy}{dx}$, ou $f'x$, est nulle lorsqu'au point de la courbe dont l'abscisse est x la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Si cette fonction $f'x$ a une valeur positive, l'ordonnée y ou fx augmente lorsque l'abscisse augmente : ainsi la ligne est ascendante. Mais si $f'x$ a une valeur négative, l'ordonnée diminue lorsque x augmente : la branche de la courbe est descendante.

Le signe de la valeur de la fluxion du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou $f''x$, fait connaître si la courbe est concave ou convexe au point dont x est l'abscisse. Si cette fonction $f''x$ a une valeur positive, la courbe est concave : elle tourne sa convexité vers la partie inférieure de la planche. Si $f''x$ a une valeur négative, la courbe est convexe : elle tourne sa convexité vers la partie supérieure de la planche. Lorsque la valeur de la fluxion du second ordre $f''x$ est nulle, la courbe a une inflexion au point dont x est l'abscisse. Ce point d'inflexion peut, dans des cas singuliers, n'être pas apparent : en général il sépare deux arcs dont l'un est convexe et l'autre concave. Toutes ces propositions sont très-faciles à démontrer.

(6) La notion des limites était un des éléments principaux de la géométrie grecque; on en trouve pour la première fois l'usage dans la doctrine des incommensurables, et surtout dans le théorème qui sert à comparer les volumes de deux tétraèdres qui ont une base commune et des hauteurs égales. En effet on ne peut point prouver l'égalité de ces deux volumes par la superposition effective des parties, comme cela avait lieu pour les théorèmes plus anciennement connus; il est nécessaire de considérer ici une infinité de parties. Les modernes ont ensuite appliqué leur analyse à cette notion des limites, et c'est l'origine du calcul infinitésimal.

L'équation différentielle est celle qui exprime une relation entre les fonctions d'une ou de plusieurs variables, et les fluxions de divers ordres prises par rapport à certaines de ces variables. On a reconnu que ces relations n'appartiennent pas seulement à la science abstraite du calcul : elles existent dans les propriétés des courbes et des surfaces, dans les mouvements des solides et des fluides, dans la distribution de la chaleur, et dans la plupart des phénomènes naturels. Les lois les plus générales du monde physique sont exprimées par des équations différentielles.

(7) Le premier membre d'une équation algébrique dont le degré m est un nombre pair peut toujours être décomposé en un certain nombre de facteurs du second degré, tels que $x^2 + \mu x + \nu$; les nombres μ et ν sont positifs ou négatifs. Si le degré m est impair, l'équation contient de plus un facteur réel du premier degré, $x - \alpha$. On considère ainsi toute équation d'un degré m comme ayant un nombre m de racines, ou réelles ou imaginaires : à proprement parler, ces dernières racines manquent dans l'équation.

Les coefficients a_1, a_2, $a_3 \ldots a_m$ pourraient être tels que si l'on construisait la ligne dont l'équation est $y = fx$, le nombre d'intersections de la courbe avec l'axe des abscisses fût égal à m. Mais lorsqu'on change les valeurs de ces coefficients, il peut arriver que certaines intersections disparaissent ; elles manquent en nombre pair. La forme même de la courbe peut être changée, et cette ligne peut perdre plusieurs de ses sinuosités. C'est ce défaut d'intersections ou de sinuosités qui donne lieu aux racines imaginaires. Il faut remarquer, et nous le montrerons distinctement par la suite, que ces racines déficientes ou imaginaires peuvent n'être pas indiquées par la forme de la ligne dont l'équation est $y = fx$. Il arrive souvent que les intersections disparaissent d'abord dans l'une des lignes subordonnées, qui ont pour équation $y = f'x$, $y = f''x$, $y = f'''x$, etc. Nous prouverons que l'on peut déterminer facilement les intervalles où ces intersections manquent.

(8) Lorsque le premier membre de l'équation contient plusieurs facteurs réels du premier degré, tels que $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc., deux de ces facteurs, ou trois, ou un plus grand nombre, peuvent être les mêmes : ce cas est celui des racines égales. On considère que le premier membre étant divisible par $(x - \alpha)^2$, $(x - \beta)^3$, etc., l'équation

a deux racines égales à α, ou trois racines égales à β, quoiqu'il n'y ait en effet qu'un seul de ces nombres qui ait la propriété de réduire le premier membre à zéro. La construction rendrait sensible la coïncidence de ces racines.

Il est facile de distinguer et de résoudre ce cas des racines égales : il suffit de comparer entre elles les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., afin de connaître s'il existe un ou plusieurs facteurs communs à fx et $f'x$, ou à fx, $f'x$, $f''x$, etc. Dans le cas singulier où une telle condition a lieu, on doit considérer séparément le facteur commun que l'on a trouvé, et qui est une fonction algébrique de x; il ne reste plus qu'à résoudre cette fonction en ses facteurs simples.

Il nous suffit d'énoncer ici ces théorèmes sur les propriétés des racines égales. La démonstration en est connue, et d'ailleurs elle est une conséquence évidente des différentiations.

(9) Nous ferons principalement usage du théorème qui donne le développement successif d'une fonction algébrique du binome $z+b$; mais il faut joindre à ce théorème l'expression du reste, qui complète la série lorsqu'on l'arrête à un terme quelconque. Voici l'énoncé de cette proposition, qui est un peu moins connue que les précédentes, mais qui est entièrement nécessaire à l'analyse exacte des équations : les développements successifs de la fonction $f(z+b)$ sont exprimés par les équations suivantes,

$$f(z+b)=fz+bf'(z\ldots\overline{z+b}),$$

$$f(z+b)=fz+bf'z+\frac{b^2}{2}f''(z\ldots\overline{z+b}),$$

$$f(z+b)=fz+bf'z+\frac{b^2}{2}f''z+\frac{b^3}{2.3}f'''(z\ldots\overline{z+b}),$$

ainsi de suite.

La fonction désignée par la caractéristique f est supposée algébrique, et de même nature que la fonction fx rapportée article 3, et dont la valeur est $x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$; b exprime un nombre déterminé ajouté à la variable z. La quantité ainsi représentée $(z\ldots\overline{z+b})$, est un certain nombre inconnu compris entre z et $z+b$; et il faut remarquer surtout que ce nombre n'a pas la même valeur dans les équations qui se succèdent: seulement il est toujours compris entre z et $z+b$. Ainsi la valeur complète de la fonction $f(z+b)$ est formée 1° d'un certain nombre de termes du second membre, savoir d'un seul pour la première équation, de deux pour la seconde, de trois pour la troisième, ainsi de suite; 2° d'un dernier terme qui complète la série et qui contient une fonction $\mathrm{f}(m)$ d'une certaine quantité, m étant le nombre des termes du développement. La quantité qui entre comme variable dans cette fonction $\mathrm{f}(m)$ n'est pas connue, et il n'est jamais nécessaire qu'elle le soit pour l'usage que nous voulons faire du théorème; mais il est certain que cette quantité inconnue est plus grande que z et moindre que $z+b$. Le même théorème s'étend à toutes les fonctions, mais on ne l'applique ici qu'aux fonctions algébriques. On trouve l'origine de cette proposition générale dans les écrits de Jean Bernoulli : c'est à Lagrange qu'on doit la remarque importante qui donne l'expression exacte du reste de la série.

(10) Soit y une fonction algébrique fx, et concevons que x ayant reçu une valeur déterminée, on augmente cette valeur d'une quantité infiniment petite dx, c'est-à-dire d'une quantité variable qui décroît de plus en plus, et a zéro pour limite. L'accroissement dy de la fonction est lui-même variable, ainsi que le rapport de cet accroissement dy à l'accroissement dx. En désignant par h cette quantité variable dx dont x est augmentée, le rapport dont il s'agit a pour expression $\frac{f(x+h)-fx}{h}$, ou $f'x+\frac{1}{2}hf''(x\ldots\overline{x+h})$. Cette dernière quantité, qui varie lorsque h devient infiniment petite, a évidemment pour limite $f'x$: c'est ce que les géomètres expriment en écrivant $\frac{dy}{dx}=f'x$, ou $dy=dxf'x$. Ils énoncent la même proposition en disant que $f'x$ est la dernière raison des accroissements dy et dx, ou que la valeur de $f(x+dx)$ est $fx+dxf'x$.

Il pourrait arriver que la valeur déterminée de x fût telle que $f'x$ devînt nulle. Dans ce cas on trouve l'accroissement de la fonction par l'équation

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{2}f''x+\frac{h^3}{2.3}f'''(x\ldots\overline{x+h});$$

car le terme $hf'x$ étant nul, on a

$$\frac{f(x+h)-fx}{h^2}=\tfrac{1}{2}f''x+\frac{h}{2.3}f'''(x\ldots\overline{x+h}):$$

la limite du second membre est évidemment $\frac{1}{2}f''x$. C'est ce l'on exprime en écrivant

$$f(x+dx)=fx+\tfrac{1}{2}dx^2f''x.$$

La dernière raison de l'accroissement de y au carré de l'accroissement de x est dans ce cas une quantité finie égale à $\frac{1}{2}f''x$. Les mêmes conséquences s'appliquent aux cas où la substitution de la valeur attribuée à x ferait évanouir plusieurs fonctions consécutives.

Après avoir rappelé ces principes, nous traiterons l'une des questions principales de l'analyse des équations, celle qui a pour objet de déterminer les limites de toutes les racines.