

Article

## Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie

Fricke, E.

in: Periodical issue | Mathematische Annalen -

44 | Periodical

35 page(s) (565 - 599)

---

### Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

### Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

### Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

# Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie.

Von

ROBERT FRICKE in Braunschweig.

## I. Verschiedene Typen von Kreisbogenvierseiten. Problemstellung.

In einer Ebene, die späterhin die Trägerin der Werthe einer complexen Variablen  $\xi$  sein soll, möge ein von vier Kreisen  $K_1, \dots, K_4$  eingegrenzter Bereich  $B$  gezeichnet sein; derselbe soll ein *Kreisbogenvierseit* genannt werden, obschon diese Bezeichnungsweise, wie man sehen wird, in einigen Fällen nicht völlig treffend ist. Die hauptsächlichsten Typen von Kreisbogenvierseiten  $B$  sollen gleich hier durch Figuren erläutert werden.

In Figur 1 verlaufen die vier Kreise  $K$  durchaus getrennt von einander und grenzen einen *vierfach zusammenhängenden Bereich*  $B$  ein, der durch Schraffirung kenntlich gemacht ist. Dadurch dass man hier zwei oder mehrere unter den vier Kreisen bis zur Berührung einander nahe kommen lässt, entspringt eine Reihe von Grenzfällen der Figur 1, von denen einer in Figur 7 näher dargestellt ist, und die der Mehrzahl nach unten besonders ausführlich untersucht werden.

Ohne Gewähr der Vollständigkeit, für welche erst später systematische Mittel entwickelt werden, mögen aus dem Bereich  $B$  der Figur 1 folgende weitere Typen von Vierseiten hergeleitet werden.

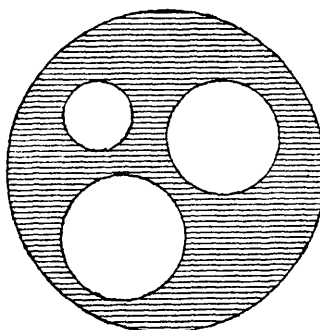


Fig. 1.

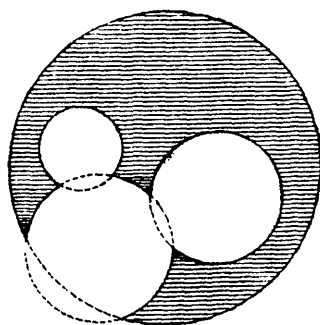


Fig. 2.

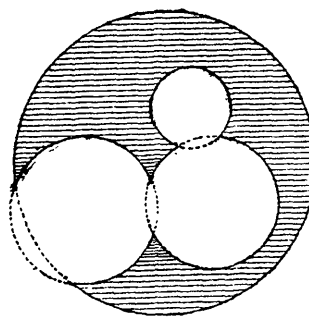


Fig. 3.

Einmal hat man in den Figuren 2 und 3 einfach zusammenhängende *Kreisbogensechsecke* als Bereiche  $B$  durch die vier Kreise eingegrenzt.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Typen ist der, dass in Figur 2 einer der Kreise drei Seiten des Sechsecks liefert, die andern drei Kreise je nur eine Seite, während in Figur 3 zwei Kreise je zwei Seiten liefern, die beiden andern je nur eine.

Es folgen mehrere weitere Möglichkeiten, bei denen der ursprünglich zusammenhängende Bereich  $B$  in zwei, drei oder vier getrennte Theile zerfällt, die wir dann etwa als Bereiche  $B, B', \dots$  unterscheiden können. In Figur 4 hat man es mit einem Fünfeck und einem Dreieck

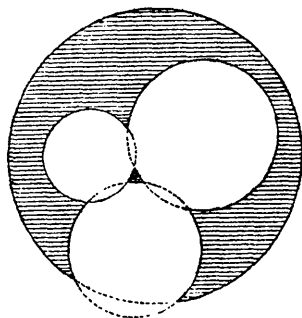


Fig. 4.

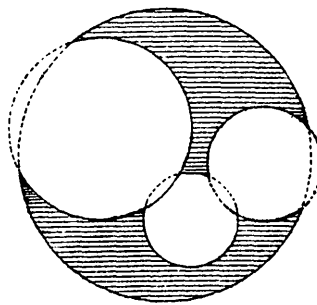


Fig. 5.

zu thun, in Figur 5 mit zwei Vierecken, in Figur 6 mit einem Viereck und zwei Dreiecken und endlich in Figur 7 mit vier Dreiecken. Dass

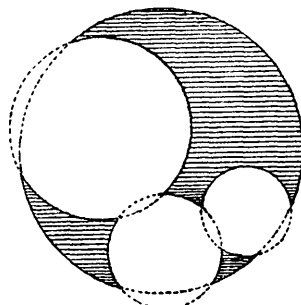


Fig. 6.

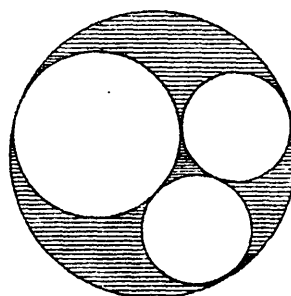


Fig. 7.

hierbei sämtliche Winkel der Dreiecke gleich 0 gewählt wurden, ist nur particulär; in Folge dieser Annahme liesse sich Figur 7, wie schon angedeutet, als Grenzfall von Figur 1 ansehen.

Sobald *Dreiecke* als Theile des Gesamtbereichs  $B$  auftreten, hat man zu unterscheiden, ob dieselben von der ersten oder dritten Art sind\*), was späterhin besonders folgerichtig wird. Im Uebergangsfall von der ersten zur dritten Art hat sich das Dreieck auf einen Punkt zusammengezogen; dieser Fall kommt in den obigen Figuren nicht zur Darstellung, soll aber späterhin volle Berücksichtigung finden. —

\*) Es wird hier und später von der Bezeichnungsweise der „Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen“ von Klein und dem Verf. (Bd. I, Leipzig, 1890) Gebrauch gemacht, auf welche der Kürze halber verwiesen werden muss.

Man macht nun das Vierseit  $B$  in einer nachgerade sehr bekannten Art, nämlich durch immer wiederholte *Spiegelung* an den Randkreisen zum Ausgangsraum eines ganzen Netzes von Bereichen  $B, B_1, B_2, \dots$ , welches die  $\xi$ -Ebene sei es theilweise, sei es ganz bedeckt. Es wird solcherweise zur Vorbereitung künftiger functionentheoretischer Untersuchungen der rein geometrische Inhalt des *Principes der Symmetrie* auf die vorgelegten Ausgangsbereiche  $B$  zur Anwendung gebracht. Die Abgrenzung für die folgende Untersuchung wird so getroffen, dass das Bereichnetz die  $\xi$ -Ebene, *wo überhaupt, nur einfach* bedecken soll. Es entspringt derart eine Vorarbeit für die Theorie der *eindeutigen* automorphen Functionen der Veränderlichen  $\xi$ , und man könnte die zu behandelnde Frage geradezu so stellen, dass es sich um Angabe derjenigen Vierseite  $B$  handeln soll, welche Discontinuitätsbereiche für die Gruppen linearer  $\xi$ -Substitutionen sind, die aus den Spiegelungen an den vier Kreisen  $K_1, \dots, K_4$  entspringen. Der Begriff des Discontinuitätsbereichs ist hierbei in jenem Sinne gebraucht, welchen derselbe innerhalb der Theorie der *eigentlich* discontinuirlichen Gruppen besitzt.

Die Methode der nachfolgenden Untersuchung besteht in einer ausführlichen und übrigens rein geometrischen Betrachtung der Bereichnetze  $B, B_1, \dots$ . Dabei haftet das Hauptinteresse am *Grenzgebilde* des einzelnen Netzes, dessen Punkten man durch hinreichend weit getriebenen Spiegelungsprocess zwar beliebig nahe kommen kann, ohne sie indessen im *endlichen* Progress je zu erreichen. Die hierauf bezüglichen Betrachtungen gestalten sich bei den aus *drei* Spiegelungen zu erzeugenden Gruppen noch verhältnissmässig inhaltsarm, weil man es hier stets mit sogenannten Hauptkreisgruppen zu thun hat, sofern überhaupt Gruppen mit unendlich vielen Grenzpunkten vorliegen. Demgegenüber weisen die Gruppen der Vierseite stets unendlich viele Grenzpunkte auf, und der Hauptkreisfall ist ganz particulär; es wird sich vielmehr eine ganze Reihe höchst verschiedenartiger Grenzgebilde entsprechend den verschiedenen Typen Figur 1 bis 7 ergeben, und es ist Hauptzweck unserer Betrachtungen, der wunderbaren Eigenart dieser Grenzgebilde nachzugehen, soweit dies mit den einfachen Hilfsmitteln der unmittelbaren geometrischen Anschauung möglich ist.

Ehe indess an die hiermit gekennzeichnete Untersuchung gegangen werden kann, ist es nöthig betreffs der *Invarianten der Kreisbogenvierseite* die nachfolgende Entwicklung vorauszusenden\*).

\*) Es handelt sich hierbei um einen Specialfall einer allgemeinen Theorie der Invarianten von Fundamentalbereichen oder Gruppen, welche neuerdings eine besondere Förderung gefunden hat durch die Arbeit von Vogt, *Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre*, Annales de l'Ecole Normale, serie 3, Bd. 6 (1889).

## II. Die Invarianten der Kreisquadrupel. Rationalitätsbereich der Substitutionscoefficienten.

Die vier Kreise  $K_1, \dots$  mögen vorab eine ganz beliebige Lage in der  $\xi$ -Ebene haben, ohne schon jetzt nothwendig einen zusammenhängenden Bereich einzugrenzen. Von den so entspringenden Figuren kommen hier nur die Eigenschaften in Betracht, welche invariant gegenüber einer beliebigen Transformation der directen oder indirecten Kreisverwandtschaft sind. Der einzelne Kreis hängt aber von drei reellen Constanten ab, das Kreisquadrupel also von zwölf. Da es andererseits  $\infty^6$  Transformationen der Kreisverwandtschaft giebt, so folgt: *Die Kreisquadrupel  $K_1, \dots$  besitzen gegenüber den Kreisverwandtschaften sechs reelle Invarianten.*

Um dieselben in zweckmässiger Art analytisch zu fixiren, führe man die zu den vier Kreisen  $K_1, \dots$  gehörenden Spiegelungen  $V_1, V_2, \dots$  ein und schreibe explicite:

$$(1) \quad \xi' = V_m(\xi) = \frac{\alpha_m \bar{\xi} + \beta_m}{\gamma_m \bar{\xi} - \bar{\alpha}_m}, \quad \alpha_m \bar{\alpha}_m + \beta_m \gamma_m = 1;$$

hierbei sind  $\beta$  und  $\gamma$  reell,  $\alpha$  und  $\bar{\alpha}$  ebenso wie  $\xi$  und  $\bar{\xi}$  conjugirt imaginär; durch die rechts zugefügte Gleichung sind die Substitutionscoefficienten bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel bestimmt.

Man verstehe nun unter  $m$  und  $n$  irgend zwei unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 und bilde die Substitution erster Art  $V_m V_n$ . Die Summe des ersten und vierten Coefficienten in der letzteren, die  $2j_{mn}$  heissen möge, hat bekanntermaassen Invarianteneigenschaft, und in der That können die durch:

$$(2) \quad 2j_{mn} = \alpha_m \bar{\alpha}_n + \alpha_n \bar{\alpha}_m + \beta_m \gamma_n + \beta_n \gamma_m$$

gegebenen sechs Grössen  $j_{12}, \dots, j_{34}$  als die gesuchten sechs reellen Invarianten des Kreisquadrupels  $K_1, \dots$  dienen, insofern nämlich die Unabhängigkeit dieser sechs Grössen von einander bei den folgenden Betrachtungen leicht evident werden wird.

Zur geometrischen Interpretation der Invarianten  $j_{mn}$  projicire man die  $\xi$ -Ebene stereographisch auf eine Kugel und setze die letztere zur Fundamentalfäche einer auf den Raum bezogenen projectiven Maassbestimmung. Die Kreise  $K_m, K_n$  werden auf der Kugel durch zwei Ebenen ausgeschnitten, und es ist der mit richtigem Zeichen versehene Cosinus des Winkels dieser beiden Ebenen gleich  $j_{mn}$ . Aus der conformen Beziehung der Kugel auf die  $\xi$ -Ebene folgt weiter für die gewöhnliche Maassbestimmung innerhalb der letzteren Ebene: *berühren einander die Kreise  $K_m$  und  $K_n$ , so ist  $\pm j_{mn} = 1$ , schneiden sie sich, so ist  $\pm j_{mn}$  gleich dem Cosinus des Schnittwinkels.*

Mit Angabe des Kreisquadrupels sind die Invarianten einzeln erst bis auf das Vorzeichen bestimmt, so jedoch, dass das Vorzeichen von  $(j_{mn} \cdot j_{np} \cdot j_{pm})$  von vornherein mit dem Quadrupel gegeben ist. Man könnte daraufhin z. B. bei  $j_{12}, j_{13}, j_{14}$  die Vorzeichen willkürlich wählen, worauf sie bei den drei übrigen Invarianten bestimmt sind.

Fasst man alle mit einander kreisverwandten Quadrupel in eine Classe zusammen, so gilt der Satz, dass ein überhaupt vorkommendes Werthsystem der  $j_{mn}$  auch nur eine einzige Classe eindeutig definirt. Man bringt diesen Satz dadurch zum Nachweise, dass man durch zweckmässige Einzelvorschriften aus der einzelnen Classe ein möglichst günstig gelegenes Quadrupel herausgreift, um für diese Lage die Substitutionscoefficienten in (1) aus den  $j_{mn}$  zu berechnen. Kommt man dabei zu lauter kreisverwandten Möglichkeiten für das System der  $V_1, \dots, V_4$ , so definiren die  $j_{mn}$  eben nur eine Classe.

Bei diesen Rechnungen schreibe man unter Trennung des Reellen vom Imaginären  $\alpha_m = \alpha'_m + i\alpha''_m$  und  $\xi = \xi + i\eta$ ; es wird alsdann:

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha_m'^2 + \alpha_m''^2 + \beta_m \gamma_m &= 1, \\ 2j_{mn} &= 2\alpha'_m \alpha'_n + 2\alpha''_m \alpha''_n + \beta_m \gamma_n + \beta_n \gamma_m, \end{aligned}$$

und die Gleichung des Kreises  $K_m$  gewinnt die Gestalt:

$$(4) \quad \gamma_m(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha'_m \xi - 2\alpha''_m \eta - \beta_m = 0.$$

Es kommen überdies in den folgenden Formeln zwei rationale ganze Verbindungen der  $j_{mn}$  vor, die hier vorab erklärt werden mögen. Ist  $m, n, p, q$  irgend eine Anordnung der Indices 1, 2, 3, 4, so definire man erstlich die Invariante  $j_m$  durch die Gleichung:

$$(5) \quad j_m = -1 + j_{np}^2 + j_{qp}^2 + j_{qn}^2 - 2j_{np}j_{pq}j_{qn}.$$

Die im Verlaufe der folgenden Rechnungen leicht zu bestätigende Bedeutung der Invarianten  $j_m$  ist die, dass  $j_m$  positiv, negativ oder gleich null ist, je nachdem die drei Kreise  $K_n, K_p, K_q$  einen reellen oder imaginären Orthogonalkreis haben oder durch einen Punkt gehen. Endlich ist die besonders wichtige Invariante:

$$(6) \quad j = - \begin{vmatrix} 1 & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{12} & 1 & j_{23} & j_{24} \\ j_{13} & j_{23} & 1 & j_{34} \\ j_{14} & j_{24} & j_{34} & 1 \end{vmatrix}$$

zu nennen, welche in den  $j_{mn}$  vom vierten Grade ist. Die geometrische Bedeutung derselben ist, wie wir hier gleichfalls vorgreifend angeben wollen, die folgende: Das Verschwinden von  $j$  ist charakteristisch dafür, dass die vier Kreise  $K_1, \dots$  einen gemeinsamen Orthogonal- oder Hauptkreis haben, der aber sowohl reell wie punktförmig oder imaginär sein mag; die Grösse  $j$  soll dementsprechend als Hauptkreisinvariante

bezeichnet werden. Liegt der Hauptkreisfall nicht vor, so ist  $j$  stets positiv. Die vier Grössen  $j_m$  stellen sich als die ersten Unterdeterminanten von (6), genommen nach den Elementen der Diagonale, dar. \*)

Zur Ausführung der vorhin in Aussicht genommenen Rechnung nehmen wir *erstlich* an, dass  $K_1, K_2, K_3$  einen reellen Orthogonalkreis haben. Letzterer soll alsdann die reelle  $\xi$ -Axe sein und  $K_1$  insbesondere die imaginäre; für  $K_2$  schreiben wir vor, dass dieser Kreis durch den Punkt  $\xi = 1$  hindurchzieht, und dass sein Mittelpunkt zwischen  $\xi = 0$  und  $\xi = 1$  liegt. Man nehme alsdann  $j_{12}$  positiv und verstehe unter  $u_{11}, u_{12}, \dots$  die mit richtigem Vorzeichen versehenen dreigliedrigen Unterdeterminanten der positiv genommenen Determinante (6), so dass im speciellen  $u_{nn} = j_n$  wird. Für die vier Spiegelungen  $V_1, \dots, V_4$  ergeben sich alsdann nach leichter Zwischenrechnung die Gestalten:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1(\xi) = -\bar{\xi}, \quad V_2(\xi) = \frac{j_{12}\bar{\xi} + 1 - j_{12}}{(1 + j_{12})\bar{\xi} - j_{12}}, \\ V_3(\xi) = \frac{j_{13}\bar{\xi} + \frac{j_{23} - j_{12}j_{13} + V\bar{j}_4}{1 + j_{12}}}{\frac{j_{23} - j_{12}j_{13} - V\bar{j}_4}{1 - j_{12}}\bar{\xi} - j_{13}}, \\ V_4(\xi) = \frac{\frac{j_{14}V\bar{j}_4 + iV\bar{j}}{V\bar{j}_4}\bar{\xi} + \frac{u_{34} + (j_{24} - j_{12}j_{14})V\bar{j}_4}{(1 + j_{12})V\bar{j}_4}}{\frac{-u_{34} + (j_{24} - j_{12}j_{14})V\bar{j}_4}{(1 - j_{12})V\bar{j}_4}\bar{\xi} - \frac{j_{14}V\bar{j}_4 - iV\bar{j}}{V\bar{j}_4}}. \end{array} \right.$$

\*) Die Formeln und Entwicklungen des Textes stehen in mannigfacher Beziehung zu Untersuchungen, welche die elementare Kreisgeometrie in der Ebene und auf der Kugeloberfläche betreffen. Identificirt man  $j_{12}, j_{23}, j_{31}$  mit den Cosinus der Seiten eines sphärischen Dreiecks, so wird  $V\bar{j}_4$  im Sinne v. Staudt's der Sinus jener dreiseitigen Ecke, deren Ebenen die Kreise  $K_1, K_2, K_3$  auf der Kugel ausschneiden (siehe darüber v. Staudt in Bd. 24 von *Crelle's Journal* oder Baltzer's Determinantentheorie, pag. 199). Sollen die  $j_{mn}$  somit genau die Bedeutung des Textes behalten, so müsste man vom ersten sphärischen Dreieck zum reciproken gehen. Man vergl. ferner die Arbeiten von Frobenius, *Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maasses*, Crelle's Journ. Bd. 79 und von Study, *Ueber Distanzrelationen*, Schlömilch's Zeitschrift Bd. 27, wo weitere in Betracht kommende Arbeiten von Darboux und d'Ovidio genannt sind. Die im Texte zur Geltung gekommene Art symmetrischer Determinanten findet sich übrigens bereits bei Schering in den Göttinger Nachrichten von 1870 und 1873 bei Gelegenheit von Untersuchungen in nicht-euklidischen Räumen. Vor allem aber muss hier nochmals auf die schon obengenannte Arbeit von Vogt hingewiesen werden, in welcher das Problem, Fundamentalbereiche oder Gruppen durch ihre Invarianten ein- oder endlichdeutig zu bestimmen, unter weit grösserer Allgemeinheit der Voraussetzungen und freilich unter ein wenig anderer Gedankenwendung als im Texte behandelt wird.

Die verschiedenen in diesen Formeln vorkommenden Wurzeln  $\sqrt{j_4}$  sind mit einerlei Zeichen zu nehmen, ebenso die beiden Wurzeln  $\sqrt{j}$  der letzten Formel; man wähle etwa beide Vorzeichen positiv. Den vier möglichen Zeichencombinationen entsprechend gewinnt man hier im ganzen vier Kreisquadrupel. Indessen sind dieselben mit einander kreisverwandtschaften giebt, welche  $K_1$ ,  $K_2$  und die reelle  $\xi$ -Achse zugleich in sich transformiren. Bei gegebenen Invarianten ist somit die Classe der Kreisquadrupel, wie oben behauptet, eindeutig bestimmt, und man sieht zugleich, dass sich die obigen Angaben über die Bedeutung von  $j_m$  und  $j$  im vorliegenden Falle bestätigen.

Ist zweitens der Orthogonalkreis von  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  imaginär, so ist es die am meisten naturgemässe Lage, auf der Kugeloberfläche die genannten drei Kreise als grösste Kugelkreise zu wählen. Man kann daraufhin beim Rückgang zur  $\xi$ -Ebene erreichen, dass  $K_1$  der Einheitskreis wird,  $K_2$  durch die beiden Punkte  $\xi = \pm i$  zieht und  $K_3$  den Kreis  $K_1$  in zwei diametralen Punkten schneidet. Es ergeben sich bei dieser Anordnung folgende Gestalten für die vier Spiegelungen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1(\xi) = \frac{1}{\xi}, \quad V_2(\xi) = \frac{\sqrt{1-j_{12}^2}\bar{\xi} + j_{12}}{j_{12}\bar{\xi} - \sqrt{1-j_{12}^2}}, \\ V_3(\xi) = \frac{j_{23} - j_{12}j_{13} + i\sqrt{1-j_4}\bar{\xi} + j_{13}}{\sqrt{1-j_{12}^2}}, \\ \quad \frac{j_{13}\bar{\xi} - j_{23} - j_{12}j_{13} - i\sqrt{1-j_4}}{\sqrt{1-j_{12}^2}}, \\ V_4(\xi) = \frac{(j_{24} - j_{12}j_{14})\sqrt{1-j_4} - iu_{34}\bar{\xi} + j_{14}\sqrt{1-j_4} + \sqrt{j}}{\sqrt{1-j_4}\sqrt{1-j_{12}^2}} + \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{1-j_4}}, \\ \quad \frac{j_{14}\sqrt{1-j_4} - \sqrt{j}}{\sqrt{1-j_4}}\bar{\xi} - \frac{(j_{24} - j_{12}j_{14})\sqrt{1-j_4} + iu_{34}}{\sqrt{1-j_4}\sqrt{1-j_{12}^2}}; \end{array} \right.$$

hierbei sind wieder alle auftretenden Wurzeln  $\sqrt{1-j_{12}^2}$  von einerlei Zeichen zu nehmen, desgleichen alle  $\sqrt{1-j_4}$  und  $\sqrt{j}$ . Da  $K_2$  durch obige Vorschrift erst zweideutig bestimmt ist, so musste im Ausdruck von  $V_2$  eine Quadratwurzel auftreten. Die zwei weiteren Quadratwurzeln müssen sich dann noch deshalb einfinden, weil wieder  $K_1$  und  $K_2$  unter Wahrung des gemeinsamen (imaginären) Orthogonalkreises durch zwei Transformationen der directen und zwei der indirecten Kreisverwandtschaft in sich übergehen. Die obigen Angaben über die Vorzeichen von  $j_4$  und  $j$  haben sich auch hier bestätigt.

Auch wenn drittens  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  einen Punkt gemeinsam haben, bestätigt man wieder leicht durch Rechnung, dass zu jedem System  $j_{mn}$  nur eine Classe kreisverwandter Quadrupel gehört. Bei den bezüglichen Formeln, die hier nicht ausführlich wiedergegeben werden, tritt



freilich die Bedingung  $j \geq 0$  nicht in Evidenz; doch ergibt sich dieselbe hier aus der leicht zu bestätigenden Identität:

$$(9) \quad j(1 - j_{12}^2) = u_{34}^2 - j_3 j_4,$$

wenn man beachtet, dass gegenwärtig  $j_3 = 0$  und  $-1 < j_{12} < +1$  ist. Allgemein folgt aus dem Bisherigen: *Die Bedingung  $j \geq 0$  ist nicht nur eine nothwendige, sondern es giebt auch umgekehrt zu jedem dieselbe befriedigenden Werthsystem der Invarianten eine und nur eine Classe kreisverwandter Quadrupel.* —

Aus den später allein zur Geltung kommenden Kreisquadrupeln lässt sich stets wenigstens ein Tripel mit reellem Orthogonalkreis herausgreifen. Nennt man die Kreise dieses Tripels  $K_1, K_2, K_3$ , so können die Substitutionen (7) als die Normalgestalten der erzeugenden Substitutionen der später zu betrachtenden Gruppen gelten. Man sieht, dass die Coefficienten dem etwa durch  $[j_{12}, \dots, j_{34}]$  oder kurz  $[j_m]$  zu bezeichnenden Rationalitätsbereiche angehören, dem aber noch die beiden Quadratwurzeln  $\sqrt{j}$  und  $\sqrt{j_4}$  adjungirt sind. Diese letzteren Irrationalitäten kann man durch Transformation nicht mehr entfernen, ohne dass an ihrer Stelle neue eingeführt würden. Um dies zu zeigen, betrachte man zuvörderst die drei Kreise  $K_1, K_2, K_3$  und dementsprechend die Irrationalität  $\sqrt{j_4}$ . Wäre es möglich, die letztere ohne Einführung einer neuen Irrationalität durch Transformation zu entfernen, so würden  $V_1, V_2, V_3$  in der neuen Gestalt Coefficienten des Bereichs  $[j_{12}, j_{13}, j_{23}]$  haben, die also reell sind. Nach Festlegung der Kreise  $K_1, K_2$  ist aber  $K_3$  durch die Forderung *reeller* Coefficienten erst *zweideutig* bestimmt\*), und man stellt durch eine elementare Zwischenrechnung fest, dass die Discriminante der hier eintretenden quadratischen Gleichung gleich  $j_4$ , multiplicirt mit einem in den Coefficienten von  $V_1$  und  $V_2$  *quadratischen* Ausdruck, ist; die Wurzel  $\sqrt{j_4}$  lässt sich also auf keine Weise mehr entfernen. Eine analoge Betrachtung gilt bei Hereinnahme des Kreises  $K_4$  für die Irrationalität  $\sqrt{j}$ .

Beachtet man nun, dass der Rationalitätsbereich einer Gruppe durch ihre Erzeugenden bereits festgelegt ist, so folgt: *Durch zweckmässige Auswahl des Quadrupels  $K_1, \dots$  aus seiner Classe kreisverwandter Quadrupel kann man als denkbar einfachsten Rationalitätsbereich für die Substitutionscoefficienten der Gruppe:*

$$[j_{12}, j_{13}, \dots, j_{34}, \sqrt{j}, \sqrt{j_4}]$$

*erreichen.* Zu bemerken bliebe hier nur noch, dass  $\sqrt{j_4}$  auch durch irgend eine der drei anderen Wurzeln  $\sqrt{j_m}$  ersetzt werden könnte,

\*) Geometrisch folgt dies aus der Existenz einer elliptischen Substitution der Periode zwei, welche  $K_1, K_2$  und die reelle Axe zugleich in sich transformirt.

sofern das gewählte  $j_m > 0$  ist; doch ist diese Aenderung des Rationalitätsbereiches nur durch eine *irrationale*, und zwar im allgemeinen *complexe* Transformation der Gruppe zu erzielen. —

### III. Der Raum $R_6$ der $j_{mn}$ und dessen Punktäquivalenzen. Systematische Aufsuchung aller Kreisquadrupel.

Man setze die sechs Grössen  $j_{mn}$  zu Cartesischen Coordinaten eines Raumes  $R_6$  von sechs Dimensionen und bezeichne den im  $R_6$  durch  $j = 0$  dargestellten fünfdimensionalen  $R_5$  vierten Grades als *Hauptkreisraum*. Der durch die Bedingung:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{12} & 1 & j_{23} & j_{24} \\ j_{13} & j_{23} & 1 & j_{34} \\ j_{14} & j_{24} & j_{34} & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

dargestellte Theil der  $R_6$  soll als *das Innere des Hauptkreisraumes* bezeichnet werden; hierbei sind also die Punkte des  $R_5$  selbst mitgerechnet.

Das Innere des Hauptkreisraumes ist 1-8-deutig auf die Mannigfaltigkeit aller Classen von Kreisquadrupeln bezogen, insofern wir ja die Vorzeichen z. B. bei den drei Grössen  $j_{12}, j_{13}, j_{14}$  noch willkürlich wählen dürfen. Legt man überdies kein Gewicht auf die Reihenfolge  $K_1, K_2, K_3, K_4$  der Kreise, so kommen noch 24 Permutationen der Coordinaten  $j_{mn}$  hinzu (den Vertauschungen der unteren Indices 1, 2, 3, 4 entsprechend), die Punkte mit gleichen Classen verbinden.

Man gehe nun gleich noch einen Schritt weiter und ziehe im einzelnen Falle die aus  $V_1, \dots, V_4$  zu erzeugende Gruppe  $\Gamma$  in Betracht, wobei in einander transformirbare Gruppen  $\Gamma$  in eine Classe zusammengefügt werden und als nicht wesentlich verschieden gelten. *Dem einzelnen Punkte des  $R_6$  gehört in diesem Sinne nur eine Gruppe zu; umgekehrt gehört zur einzelnen Gruppe  $\Gamma$  immer ein System von unendlich vielen Punkten des  $R_6$ , welche letztere nunmehr mit einander äquivalent heissen sollen.* Wenn man nämlich beim zunächst vorgelegten Quadrupel den Kreis  $K_n$  durch sein längs  $K_m$  entworfenen Spiegelbild  $K_n'$  ersetzt, so wird offenbar  $K_m, K_n', K_p, K_q$  zu der gleichen Gruppe  $\Gamma$  führen. Dieser Ersatz hat aber zufolge leichter Rechnung für die Invarianten die rationale Transformation:

$$(2) \quad \begin{cases} j'_{np} = 2j_{mn}j_{mp} - j_{np}, & j'_{nq} = 2j_{mn}j_{mq} - j_{nq}, \\ j'_{m'n} = j_{mn}, & j'_{mp} = j_{mp}, & j'_{mq} = j_{mq}, & j'_{pq} = j_{pq} \end{cases}$$

zur Folge. Indem man aber die 12 verschiedenen, in diesen Ausdruck zusammengefassten Transformationen wiederholt ausübt, ergeben

sich aus einem bereits unendlich viele äquivalente Punkte. Doch gewinnt man, wie nebenbei bemerkt sein mag, auf diese Weise nur erst dann die gesammten mit einem äquivalenten Punkte, wenn  $\Gamma$  eigentlich discontinuirlich ist und an elliptischen Substitutionen höchstens solche der Perioden 2, 3, 4, 6 besitzt.

Was man ein *reducirtes Quadrupel* nennen wird, ist im Falle einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe  $\Gamma$  unmittelbar klar: *die vier Kreise desselben müssen einen Discontinuitätsbereich von  $\Gamma$  eingrenzen.* Aber die Gesammtheit der „reducirten“ Punkte des  $R_6$  ergibt kein sehr übersichtliches Gebilde, insofern es sich hierbei nur insoweit um ein Punktcontinuum handelt, als in  $\Gamma$  keine elliptischen Substitutionen vorkommen.

Um bei dieser Sachlage auf den Gebrauch der Invarianten  $j_{mn}$  eine systematische Aufstellung aller Kreisquadrupel bez. aller reducirtten Quadrupel zu gründen, wird man daher zweckmässig in folgender Art eine Theilung der Aufgabe vollziehen. Man fasse alle Quadrupel, bei denen etwa die vier Invarianten  $j_{12}, j_{23}, j_{34}, j_{41}$  specielle Werthe  $j_{12}^{(0)}, j_{23}^{(0)}, \dots$  haben, in eine *Gattung* zusammen und untersuche jede einzelne Gattung für sich. Durch  $j_{12} = j_{12}^{(0)}, \dots, j_{41} = j_{41}^{(0)}$  ist im  $R_6$  eine Ebene dargestellt, welche den Hauptkreisraum in einer Curve vierter Ordnung  $C_4$  schneidet. Letztere zerlegt die genannte Ebene in eine Reihe von Parcellen, in denen abwechselnd  $j > 0$  und  $j < 0$  ist; nur die Parcellen mit  $j > 0$  liefern Kreisquadrupel, und die Punkte derselben sind dann weiter im

einzelnen darauf zu untersuchen, ob sie reducirtte Quadrupel liefern oder nicht.

Für später ist der Fall eines eigentlichen Vierecks besonders wichtig. Damit das Viereck Discontinuitätsbereich ist, müssen bekanntlich seine Winkel aliquote Theiler von  $\pi$  sein; und die Gesammtheit der hiermit gemeinten Gattungen von Vierecken strebt dem Grenzfall der Vier-

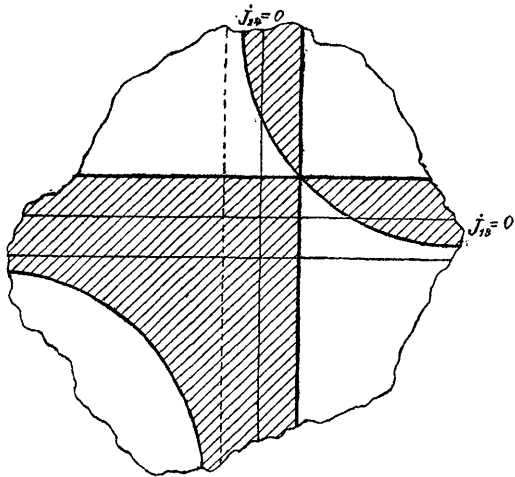


Fig. 8.

ecke mit vier Winkeln null mehr und mehr zu. Dieser Grenzfall, für welchen der übereinstimmende Werth von  $j_{12}, j_{23}, j_{34}, j_{41}$  gleich 1 wird, möge die in Rede stehenden Verhältnisse noch ein wenig näher erläutern.

In dem gekennzeichneten Falle ist die Gleichung der  $C_4$ :

$$(3) \quad (1 - j_{13})(1 - j_{24})[4 - (1 + j_{13})(1 + j_{24})] = 0;$$

dieselbe bewirkt die in Figur 8 (vorige Seite) dargestellte Theilung der Ebene, wobei die Punkte der schraffirten Theile Kreisquadrupel liefern. Nach II (7) berechnen sich die Gleichungen der vier Kreise  $K$ , wie folgt:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = 0, \xi^2 + \eta^2 - \xi = 0, (1 + j_{13})(\xi^2 + \eta^2) - 2j_{13}\xi - (1 - j_{13}) = 0, \\ (3 - j_{13} - j_{24} - j_{13}j_{24})(\xi^2 + \eta^2) - 2(1 - j_{13})\xi - 2\sqrt{j}\eta \\ \quad + (1 - j_{13})(1 - j_{24}) = 0, \end{cases}$$

wodurch jedem Punkte eines schraffirten Bereiches der Figur 8 sein Kreisquadrupel zugeordnet ist. Mit Hülfe dieser Gleichungen ist es nun leicht, die Ebenentheilung der Figur 8 näher zu discutiren.

Ist  $j_{13} > 1$ , so sind die Kreise  $K_1$  und  $K_3$  durch  $K_2$  von einander getrennt; es folgt, dass die beiden nach rechts und nach oben von  $j_{13} = j_{24} = 1$  auslaufenden schraffirten Parcellen reducirte Quadrupel nicht liefern können. Der durch den unteren Hyperbelbogen und die beiden Geraden  $j_{13} + 1 = 0$  und  $j_{24} + 1 = 0$  eingegrenzte Bereich liefert Punkt für Punkt reducirte Quadrupel; und zwar gewinnen wir, falls wir von den beiden Geraden im Augenblick absehen, ein Paar nicht zerfallender Vierecke  $B, B'$  nach Art der Figur 5. Ist entweder  $j_{13} + 1 = 0$  oder  $j_{24} + 1 = 0$ , so zerfällt eines der beiden Vierecke in zwei Dreiecke, und für  $j_{13} = j_{24} = -1$  haben wir direct den Fall der Figur 7. Hat man  $j_{13} > -1$ , so sind die Punkte mit reducirten Quadrupeln auf unendlich vielen zu  $j_{13} = 0$  parallelen Geraden gelegen, welche die Gerade  $j_{13} + 1 = 0$  zur Grenze haben, es sind dies die Geraden  $j_{13} = 0, = -\frac{1}{2}, = -\frac{1}{\sqrt{2}}, = -\cos\frac{\pi}{5}, \dots$ . Wie man später sieht, liefern für  $j_{24} \leq -1$  die sämtlichen Punkte dieser Geraden reducirte Quadrupel; für  $j_{24} > -1$  kommen indessen nur die Schnittpunkte mit einem analog gelegenen zu  $j_{24} = 0$  parallelen Geraden-system zur Geltung. Im ersteren Falle ist eines der beiden Vierecke  $B, B'$  in ein Paar von Dreiecken (mit reellen Orthogonalkreisen) ausgeartet, im letzteren Falle aber beide Vierecke. Für positive Werthe  $j_{13}$  oder  $j_{24}$  können niemals reducirte Quadrupel eintreten. —

#### IV. Das Bereichnetz und dessen Grenzgebilde für den Fall eines vierfach zusammenhängenden Bereiches $B$ ohne Ecken.

Nach den bisherigen Vorbereitungen gehen wir zum eigentlichen Gegenstande der Untersuchung und besprechen erstlich das aus einem vierfach zusammenhängenden Bereich  $B$  (nach Art der Figur 1) entspringende Netz. Wir denken dabei den Ausgangsbereich  $B$  so gelegen,

dass der Punkt  $\xi = \infty$  im Innern desselben liegt. Man entwerfe nun zugleich an den vier Kreisen je ein Spiegelbild  $B_1, \dots, B_4$  von  $B$ , worauf weitere  $4 \cdot 3$  Kreise offen bleiben. An letzteren erzeuge man aufs neue zugleich je einen neuen Bereich  $B_5, \dots, B_{16}$  und fahre so fort. *Nach dem  $n^{\text{ten}}$  Schritte des so eingeleiteten Spiegelungsverfahrens hat man ein zusammenhängendes Netz von  $(2 \cdot 3^n - 1)$  Bereichen, während die Gesamtzahl der offenen Kreise auf  $4 \cdot 3^n$  angewachsen ist; diese  $4 \cdot 3^n$  Kreise verlaufen durchaus getrennt von einander.*

Man gehe nun zur Grenze  $n = \infty$  über und wird im Verlauf der folgenden Rechnungen sehen, dass für  $\lim. n = \infty$  die Radien der  $4 \cdot 3^n$  Kreise gegen 0 convergiren. Die  $4 \cdot 3^n$  Kreise liefern also für  $\lim. n = \infty$  unendlich viele Punkte der  $\xi$ -Ebene, welche bei der fortschreitenden Bedeckung derselben mit Bereichen niemals erreicht werden können. Das hiermit gemeinte Punktsystem ist also das *Grenzgebilde* des Bereichnetzes im vorliegenden Falle. *Das Grenzgebilde besteht gegenwärtig aus einer durchaus discontinuirlichen Punktmannigfaltigkeit ohne Inhalt.\*)*

Die erstere Behauptung, nämlich dass wir hier mit einem durchaus discontinuirlichen Punktsystem zu thun haben, beweist man so: Sind  $\xi$  und  $\xi'$  zwei von einander verschiedene Grenzpunkte, so sei  $\delta$  deren Entfernung;  $\delta$  ist eine von null verschiedene, aber vielleicht sehr kleine Zahl. Man kann nun die oben gemeinte Zahl  $n$  so gross annehmen, dass die Durchmesser sämtlicher  $4 \cdot 3^n$  Kreise  $< \delta$  sind. Die Punkte  $\xi$  und  $\xi'$  liegen dann in verschiedenen unter den  $4 \cdot 3^n$  Kreisen und sind sonach durch einen von Grenzpunkten gänzlich freien Bereich der  $\xi$ -Ebene von einander getrennt.

Die zweite Behauptung, nämlich dass es sich hier um ein Punktsystem ohne Inhalt handelt, kommt darauf hinaus, dass der Gesamteinhalt der  $4 \cdot 3^n$  offenen Kreise für  $\lim. n = \infty$  gegen null convergirt. Es wird dies durch eine leichte Zwischenbetrachtung bewiesen, der wir folgende Bemerkung vorausschicken. Die Invarianten  $j_{mn}$  sind gegenwärtig sämtlich absolut  $> 1$ , die vier Invarianten  $j_m$  sind positiv, und man stellt leicht fest, dass die vier Producte  $(j_{mn} \cdot j_{np} \cdot j_{pm})$  negativ sind. Man nehme nun die Wurzeln  $\sqrt{j_m}$ ,  $\sqrt{j_{mn}^2 - 1}$  positiv und bilde die 24 Ausdrücke:

$$(1) \quad h_{mnpq} = \frac{\sqrt{j_q} + \sqrt{j_{mn}^2 - 1}}{j_{mn}j_{mp} - j_{np} + j_{mp}\sqrt{j_{mn}^2 - 1}},$$

unter der Vorschrift, dass beim einzelnen Ausdruck  $j_{mn}$  und  $j_{mp}$  positiv

\*) Es ist bei Gegenständen dieser Art hier zumeist von der Terminologie der bekannten von Hrn. G. Cantor begründeten Mannigfaltigkeitslehre Gebrauch gemacht.

und also  $j_{np}$  negativ sein sollen. Da man vermöge der Definitionsgleichung II (5) von  $j_q$  leicht die Ungleichung  $(j_{mn}j_{mp} - j_{np}) > \sqrt{j_q}$  bestätigt, und da  $j_{mp} > 1$  ist, so stellen die 24 Zahlen  $h$  lauter *positive echte Brüche* dar; der grösste unter ihnen habe den Werth  $e$ .

Wir mögen nun im Verlaufe des Spiegelungsverfahrens bis zu einem offenen Kreise  $K_m$  gekommen sein, mit dem Inhalte  $J_m$ , der beim nächstfolgenden Schritte durch die drei offenen Kreise  $K_n, K_p, K_q$  mit den Inhalten  $J_n, J_p, J_q$  ersetzt erscheint; die Invarianten dieses Quadrupels sind natürlich wieder die anfänglichen  $j_{mn}$ . Durch eine Parallelverschiebung und eine Aehnlichkeitstransformation kann man  $K_m$  zum Einheitskreise der  $\xi$ -Ebene machen; die Verhältnisse der Kreisinhalte bleiben hierbei unverändert.

Es giebt nun  $\infty^3$   $\xi$ -Substitutionen, welche den Einheitskreis  $K_m$  in sich transformiren; man denke  $K_n, K_p, K_q$  an diesen Transformationen theilnehmend. Dabei wird es eine Transformation oder vielmehr gleich  $\infty^1$  Transformationen geben, für welche der Gesamttinhalt  $(J_n + J_p + J_q)$  ein absolutes Maximum ist. Wäre eine der drei Invarianten  $j_{mn}, j_{mp}, j_{mq}$  absolut  $= 1$ , so wäre dieses Maximum gleich  $J_m$  und würde freilich durch  $\xi$ -Substitutionen mit *endlichen* Coefficienten nie völlig erreicht werden können. Im vorliegenden Falle  $j_{mn}^2 > 1$  liefert der fragliche Maximalinhalt, durch  $J_m$  dividirt, einen von 1 verschiedenen echten Bruch, der sich mit Hülfe der obigen Zahlen  $h$  bez.  $e$  näher umgrenzen lässt.

Man wähle nämlich unter den  $\infty^3$  genannten  $\xi$ -Substitutionen eine solche, durch deren Ausübung  $K_n$  mit  $K_m$  concentrisch wird. Unter  $K_p$  und  $K_q$  möge dann etwa  $K_q$  dem Einheitskreise nicht ferner liegen als  $K_p$ ; man wolle dann die Figur um  $\xi = 0$  so lange drehen, bis der Mittelpunkt von  $K_q$  auf der reellen Axe zwischen 0 und 1 liegt. Bei dieser Anordnung berechne man aus den gegebenen Invarianten  $j_{mn}$  die Kreisgleichungen, und man wird finden, dass der dem Einheitskreise zunächst gelegene Punkt von  $K_q$  unter Benutzung von (1) gerade durch  $\xi = h_{mnpq}$  gegeben ist.

Nunmehr führe man einen Hilfskreis  $K_0$  ein, der durch  $\xi = h_{mnpq}$  hindurchzieht und seinen Mittelpunkt auf der reellen  $\xi$ -Axe hat, und zwar soweit zur Rechten von  $\xi = 0$ , dass  $K_p$  gerade noch im Innern von  $K_0$  liegt. Ist  $J_0$  der Inhalt von  $K_0$ , so ist  $J_0 > J_n + J_p + J_q$ , wobei jedoch die rechte Seite dem Werthe der linken beliebig nahe kommen kann. Nimmt auch  $K_0$  an den wiederholt genannten  $\infty^3$  Transformationen theil, so wird  $J_0$  sein Maximum erreichen, wenn  $K_0$  concentrisch mit  $K_m$  ist. Der Radius des so gewonnenen Kreises  $K_0$  ist nothwendig  $< h_{mnpq} \leq e$ , so dass die in der letzten Ungleichung gemeinte Zahl  $J_0 < e^2 \pi = e^2 J_m$  ist. Durch Rückgang zu dem anfänglichen Kreisquadrupel entspringt der Satz: *Ist  $K_m$  irgend ein Symmetrie-*

kreis des Netzes, und sind  $K_n, K_p, K_q$  die zunächst von ihm umschlossenen Kreise, so gilt für die Inhalte  $J_m, J_n, \dots$  dieser Kreise die Ungleichung:

$$(2) \quad J_n + J_p + J_q < e^2 J_m,$$

wo  $e$  der grösste unter den echten Brüchen (1) ist.

Das Ausgangsvierseit (welches den Punkt  $\xi = \infty$  enthielt) liess nun zunächst noch vier Kreise offen; einer derselben sei  $K$  und habe den endlichen Inhalt  $J$ . Die von ihm zunächst umschlossenen Kreise seien  $K_1', K_2', K_3'$  mit den Inhalten  $J_1', J_2', J_3'$ ; es ist dann:

$$J_1' + J_2' + J_3' < e^2 J.$$

Jeder dieser letzteren Kreise umschliesst demnächst drei weitere  $K_1'', K_2'', \dots, K_9''$  mit den Inhalten  $J_1'', J_2'', \dots, J_9''$ . Dann gilt einzeln  $J_1'' + J_2'' + J_3'' < e^2 J_1'$ , u. s. w., sowie im ganzen:

$$J_1'' + J_2'' + \dots + J_9'' < e^2 (J_1' + J_2' + J_3') < e^4 J.$$

Man führt diese Entwicklung analog weiter und findet für die nach dem  $n^{\text{ten}}$  Schritte erhaltenen  $3^n$  Kreise als Gesamttinhalt:

$$J_1^{(n)} + J_2^{(n)} + \dots + J_{3^n}^{(n)} < e^{2^n} J.$$

Da  $J$  endlich ist und  $e$  einen von 1 um eine *endliche* Differenz verschiedenen echten Bruch bedeutet, so convergirt der Gesamttinhalt der  $4 \cdot 3^n$  offenen Kreise für  $\lim. n = \infty$ , wie behauptet, gegen null.

Die soeben beendete Betrachtung bezog sich auf die Frage, ob die Grenzmannigfaltigkeit *Flächeninhalt* hat oder nicht. Im Hauptkreisfalle tritt an Stelle dessen die Frage nach dem *Linearinhalt* des Grenzgebildes. *Dass dieser gleichfalls null ist*, d. h. dass im Hauptkreisfalle die *Summe der  $4 \cdot 3^n$  Radien* mit  $\lim. n = \infty$  gegen 0 convergirt, ist bereits vor einiger Zeit von Weber\*) und Schottky\*\*) bewiesen.

Einige weitere Eigenschaften des Grenzgebildes sprechen sich im folgenden Satze aus: *Das Grenzgebilde stellt (im Sinne von Cantor) ein discontinuirliches Punktsystem zweiter Art vor, d. h. ein solches, von welchem keine Ableitung endlicher Ordnung verschwindet; es handelt sich zumal um eine perfecte Punktmannigfaltigkeit.* Den ersten Theil dieses Satzes beweist man so: Ist  $\xi$  ein Punkt des Grenzgebildes, so kann man den Spiegelungsprocess soweit getrieben denken, dass  $\xi$  in einem offenen Kreise liegt, dessen Durchmesser kleiner als die beliebig klein zu wählende Grösse  $\delta > 0$  ist. Der fragliche Kreis ist Symmetriekreis des Netzes, und also liegen in jeder noch so kleinen Umgebung von  $\xi$  unendlich viele weitere Punkte des Grenzgebildes. Zum Beweise des zweiten Theils obiger Behauptung verstehe man unter  $\xi$  eine

\*) In den Göttinger Nachrichten von 1886 pag. 359 ff.

\*\*) In Crelle's Journal Bd. 101, pag. 227 ff.

Häufungsstelle von Punkten des Grenzgebildes, so dass sich in jeder noch so kleinen Umgebung von  $\xi$  unendlich viele Punkte des Grenzgebildes finden lassen. Würde nun  $\xi$  durch *endlich* weit fortgesetzten Spiegelungsprocess in das Bereichnetz hineingezogen werden, so läge  $\xi$  in *endlicher* Entfernung vom nächsten Punkte des Grenzgebildes. Der Punkt  $\xi$  kann demnach im endlichen Fortschritt des Spiegelungsverfahrens nicht erreicht werden, gehört also selbst dem Grenzgebilde an.

Ein einzelner Punkt  $\xi$  des Grenzgebildes liegt bei Ausführung des Spiegelungsprocesses stets in einem bestimmten unter den  $4 \cdot 3^n$  Kreisen. Es ist hiermit vom Ausgangsbereiche  $B$  oder etwa von dessen Punkte  $\xi = \infty$  eine eindeutig bestimmte Kette von Bereichen des Netzes durchzulaufen, um auf directestem Wege sich jenem Grenzpunkte  $\xi$  anzunähern. Analytisch gesprochen approximiren wir dergestalt den fraglichen Grenzpunkt durch die unendliche Reihe der Punkte:

$$V_a(\infty), V_a V_b(\infty), V_a V_b V_c(\infty), \dots,$$

wo  $a, b, c, \dots$  Indices aus der Reihe  $1, 2, 3, 4$  bedeuten und keine zwei auf einander folgende Indices identisch sind. *Jedem Grenzpunkt entspricht solchergestalt eine eindeutig bestimmte unendliche Substitutionenkette:*

$$(3) \quad V_a V_b V_c V_d \dots,$$

und umgekehrt liefert jede derartige Kette einen Punkt des Grenzgebildes.

Es gründet sich hierauf die folgende Arteintheilung der Punkte des Grenzgebildes. Tritt in der Reihe (3) niemals eine periodische Wiederholung der unteren Indices ein, so nenne man den zugehörigen Grenzpunkt *aperiodisch*. Entsteht entweder von vorn an oder nach einer endlichen Anzahl nichtperiodischer Glieder periodische Wiederkehr der gleichen Indices, so heisse der Grenzpunkt *periodisch*; die periodischen Grenzpunkte sind Fixpunkte von Substitutionen der Gruppe und zerfallen demzufolge in hyperbolische und loxodromische Punkte. Die periodischen Grenzpunkte findet man durch Auflösen gewisser quadratischen Gleichungen, deren Coefficienten dem oben in einfachster Art festgelegten Rationalitätsbereiche der Gruppe angehören. Ein ähnlich einfaches arithmetisches Merkmal besteht für die aperiodischen Grenzpunkte nicht. Uebrigens kommen, sobald  $j > 0$  ist, loxodromische Substitutionen *stets* vor; denn zwei hyperbolische Substitutionen, deren vier Fixpunkte nicht auf einem Kreise liegen, ergeben durch Combination stets eine loxodromische Substitution, so dass für  $j > 0$  z. B. schon  $(V_1 V_2) \cdot (V_3 V_4)$  loxodromisch wird.

In der Umgebung eines periodischen Grenzpunktes kann man sich von der Structur unseres Punktsystems dadurch eine Vorstellung bilden, dass man die zugehörigen Bahncurven in Betracht zieht und die endlich entfernten Grenzpunkte längs dieser Curven in immer grössere



Nähe des fraglichen Fixpunktes verlegt. Doch wollen wir auf diese Betrachtungen, die wir im folgenden Artikel unter anderen Verhältnissen in ausgiebiger Weise anzustellen haben, nicht näher eingehen.

#### V. Das Grenzgebilde bei einem in zwei Vierecke der Winkel null zerfallendem Bereiche $B$ .

Wegen der Neuheit der eintretenden Verhältnisse ist derjenige Grenzfall des bisher betrachteten Bereiches  $B$  besonders interessant, dass  $B$  in zwei Vierecke mit lauter Winkeln null zerfällt. Es ist alsdann:

$$j_{12} = j_{23} = j_{34} = j_{41} = 1$$

und

$$j_{13} < -1, \quad j_{24} < -1$$

die charakteristische Bedingung der Invarianten, und es ist übrigens zweckmässig, von der den Gleichungen II (7) zu Grunde liegenden Gestalt des Ausgangsbereiches ein wenig abzugehen. In der That wolle man den Berührungspunkt von  $K_1$  und  $K_4$  nach  $\xi = i\infty$  transformiren, so dass  $K_1$  und  $K_4$  gerade Linien werden und der in Figur 9 schraffierte Bereich entspringt. Die Substitutionen  $V_1, V_2, V_4$  haben dann bez. die Gestalten:

$$(1) \quad \xi' = -\xi, \quad \xi' = \frac{\bar{\xi}}{2\bar{\xi} - 1}, \quad \xi' = -\bar{\xi} + 1 - j_{24},$$

ein wenig complicirter fällt  $V_3$  aus:

$$(2) \quad \xi' = \frac{\left(j_{13} - \frac{iV\bar{j}}{1-j_{24}}\right)\bar{\xi} + (1-j_{13})}{-2\frac{1-j_{13}}{1-j_{24}}\bar{\xi} - \left(j_{13} + \frac{iV\bar{j}}{1-j_{24}}\right)}.$$

In Figur 9 ist durch eine leichte geometrische Betrachtung zu zeigen, dass die drei im Endlichen gelegenen Kreisberührungspunkte auf einer Geraden liegen. Bei Rückgang zu einer beliebigen Lage des Paares der Ausgangsvierecke ergibt sich, dass die Ecken des Vierecks stets auf einem Kreise liegen; derselbe heisse  $K_0$ . Das Doppelverhältniss der vier Ecken ist somit stets reell und berechnet sich zu  $\frac{1-j_{24}}{j_{13}-1}$ . Der

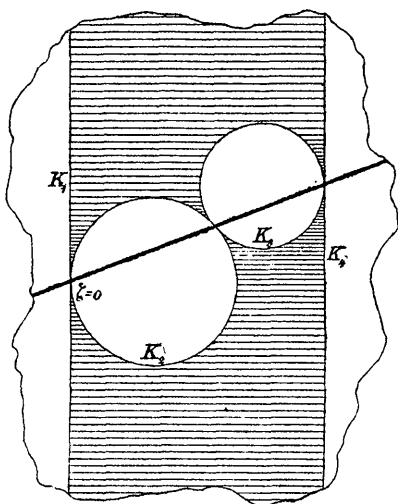


Fig. 9.

*Kreis  $K_0$  ist gegen alle Viereckseiten  $K_1, \dots$  gleich geneigt, und der spitze Schnittwinkel  $\psi$  berechnet sich zu:*

$$(3) \quad \psi = \arctan \frac{(1-j_{13})(1-j_{24})}{\sqrt{j}}$$

Im Hauptkreisfalle,  $j = 0$ , den wir als elementar ausschliessen, ist  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , und  $K_0$  wird selbst Hauptkreis.

In Figur 9 liegt eine Gestalt des Vierecks vor, in welcher zwei Seiten im Vergleich zu den beiden andern unendlich klein sind. Man wolle bemerken, dass auch ohne Zuhilfenahme des Punktes  $\xi = \infty$  unser Kreisbogenviereck in ein solches kreisverwandtes transformirt werden kann, bei welchem drei Ecken einander unendlich nahe liegen, während die vierte endlich entfernt ist. Wenn man ein solches Viereck an einem seiner beiden grösseren Kreise spiegelt, entspringt immer wieder ein Viereck, bei dem die gleichen Verhältnisse vorliegen; die Spiegelung an einem der beiden kleinen Kreise führt hingegen zu einem Viereck, dessen Seiten von gleicher Grössenordnung sind.

Wenn man nun auch von einem Viereck (oder besser Viereckpaar) ausgeht, dessen Seiten von gleicher Grössenordnung sind, stets wird sich im Verfolg des Spiegelungsprocesses eine unbegrenzte Menge von Vierecken einstellen, bei denen die gekennzeichneten abnormen Verhältnisse vorliegen. Ist nämlich  $\xi_0$  irgend eine Ecke des gewöhnlich gestalteten Vierecks, so entwerfe man an einem der beiden nach  $\xi_0$  ziehenden Randkreise ein zweites Viereck und übe auf dieses Viereckpaar die zu  $\xi_0$  gehörende parabolische Untergruppe aus. Geht man in der Reihe der von  $\xi_0$  ausstrahlenden Vierecke so weit, dass die beiden sich in  $\xi_0$  berührenden Kreise unendlich klein von *erster* Ordnung sind, so sind die beiden anderen Seiten des dann erreichten Vierecks unendlich klein von *zweiter* Ordnung, wie man mit Hülfe einer leichten Rechnung feststellt.

Die bezeichneten Umstände bedingen eine Erschwerung der Untersuchung. Ist man nämlich im Verfolg des Spiegelungsprocesses zu einem Kreise  $K_m$  gelangt, der als grösserer Kreis zwei Vierecke der abnormen Gestalt begrenzt, so wird der nächstfolgende Schritt innerhalb  $K_m$  drei neue Kreise  $K_n, K_p, K_q$  entwerfen, deren Gesamtinhalt nur noch unendlich wenig vom Inhalte des Kreises  $K_m$  abweicht. Der Satz, dass der Gesamtinhalt der 4.3<sup>n</sup> offenen Kreise mit  $\lim. n = \infty$  gegen 0 convergirt, ist also hier nicht ohne weiteres in der früheren Art beweisbar.

Indessen kann man den in Rede stehenden Satz durch eine leichte Abänderung des Spiegelungsverfahrens beweisen. Hat man nämlich irgend einen offenen Kreis  $K_m$ , so sei  $\xi_0$  einer der beiden Berührungspunkte desselben mit benachbarten Kreisen. Man übe dann wie oben

gleich die *ganze* zu  $\xi$  gehörende parabolische Untergruppe aus.  $K_m$  wird alsdann mit unendlich vielen Viereckpaaren angefüllt, wobei indes noch unendlich viele Kreise  $K_n, K_p, K'_n, K'_p, \dots$  offen bleiben. Aber der Gesamttinhalt der letzteren steht zum Inhalte von  $K_m$  in einem Verhältniss, das einen echten von 1 um eine endliche Differenz verschiedenen Bruch darstellt, und das zumal unendlich klein wird, wenn  $K_m$  ein Viereck der abnormen Gestalt als grösserer Kreis begrenzt.

Das Neue am vorliegenden Bereichnetz besteht darin, dass die  $4 \cdot 3^n$  offenen Kreise eine geschlossene Kette bilden, in welcher der einzelne Kreis jeweils nur mit zwei benachbarten in Berührung ist. Der Grenzübergang zu  $\lim. n = \infty$  vollzieht sich bis auf die vorab schon erledigte Frage ohne Schwierigkeit, und wir können sogleich folgendes Resultat formuliren: *Auch in dem jetzt vorliegenden Falle  $j_{n,n+1} = 1, j_{13} < -1, j_{24} < -1$  besteht das Grenzgebilde aus einer perfecten Punktmannigfaltigkeit ohne Inhalt; indes erscheinen die gesammten Punkte in eine durchaus zusammenhängende, einfach geschlossene Kette angereiht, und wir dürfen die letztere als Grenzcurve bezeichnen, insofern sie ja keine Flächen-, sondern nur Längenausdehnung hat. Die Grenzcurve zerlegt die  $\xi$ -Ebene in zwei Theile, deren jeder von einem Vierecksnetz völlig ausgefüllt ist, das eine von  $B$ , das andere von  $B'$  entspringend. Beide Vierecknetze sind stets unsymmetrisch, sofern wir den elementaren Fall  $j = 0$  ausschliessen.*

Die Grenzcurve, zu der wir soeben geführt wurden, zeigt einen complicirten Verlauf, und die weiterfolgenden Betrachtungen haben den Zweck, diesen Verlauf der Anschauung, soweit dies möglich ist, nahe zu legen.\*)

Wenn man im Spiegelungsprocess bis zu einem solchen  $n$  gegangen ist, dass die Durchmesser aller  $4 \cdot 3^n$  Kreise unterhalb der beliebig kleinen von 0 verschiedenen Zahl  $\delta$  liegen, so wird die Kette der  $4 \cdot 3^n$  Kreise eine angenäherte Vorstellung vom Verlauf der Grenzcurve bieten. Um den Charakter einer Curve besser hervortreten zu lassen, kann man den einzelnen Kreis durch die Sehne zwischen den beiden Berührungspunkten mit dem nächst folgenden und nächst vorhergehenden Kreise ersetzen; die Grenzcurve erscheint dann angenähert als eine aus  $4 \cdot 3^n$  Gliedern bestehende gebrochene Linie.

Man bemerke nun, dass die letztere Vorstellungsweise einer interessanten Verschärfung fähig ist. In Figur 9 wollen wir die zu  $\xi = \infty$  gehörende parabolische Untergruppe ausüben und insbesondere

\*) Der erste Hinweis auf die Existenz und Beschaffenheit derartiger Grenzcurven, die nicht die Gestalt von Kreisen haben, ist von Hrn. Klein in einem Brief an Poincaré gegeben (von letzterem in den Comptes rendus von 1881 publicirt).

die nach rechts hin sich anlagernden Viereckpaare betrachten. Dieselben lassen unendlich viele abwechselnd symmetrisch und congruent liegende Kreispaaire  $K_3', K_2', K_2'', K_3'', \dots$  offen, und wir wollen die zu den fraglichen Viereckpaaren gehörenden Kreise  $K_0', K_0'', \dots$  nur insoweit ziehen, als sie innerhalb der offenen Kreise  $K_3', K_2', \dots$  verlaufen. Man gewinnt so eine aus unendlich vielen Gliedern bestehende gebrochene Linie, wobei die an den Ecken auftretenden Winkel abwechselnd  $2\psi$  und  $2(\pi - \psi)$  sind,  $\psi$  in der Bedeutung von (3) gebraucht. Die durch das „Innere“ von  $K_4$  vom Berührungspunkt mit  $K_3$  nach  $\xi = \infty$  ziehende Sehne denke man sich durch die fragliche gebrochene Linie ersetzt. Für beliebige Lage des Vierecks verallgemeinert, kommen wir hiermit auf die obige Art zurück, einen offenen Kreis  $K_m$  nur erst unter Gebrauch der zu der einen Ecke  $\xi_0$  gehörenden parabolischen Untergruppe bis auf eine unendliche Kette offen bleibender Kreise anzufüllen. *Die Sehne von  $K_m$  erscheint alsdann durch eine gebrochene Linie ersetzt, deren einzelne Stücke Kreisbogen sind; die letzteren setzen sich (von der einen Seite gesehen) abwechselnd unter concaven und convexen Winkeln der constanten Grössen  $2\psi$  und  $2(\pi - \psi)$  an einander.* Die Radien der einzelnen Bogenstücke  $K_0', K_0'', \dots$  convergiren bei Annäherung an  $\xi_0$  gegen null; aber sie werden unendlich im Vergleich zu den Radien der beiden offenen Kreise  $K_n', K_p', K_p'', K_n'', \dots$ ; innerhalb des einzelnen Kreispaares gewinnt also das zugehörige Bogenstück mehr und mehr den Charakter einer Geraden.

Jeder der unendlich vielen nun noch offenen Kreise erscheint von einer Sehne durchsetzt, die Theil einer Kreisperipherie  $K_0$  ist. Die einzelne solche Sehne ist jetzt unter Festhaltung ihres Anfangs- und Endpunktes gerade wieder durch eine unendlich vielgliedrige gebrochene Linie zu ersetzen; das Charakteristische ist dabei, *dass je zwei benachbarte Stücke immer abwechselnd die Winkel  $2\psi$  und  $2(\pi - \psi)$  mit einander bilden, wobei  $2\psi$  für  $j > 0$  ein von  $\pi$  verschiedener Winkel ist.* Indem man den Process ins unendliche fortsetzt, bemerkt man an der Grenzcurve die Eigenschaft, dass sie in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich oft die Richtung wechselt und also unendlich viele Schwankungen erfährt.

Die bisherigen Betrachtungen geben nothwendig ein unvollkommenes Bild der Grenzcurve; denn sie gründen sich auf die Abstraction, dass man den einzelnen offenen Kreis durch eine in ihm verlaufende Sehne ersetzt. Wir können nun noch in einer anderen Art Aufschluss über den Verlauf der Grenzcurve gewinnen, nämlich durch Verwendung des Umstandes, dass diese Curve durch die unendlich vielen Substitutionen der zugehörigen Gruppe in sich übergeht.

Die einzelnen Punkte der Grenzcurve werden wir hier gerade wieder durch die unendlichen Ketten IV (3) vollständig und eindeutig begreifen. Die Gattung der *periodischen* Grenzpunkte zerfällt hier offenbar in die drei Arten der parabolischen, hyperbolischen und loxodromischen Punkte. Ueber den Verlauf der Grenzcurve in nächster Nähe eines periodischen Punktes kann man sich nun dadurch eine Vorstellung bilden, dass man die zu diesem Punkte als Fixpunkte gehörende Substitution der Gruppe wiederholt ausübt. Bei Theilen der Curve, die vom fraglichen Fixpunkte *endlich* entfernt sind, wird man dabei nur einen angenäherten Verlauf der Grenzcurve in Betracht zu ziehen brauchen, indem ja die dortselbst stattfindenden feinsten Schwankungen nach Transformation in die unmittelbare Nähe des Fixpunktes doch nicht mehr von Belang sein können.

Zur näheren Erläuterung ist in Figur 10 (folg. Seite) ein hierher gehörendes Polygonnetz gezeichnet. Das durch  $B$  bezeichnete Vierseit möge den Ausgangsbereich abgeben, wobei der umschliessende Kreis  $K_1$  sein soll, auf welchen rechts  $K_2$  u. s. w. folge. Dass  $K_2$  mit  $K_4$  congruent genommen wurde, ist keine Besonderheit; man hätte sogar ausserdem noch  $K_1$  mit  $K_3$  congruent annehmen können.\*) Der Verlauf der Grenzcurve ist so genau wie möglich angegeben, und es sind in dieser Hinsicht bei Anfertigung der Zeichnung bereits die weiterhin zur Ableitung kommenden Resultate verwerthet worden.

Ueber die *parabolischen* Punkte sind von Poincaré einige Ausführungen gegeben.\*\*\*) Dieselben gipfeln in dem Satze, dass die Grenzcurve in einem parabolischen Punkte zwar eine Tangente, aber keinen Krümmungsradius habe. Beides ist leicht deutlich. Man betrachte z. B. den Berührungspunkt  $\xi_0$  von  $K_1$  und  $K_2$  in Figur 10. Unter den Bahncurven von  $(V_1 V_2)$  findet sich in jedem der beiden Vierecknetze eine grösste, die gerade noch gänzlich innerhalb ihres Netzes verläuft, ohne irgendwo in das andere Netz überzutreten. Man hat so zwei einander in  $\xi_0$  berührende Kreise, zwischen denen sich die Grenzcurve hindurchdrängt; die gemeinsame Tangente dieser Kreise ist auch Tangente der Grenzcurve in  $\xi_0$ . Demgegenüber hat jede zwischen den beiden fraglichen Kreisen verlaufende Bahncurve von  $(V_1 V_2)$  den Charakter eines Krümmungskreises; letzterer ist sonach nicht mehr eindeutig bestimmt, und dies ist in obigem Satze gemeint.

Die *hyperbolischen* Punkte der Grenzcurve gehören zu Paaren zusammen, und man verstehe unter  $\xi_1, \xi_2$  irgend ein Paar solcher Punkte. Es ist dann zu unterscheiden, ob es Bahncurven von  $\xi_1$  nach  $\xi_2$

\*) Man erkennt im Anschluss hieran, dass sich das einzelne Viereck durch zwei neue Symmetriekreise in vier Vierecke der Winkel  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  eintheilen lässt.

\*\*) Siehe hierüber *Acta mathematica*, Bd. 3, pag. 78 ff.

giebt, welche längs ihres ganzen Verlaufes nur innerhalb einer der beiden Vierecksnetze liegen oder nicht. Im letzteren Falle finden sich von  $\xi_1$  (oder  $\xi_2$ ) aus nach allen Richtungen hin in jeder Nähe von  $\xi_1$  (bez.  $\xi_2$ ) weitere Punkte der Grenzcurve. Im ersteren Falle wolle man im einzelnen Netze diejenigen beiden Bahncurven markiren, welche

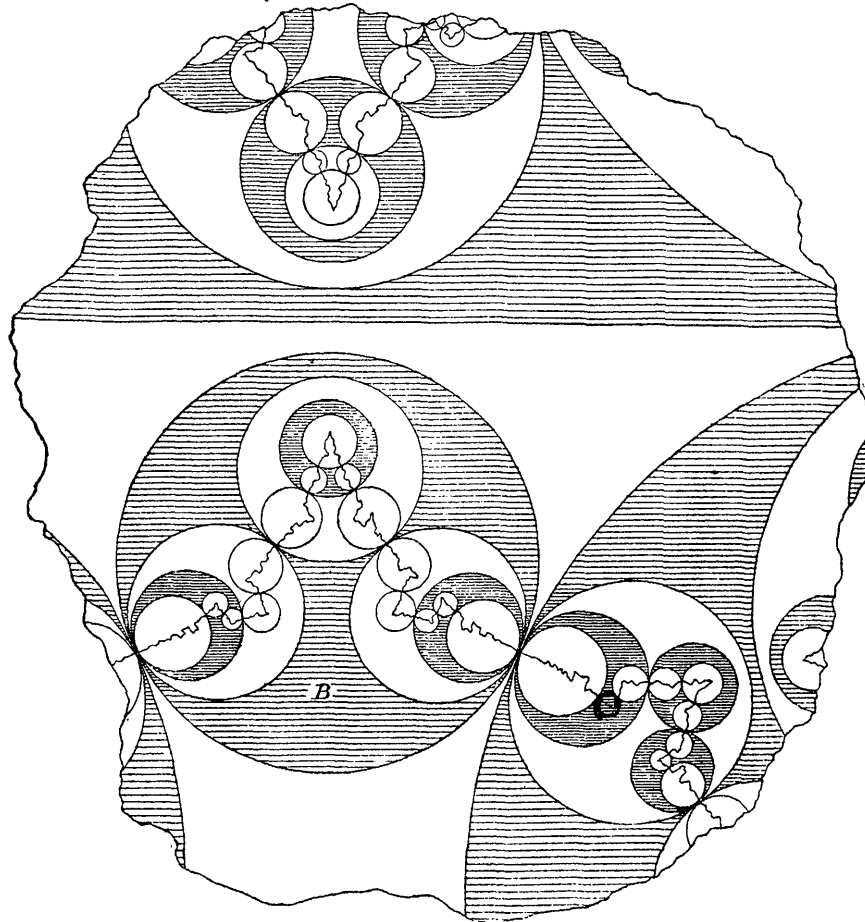


Fig. 10.

die Grenzcurve gerade streifen, ohne in das andere Netz hinüberzutreten. Durch diese beiden Paare von Bahncurven ist die  $\xi$ -Ebene in vier Zweiecke mit den Ecken  $\xi_1, \xi_2$  getheilt, und die Grenzcurve verläuft gänzlich in zweien unter diesen vier Zweiecken. Von  $\xi_1$  (oder  $\xi_2$ ) aus finden sich nach allen innerhalb dieser beiden Zweiecke verlaufenden Richtungen in jeder Nähe von  $\xi_1$  (bez.  $\xi_2$ ) weitere Punkte der Grenzcurve. Die Winkel der beiden Zweiecke mögen als die charakte-

*ristischen Winkel des hyperbolischen Punktes  $\xi_1$  benannt werden; es sind dies die Winkel, unter denen die Grenzcurve von  $\xi_1$  aus, nach der einen oder anderen Seite gesehen erscheint. Diese Winkel sind natürlich dieselben für alle mit einander äquivalenten Punkte.*

Diese Ergebnisse sollen für die beiden hyperbolischen Substitutionen  $(V_1 V_3)$ ,  $(V_2 V_4)$  bez. deren Classen gleichberechtigter Substitutionen weiter ausgeführt werden. Für die einzelne dieser Classen sind zufolge der Symmetrie der Figur beide charakteristische Winkel einander gleich. Die Fixpunkte von  $(V_1 V_3)$  seien  $\xi_1, \xi_2$ , die von  $(V_2 V_4)$   $\xi'_1, \xi'_2$ ; beide Punktepaare haben in Figur 10 besonders ausgezeichnete Lagen.

Zur Eingrenzung der zu  $(V_1 V_3)$  gehörenden Zweiecke hat man folgende beiden Paare von Bahncurven zu ziehen:

- 1) Die beiden Bahncurven von  $\xi_1$  durch  $\xi'_1$  bez.  $\xi'_2$  nach  $\xi_2$ ;
- 2) Die beiden Bahncurven von  $\xi_1$  durch die beiden rechts bez. die beiden links gelegenen Ecken des Ausgangsvierecks  $B$ .

Zur Bestätigung dieser, übrigens in Figur 10 hervortretenden, Angaben benutze man Figur 9. In derselben ist die reelle  $\xi$ -Axe der Orthogonalkreis von  $K_1, K_2, K_4$ , und der Mittelpunkt von  $K_3$  gehört der positiven Halbebene an. Ist nun  $\xi_0$  irgend einer von den vier in Figur 9 hervortretenden parabolischen Punkten, so kann man jeden parabolischen Punkt in der Gestalt:

$$V_a V_b \dots V_g V_h (\xi_0)$$

anschreiben und also durch die successiven Spiegelungen  $V_h, V_g, \dots$  von  $\xi_0$  aus erreichen. Man bemerke, dass durch die einzelne dieser Spiegelungen der gerade erreichte Punkt in das *Innere* des zugehörigen Kreises transformirt wird, dass hierbei aber niemals ein Punkt der reellen Axe oder positiven Halbebene in die negative Halbebene verlegt werden kann. Die Gesamtheit der Grenzpunkte stellt die erste Ableitung des Systems der parabolischen Punkte dar, und somit folgt: *Der Orthogonalkreis dreier Seiten eines der Eintheilung angehörenden Vierecks liegt gänzlich innerhalb des einen der beiden Netze und streift die Grenzcurve in unendlich vielen Punkten (übrigens von nicht loxodromischem Charakter).* Die Anwendung dieses Satzes auf Figur 10 führt leicht zu den zu beweisenden Angaben. Man wolle sich nur veranschaulichen, dass die vier zu je drei Seiten des Ausgangsvierecks gehörenden Orthogonalkreise paarweise durch  $\xi_1, \xi_2$  bez.  $\xi'_1, \xi'_2$  hindurchziehen u. s. w.

Die charakteristischen Winkel der einzelnen Classe werden sich durch die Invarianten  $j_{13}, j_{24}$  allein ausdrücken; so findet man z. B. als den zu  $\xi_1$  gehörenden charakteristischen Winkel:

$$(4) \quad \text{arc tg } \frac{V-1-j_{13} \sqrt{V^2-1-j_{13}^2-j_{24}^2-j_{13}j_{24}}}{2\sqrt{1-j_{24}}(j_{13}j_{24}-1)+V-1-j_{24}(2j_{13}j_{24}-j_{13}-1)},$$

der, wie es sein muss, mit  $j$  verschwindet. Die beiden Vierecknetze ragen an den einzelnen hyperbolischen Punkt der Grenzcurve mit zwei Ecken heran, deren Winkelöffnungen natürlich für die Punkte der einzelnen Classe dieselben sind, und von denen übrigens die eine *stets convex* ist. Der Ausdruck des concaven Winkels durch die Invarianten ist:

$$(5) \quad \arctan \frac{\sqrt{1-j_{13}} \sqrt{j}}{\sqrt{1-j_{13}} (j_{13} j_{24} + j_{24} - 2)};$$

die Quadratwurzeln sind in (4) und (5) stets positiv zu nehmen. Die so aufgefundenen Einknickungen der Grenzcurve in ihren hyperbolischen Punkten kommen in Figur 10 näherungsweise zum Ausdruck.

Noch complicirter gestaltet sich der Verlauf der Grenzcurve in der Umgebung eines *loxodromischen* Punktes. Sind  $\xi_1$  und  $\xi_2$  die Fixpunkte einer loxodromischen Substitution, so wolle man sich die  $\xi$ -Ebene in lauter ringförmige Discontinuitätsbereiche dieser Substitution zerlegt denken, welche sich gegen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  hin mehr und mehr zusammenziehen. Man fasse nun den Verlauf der Grenzcurve im einzelnen Ringe auf und ziehe zugleich die Gestalt der loxodromischen Bahncurven in Betracht. Man wird nothwendig zu der Vorstellung geführt, dass sich die Grenzcurve, abgesehen von allen hinzutretenden Schwankungen, um den loxodromischen Punkt spiralg windet, um ihn erst nach unendlich vielen Windungen zu erreichen, sowie um hernach im umgekehrten Sinne zwischen den bisherigen Windungen zurückzukehren. —

Es ist solchergestalt von verschiedenen Seiten her der Versuch gemacht, vom Verlauf der Grenzcurve eine angenäherte Anschauung zu entwickeln. Eine exacte geometrische Vorstellung von derselben zu gewinnen, ist völlig ausgeschlossen. Nicht nur dass uns die aperiodischen Grenzpunkte völlig unzugänglich sind, sondern man wolle vor allem ermessen, dass sowohl die parabolischen Punkte, wie auch die hyperbolischen und loxodromischen jeder Classe die Grenzcurve *allenthalben dicht* bedecken. Die soeben geschilderten Vorkommnisse in der Umgebung periodischer Punkte werden sich demnach *in jedem endlichen Intervall* der Grenzcurve *unendlich oft* wiederholen. Man hat es mit Recht als etwas sehr Interessantes angesehen, dass wir durch den elementaren Spiegelungsprocess von der einfachen Gestalt eines Kreisbogenvierecks aus zu einer Curve geführt werden, deren unmittelbare geometrische Auffassung die Kraft unserer Raumanschauung übersteigt, und die sich der Theorie der in der überkommenen Geometrie durch *analytische* Gleichungen  $f(\xi, \eta) = 0$  darstellbaren Curven entzieht. —



## VI. Ausartung der Grenzcurve in Systeme unendlich vieler Kreise.

Von den beiden eben zuletzt betrachteten Vierecknetzen soll nun das eine dadurch zur Ausartung gebracht werden, dass im Ausgangsbereich die beiden Kreise  $K_1$  und  $K_3$  einander bis zur Berührung nahe kommen; es wird alsdann  $j_{13} = -1$ , während einstweilen  $j_{24} < -1$  bleiben soll. Von den beiden Vierecken  $B, B'$  zerfällt das letztere in zwei Dreiecke der Winkel null, so dass gegenwärtig der Discontinuitätsbereich der  $\xi$ -Gruppe aus dem Complex eines Vierecks und zweier Dreiecke besteht.

Die Ausartung der Grenzcurve wolle man sich mit Hilfe der Figur 10 veranschaulichen. Die vorhin hyperbolische Substitution  $(V_1 V_3)$  ist sammt allen ihren gleichberechtigten *parabolisch* geworden. Die erzeugenden Substitutionen heissen bei zweckmässigster Lage des Ausgangsbereichs:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi'' = -\bar{\xi}, & \xi' = \frac{\bar{\xi}}{2\bar{\xi}-1}, & \xi' = -\bar{\xi} + 2, \\ \xi' = \frac{(j_{24} - i\sqrt{2-2j_{24}})\bar{\xi} + (1-j_{24})}{-(1-j_{24})\bar{\xi} - (j_{24} + i\sqrt{2-2j_{24}})}. \end{cases}$$

Dem Uebergang von  $(V_1 V_3)$  in eine parabolische Substitution geht die Coincidenz der beiden hyperbolischen Grenzpunkte  $\xi_1, \xi_2$  in einen parabolischen  $\xi_0$  parallel, wie Figur 10 leicht zur Anschauung bringt. Der vorhin benutzte Kreis durch  $\xi_1, \xi_2$  und durch zwei Ecken des Ausgangsvierecks  $B$ , dessen Verlauf man sich gleichfalls in Figur 10 leicht veranschaulicht, streifte damals die Grenzcurve in unendlich vielen parabolischen, hyperbolischen und aperiodischen Punkten; aber das dergestalt auf dem Kreise entspringende Punktsystem war ein solches *ohne* Inhalt. Mit diesem Punktsystem geht nun in dem Augenblicke, wo  $j_{13} = -1$  wird, eine discontinuirliche Aenderung vor sich; dieser Kreis ist nämlich jetzt Grenzkreis eines Netzes von Dreiecken der Winkel null geworden, und als solcher ist er *überall dicht* mit parabolischen, hyperbolischen und aperiodischen Grenzpunkten besetzt. Das hier eintretende Dreiecksnetz ist übrigens aus der Theorie der Modulfunctionen sehr bekannt, und es wird insbesondere von hier aus verständlich erscheinen, wenn wir die parabolischen Punkte des Grenzkreises auch wohl als dessen *rationale* Punkte bezeichnen.

Das vorhin von  $B'$  entspringende Vierecknetz ist nunmehr in *unendlich viele Dreiecknetze* mit Grenzkreisen zerfallen, wobei diese Dreiecknetze ein in Berührungspunkten der Grenzkreise durchaus mit einander zusammenhängendes System bilden. Die rationalen Punkte des einzelnen Grenzkreises zerfallen in drei Classen, und in jedem Punkte der dritten Classe wird der Grenzkreis von dem Kreise einer

benachbarten Dreiecktheilung berührt. *Der einzelne Grenzkreis ist solcherweise ausserhalb überall dicht von neuen ihn berührenden Grenzkreisen besetzt*, von deren Radien natürlich immer nur eine beschränkte Zahl eine beliebig klein zu wählende Grösse  $\delta > 0$  überschreiten. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei jedem neuen Grenzkreise, und man wird sich daraufhin mit Hülfe der Figur 10 den Zusammenhang der unendlich vielen Dreiecknetze einigermaassen anschaulich machen können.

Nicht so stark verändert (gegen früher) ist die Gestaltung des Grenzgebildes in nächster Nähe von parabolischen Punkten der beiden anderen Classen, sowie von hyperbolischen Punkten. Man betrachte z. B. den parabolischen Berührungspunkt der Kreise  $K_1$  und  $K_2$  des Ausgangsvierecks  $B$  der Figur 10. Der Kreis durch diesen Punkt und die beiden Fixpunkte der hyperbolischen Substitution ( $V_2 V_4$ ) verläuft nach wie vor gänzlich innerhalb des intact gebliebenen Vierecknetzes; derselbe ist nun aber in Berührung mit dem Grenzkreise des am fraglichen parabolischen Punkte theilhabenden Dreiecknetzes, und die hier neu eintretenden Dreiecknetze halten sich gänzlich innerhalb der beiden schmalen zwischen beiden Kreisen verlaufenden Spitzen. An die parabolischen Punkte der dritten Classe drängt sich die Vierecktheilung selbst mit zwei Spitzen heran, was wieder in Figur 10 leicht ersichtlich ist. Das Vierecknetz umgreift solcherweise unendlich oft den Complex aller Dreiecksnetze und lässt dabei jedesmal eine symmetrische Hälftung dieses Complexes eintreten; in Figur 10 würde dieselbe durch die verticale Symmetriegerade der Figur geleistet sein.

Bereits die parabolischen Punkte einer einzelnen Classe, z. B. die Berührungspunkte der beschriebenen Grenzkreise, bilden ein Punktsystem, dessen erste Ableitung das gesammte Grenzgebilde vorstellt. *Aber das Grenzgebilde ist keineswegs durch die Punkte aller Grenzkreise der Dreiecksnetze erschöpft.* Um nur von periodischen Grenzpunkten zu sprechen, so ist sofort ersichtlich, dass unendlich viele Classen hyperbolischer Grenzpunkte sowie die sämtlichen loxodromischen Punkte auf den Grenzkreisen der Dreiecksnetze nicht gelegen sein können. Liegt nämlich der eine von zwei hyperbolischen Punkten  $\xi_1$ ;  $\xi_2$  auf dem Grenzkreise eines Dreiecksnetzes, so muss dasselbe vom andern gelten, da die betreffende Substitution das Dreiecknetz offenbar in sich transformiren muss. Nun weist man aber durch Combination zweier Spiegelungen sehr leicht hyperbolische Substitutionen nach, deren Fixpunkte unmöglich einem und demselben Grenzkreise angehören; bereits von ( $V_2 V_4$ ) gilt dies, und weitere Beispiele wird man mühelos aus Figur 10 entnehmen, deren Ausartung man sich ja leicht vorstellt. Dass loxodromische Punkte nicht auf den Grenzkreisen der Dreiecksnetze vorkommen können, ist unmittelbar evident, da ein Dreiecknetz

nie durch eine loxodromische Substitution in sich übergehen kann. Man muss demnach im vorliegenden Falle sagen, dass das *Grenzgebilde aus allen Grenzkreisen der Dreiecksnetze, vermehrt um deren Häufungsstellen, besteht*. Das System der Grenzkreise für sich genommen bildet demnach noch keine perfecte Mannigfaltigkeit.

Man gehe nun noch einen Schritt weiter und lasse auch  $j_{24}$  bis  $-1$  anwachsen, so dass man den Fall  $j_{12} = j_{23} = j_{34} = j_{41} = 1$ ,  $j_{13} = j_{24} = -1$  eines aus vier Dreiecken der Winkel 0 bestehenden Discontinuitätsbereiches gewinnt. Es ist nun auch  $(V_2 V_4)$  zu einer *parabolischen* Substitution geworden, so dass das bislang noch intact gebliebene Vierecknetz jetzt auch in den Complex von unendlich vielen Dreiecknetzen zerfallen ist.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe, in einfachster Gestalt fixirt, sind:

$$(2) \quad \xi' = -\bar{\xi}, \quad \xi' = \frac{\bar{\xi}}{2\bar{\xi}-1}, \quad \xi' = -\bar{\xi} + 2, \quad \xi' = \frac{(1+2i)\bar{\xi}-2}{2\bar{\xi}-(1-2i)}.$$

Halten wir an dieser Gestalt fest, so wird die Modulgruppe in ihrer einfachsten (ganzzahligen) Gestalt in der vorliegenden Gruppe enthalten sein. Doch handelt sich's zunächst nicht um die *gesamte* Modulgruppe, sondern nur um deren Untergruppe zweiter Stufe. Wenn man indessen die vier Ausgangsdreiecke (vergl. auch Figur 7) in bekannter Weise durch ihre drei Höhen jeweils in sechs kleine Dreiecke der Winkel  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ , 0 theilt, so ist die *gesamte* Modulgruppe ein Theil, und zwar ein unendlich kleiner Theil der erweiterten Gruppe.

Die hier in Betracht kommende Eintheilung der  $\xi$ -Ebene ist in Figur 11 des näheren zur Darstellung gebracht, und ihre Entstehungsweise kann man sich in der nachfolgenden Art näher veranschaulichen. Man markire in der  $\xi$ -Ebene zuvörderst das System aller Grenzkreise, die in Figur 11, soweit sie zur Darstellung kamen, stärker ausgezogen sind. Zwischen den Grenzkreisen, deren einzelner mit dem bekannten Dreiecknetz ausgefüllt ist, bleiben, wie man in Figur 11 sehen wolle, immer Dreiecke offen; und im Innern des einzelnen solchen Dreiecks ist der die drei Seiten berührende Kreis der nächste Grenzkreis, welcher das in Rede stehende Dreieck in drei kleinere analog gestaltete Dreiecke und übrigen das wieder von einem Dreiecksnetz erfüllte Kreisinnere zerlegt. Die Construction aller Grenzkreise kommt solcherart darauf hinaus, zu drei gegebenen Kreisen immer wieder den vierten sie berührenden Kreis zu zeichnen. Es entspringen in dieser Weise Kreisquadrupel, in denen jeder einzelne Kreis, wie man leicht überblickt, dieselbe Rolle spielt, wie jeder andere. Die reciproken Werthe  $e_i$  der

vier Durchmesser eines solchen Quadrupels sind durch die Relation verbunden:

$$(3) \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 - 2(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_1 e_4 + e_2 e_3 + e_2 e_4 + e_3 e_4) = 0,$$

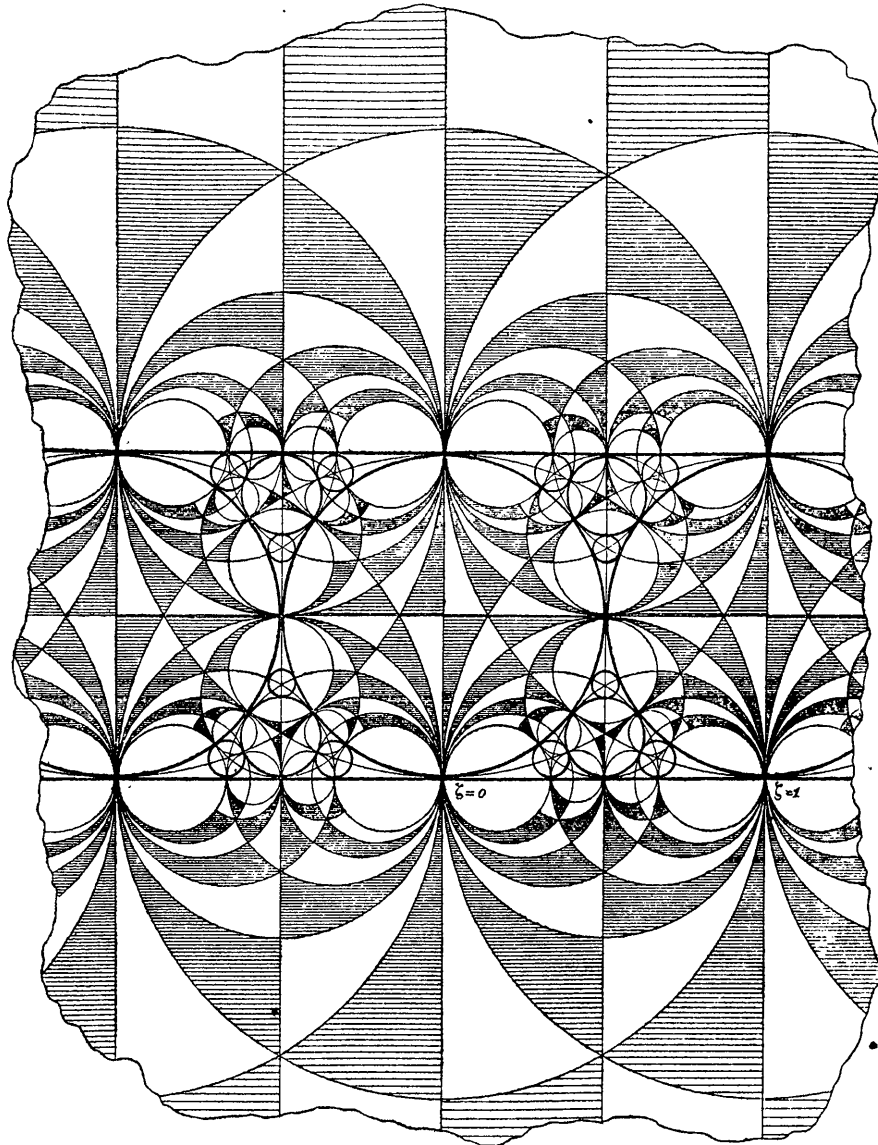


Fig. 11.

und es ist interessant zu bemerken, dass bei der Anordnung der Figur 11 die sämtlichen  $e$  ganze Zahlen werden. Man kann also die ver-

schiedenen aus dem System der Grenzkreise aufgegriffenen Quadrupel einander berührender Kreise zu den ganzzahligen Punkten der durch (3) dargestellten Kugel in Beziehung setzen. Es handelt sich dabei nicht um alle ganzzahligen Punkte dieser Kugel, und es ist auch nicht schwer, in geometrischer Art die Lage der zur Geltung kommenden Punkte zu beschreiben; indess soll hierauf nicht näher eingegangen werden, da es doch schwer zu sein scheint, über das System der Grenzkreise erschöpfende arithmetische Angaben zu machen.

In dem fertig gedachten System der Grenzkreise wird jeder einzelne unter ihnen von unendlich vielen anderen von aussen berührt. Die Berührungspunkte liegen *überall dicht* auf dem Kreise; es sind in der That die *parabolischen* Punkte des einzelnen Kreises oder, arithmetisch gesprochen, die Punkte mit *rationalen* Coordinaten  $\xi, \eta$ , deren  $\xi$  also unter der Form  $\frac{\alpha' + i\alpha''}{\gamma' + i\gamma''}$  mit *ganzen rationalen* Zahlen  $\alpha, \gamma$  erscheint.

Diese parabolischen Punkte projiciren sich auf die reelle  $\xi$ -Axe stets wieder in parabolische Punkte. Doch werden hierbei vom einzelnen Grenzkreis nur specielle rationale Punkte der reellen Axe getroffen, und das Allgemeine ist, dass ein auf der reellen Axe in einem rationalen Punkte errichtetes Loth auf den übrigen Grenzkreisen *hyperbolische* Punkte ausschneidet. Inzwischen ist es interessant, den Verlauf dieses Lothes in Figur 11 noch näher zu verfolgen, wobei wir dessen rationalen Fusspunkt etwa zwischen  $\xi = 0$  und  $\xi = \frac{1}{2}$  gelegen denken können.

Dieses Loth wird zunächst eine unendliche Reihe von Grenzkreisen orthogonal treffen und auf ihnen lauter parabolische Punkte ausschneiden; diess gilt auch noch vom Loth in  $\xi = \frac{1}{2}$ . Sehen wir im übrigen von diesem Fusspunkte ab, so werden sich die bislang durchlaufenen Grenzkreise gegen einen vom Lothe durchschrittenen Grenzpunkt irgend welcher Art häufen, jenseits dessen der Verlauf des Lothes ein complicirter wird, insofern ja die nun folgenden Grenzkreise im allgemeinen in hyperbolischen Punkten geschnitten werden. Im Speciellen tritt es indess ein, dass auf's Neue eine unendliche Reihe einander berührender Grenzkreise längs des Lothes an einander angereiht sind, von welchem jene alsdann isogonal durchschnitten werden; diess wird insbesondere der Fall sein, wenn wir von einem rationalen Punkte des Kreises um  $\xi = \frac{i}{2}$  ein Loth auf die reelle Axe fällen.

Ist das System der Grenzkreise festgelegt, so lassen sich die *Symmetriekreise* der Figur 11 leicht beschreiben. Evident gibt es *zwei* Classen von Symmetriekreisen, wobei ein solcher der ersten Classe jedesmal aus sechs Dreiecksseiten besteht, einer aus der zweiten Classe aber immer aus unendlich vielen. *Die Symmetriekreise der ersten Classe*

sind wechselweise eindeutig den Tripeln einander berührender Grenzkreise zugeordnet, nämlich als zugehörige Orthogonalkreise; die Symmetriekreise der zweiten Classe sind in einer aus Fig. 11 sofort hervorgehenden Art wechselweise eindeutig auf die parabolischen Grenzpunkte bezogen.\*)

Die parabolischen Punkte der Gruppe erscheinen in der Gestalt  $\xi = \frac{\alpha}{\gamma}$ , wo  $\alpha$  und  $\gamma$  ganze complexe Zahlen des quadratischen Körpers von der Basis  $[1, i]$  sind, (doch kommt natürlich nur ein unendlich kleiner Theil aller möglichen rationalen Zahlen dieses Körpers zur Geltung). Für jedes Paar von Zahlen  $\alpha, \gamma$ , die als relativ prim gelten dürfen, giebt es nun zweifach unendlich viele Lösungen der Gleichung  $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$  in ganzen complexen Zahlen  $\beta, \delta$ . Für die Substitutionen unserer Gruppe kommen beim einzelnen Zahlenpaar  $\alpha, \gamma$  aus diesen  $\infty^2$  Lösungen nur zwei Reihen von einfach unendlich vielen zur Verwendung. Um welche Lösungen es sich hierbei handelt, könnte mit Hülfe von Kettenbrüchen ohne Mühe angegeben werden, wie man denn überhaupt durch Gebrauch dieses Hilfsmittels eine vollständige arithmetische Definition unserer Gruppe leicht geben kann. Beschränkt man sich auf Substitutionen erster Art, so sind die Erzeugenden der Gesamtgruppe:

$$(3) \quad \xi' = \xi + 1, \quad \xi' = \frac{-1}{\xi}, \quad \xi' = -\xi + i.$$

Man kann demnach sagen: Die Substitutionen unserer Gruppe werden gerade genau von den gesamten Kettenbrüchen geliefert:

$$(4) \quad \xi' = (a_0 + e_0 i) - \frac{(-1)^{e_0}}{(a_1 + e_1 i)} - \frac{(-1)^{e_1}}{(a_2 + e_2 i)} - \dots - \frac{(-1)^{e_{r-2}}}{(a_{r-1} + e_{r-1} i)} - \frac{(-1)^{e_{r-1}}}{(a_r + e_r i) + (-1)^{e_r} \xi},$$

wobei die  $a$  beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind, während die  $e$  nur die Null oder Eins bedeuten sollen. Indessen ist hiermit noch kein directes Kennzeichen für die bei den Substitutionen unserer Gruppe auftretenden Quadrupel ganzer complexer Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gewonnen. —

## VII. Besprechung der Viereckgruppen mit beliebigen elliptischen Substitutionen.

Sobald die vier Kreise  $K_1, \dots, K_4$  von Null verschiedene Schnittwinkel mit einander bilden, ist die Frage, ob sie einen Discontinuitäts-

\*) Es sei übrigens an dieser Stelle der Definitionsweise unserer Gruppe als einer Polyedergruppe im hyperbolischen Raume gedacht. Discontinuitätsbereich ist hier ein reguläres Tetraeder, dessen sechs Kanten die fundamentale Kugel der Maassbestimmung berühren. Man vergl. hierzu den der in Rede stehenden Gruppe gewidmeten Aufsatz von Dyck in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1883.

bereich eingrenzen, nicht mehr so leicht zu beantworten, wie in den bisher betrachteten Fällen. Mögen die Kreise erstlich nach Maassgabe der Figur 5 zwei Kreisbogenvierecke eingrenzen, so müssen jedenfalls die Winkel aliquote Theile von  $\pi$  sein, etwa  $\frac{\pi}{\nu_{12}}, \dots$  mit ganzen positiven Zahlen  $\nu_{12}, \dots$ . Für die Invarianten entspringen nach der erforderlichen Bestimmung der Vorzeichen die Angaben:

$$(1) \quad j_{12} = \cos \frac{\pi}{\nu_{12}}, \dots, j_{41} = \cos \frac{\pi}{\nu_{41}}, \quad j_{13} < -1, \quad j_{24} < -1,$$

wobei des Genaueren die Zahlwerthe  $j_{13}, j_{24}$  unter der angegebenen Grenze beliebig wählbar sind. *Unter den Bedingungen (1) bilden die beiden Vierecke stets den Discontinuitätsbereich einer Gruppe, und es entspricht somit dieser Gruppe eine Bedeckung der ganzen  $\xi$ -Ebene mit zwei durch eine Grenzcurve getrennten Vierecknetzen.*

Die Entstehung der hier vorliegenden Ebenentheilung ist von der ebenen Figur 5 aus nicht so leicht zu übersehen; aber der Beweis der eben formulirten Behauptung erledigt sich sofort, wenn man die  $\xi$ -Ebene auf die Kugel stereographisch projecirt und letztere als Fundamentalfläche einer auf das Kugellinnere bezogenen hyperbolischen Maassbestimmung setzt. Die den vier Kreisen  $K_1, \dots, K_4$  entsprechenden Ebenen des hyperbolischen Raumes grenzen hier einen prismatisch geformten Bereich ein; und bei fortgesetzter Spiegelung entspringt eine leicht übersehbare Ausfüllung des hyperbolischen Raumes mit abwechselnd symmetrischen und congruenten Prismen.

Eine ausführliche Betrachtung der Grenzcurve ist hier deshalb unnöthig, weil sie zu keinen qualitativ neuen Ergebnissen führt. Nach wie vor bleibt bei endlich weit getriebener Spiegelung eine Kette von Kreisen frei, nur dass jetzt zwei auf einander folgende Kreise sich zum Theil bedecken; und bei der Darstellung der Grenzpunkte durch die Substitutionsketten  $(V_a V_b \dots)$  kann man von vorn herein auf die für die Substitutionen  $V_1, \dots, V_4$  identisch bestehenden Relationen:

$$(V_1 V_2)^{\nu_{12}} = 1, \quad (V_2 V_3)^{\nu_{23}} = 1, \dots$$

Bedacht nehmen. Speciell für das Folgende würde es von Interesse sein, für die zu  $(V_1 V_3)$  und  $(V_2 V_4)$  gehörenden beiden Classen von hyperbolischen Grenzpunkten eine Untersuchung durchzubilden, welche an den entsprechenden obigen Entwicklungen ihr genaues Modell finden würden, unter unerheblicher Complication der Ausdrücke für die charakteristischen Winkel u. s. w.

Zum Schlusse gelangen wir nun noch zu besonders interessanten Ergebnissen, wenn wir unter Festhaltung der Bedingung  $j_{24} < -1$  die Invariante  $j_{13} = -1$  und  $> -1$  werden lassen. Man muss dann

vor allem fordern, dass nun auch  $-j_{13} = \cos \frac{\pi}{\nu_{13}}$  mit ganzzahligem positiven  $\nu_{13}$  ist. Falls diese Bedingung erfüllt ist, entspringt für jeden Werth  $j_{24} < -1$  aus  $V_1, \dots, V_4$  eine eigentlich discontinuirliche Gruppe. Um aber den Discontinuitätsbereich der Gruppe anzugeben, hat man eine Reihe von Möglichkeiten zu unterscheiden. In Figur 6 zerfällt das eine der beiden Ausgangsvierecke in zwei Dreiecke mit reellen Orthogonalkreisen, so dass die beiden Invarianten  $j_2$  und  $j_4$  positiv sind; dabei gehört  $j_2$  zum Dreieck der Seiten  $K_1, K_3, K_4$  und  $j_4$  zu demjenigen von den Seiten  $K_1, K_2, K_3$ . Allgemein hat man nun zu unterscheiden, ob  $j_2$  bez.  $j_4$  positiv, null oder negativ ist, und gewinnt hierbei offenbar sechs wesentlich verschiedene Combinationen. Ist  $j_2 = 0$ , so sind die drei Zahlen  $\nu_{13}, \nu_{34}, \nu_{41}$  bekanntlich auf die Möglichkeiten  $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$  eingeschränkt, und für  $j_2 < 0$  kommen die bekannten vier Zahlentripel der Gruppen der regulären Körper\*); entsprechendes gilt für  $j_4$ . Sind demnach insbesondere beide Invarianten  $j_2$  und  $j_4$  null oder negativ, so bleibt für die fünf Zahlen  $\nu_{ik}$  nur eine sehr beschränkte Anzahl von Möglichkeiten, welche man durch richtige Combination der fraglichen Dreiecksgruppen zu Paaren leicht abzählt. Sind nun beide Invarianten  $j_2$  und  $j_4$  positiv, so besteht der Discontinuitätsbereich (für die ganze  $\xi$ -Ebene gedacht) aus dem Viereck und den beiden Dreiecken; ist eine der Invarianten  $\leq 0$ , so ist das Viereck mit dem Dreieck der positiven Invariante zusammenzunehmen; ist keine der Invarianten  $j_2, j_4$  positiv, so bildet das Viereck allein den Discontinuitätsbereich. Man hat also hier zuletzt die interessante Möglichkeit, dass Vierecke mit durchaus endlichen von 0 verschiedenen Winkeln zu einem die ganze Ebene einfach und bis auf Grenzpunkte vollständig bedeckenden Netze hinführen können.

Von dem System der Grenzpunkte aber gilt das Folgende: Für  $j_2 > 0, j_4 > 0$  besteht das Grenzgebilde aus unendlich vielen Kreisen sammt deren Häufungsstellen; die Kreise bilden zwei Classen und stellen, sofern nicht  $j_{13} = -1$  ist, eine durchaus discontinuirliche Mannigfaltigkeit dar. Ist nur eine Invariante  $j_2$  oder  $j_4$  positiv, so besteht das Grenzgebilde aus einer Classe unendlich vieler Kreise und deren Häufungsstellen, und für  $j_2 \leq 0, j_4 \leq 0$  besteht das Grenzgebilde aus einem discontinuirlichen Punktsystem. Sobald  $j_2$  (oder  $j_4$ ) verschwindet, tritt eine besonders erwähnenswerthe Classe von Grenzpunkten auf, die als auf Punkte zusammengezogene Kreise anzusehen sind. Man hat die fraglichen Punkte als elliptisch-parabolische Grenzpunkte zu bezeichnen, insofern sie bei unendlich vielen elliptischen und parabolischen Sub-

\*) Man sehe das Nähere in den „Vorlesungen über Modulfunctionen“ pag. 103 ff.



stitutionen der Gruppe an ihrer Stelle bleiben; diese Substitutionen bilden für sich eine Dreiecksgruppe derjenigen Art, bei welcher die Winkelsumme der Dreiecke gleich  $\pi$  ist.

Die geschehenen Angaben bestätige man nun dadurch, dass man sich den Spiegelungsprocess jedesmal im Einzelnen klar macht. Es soll dies zuvörderst für den durch Figur 6 veranschaulichten Fall  $j_2 > 0$ ,  $j_4 > 0$  geschehen. Der die Figur umschliessende Kreis sei  $K_1$ , rechts folge  $K_2$  u. s. w.; das von  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  eingegrenzte zu  $j_4$  gehörende Dreieck heisse  $D_4$ , das andere Dreieck  $D_2$ ; äquivalente Kreise oder Dreiecke etc. mögen durch obere Indices unterschieden werden.

Nimmt man aus Figur 6 zuvörderst  $K_2$  heraus, so liegt ein Paar von Dreiecken  $D_2, \bar{D}_2$  vor, auf welches man die Spiegelungen  $V_1, V_3, V_4$  wiederholt ausübe. Es entsteht ein inneres und ein äusseres Dreiecknetz, durch einen Hauptkreis getrennt. Aus jedem Dreieck des äusseren Netzes  $\bar{D}_2, \bar{D}_2', \dots$  nehme man nun die Kreise  $K_2, K_2', \dots$  heraus, während das innere Netz intact bleibt. Die etwa durch  $(1, 3), (1, 3)', \dots$  zu bezeichnenden elliptischen Ecken des äusseren Netzes sind jeweils von  $2\nu_{13}$  Dreiecken der Winkel  $\frac{\pi}{\nu_{13}}, \frac{\pi}{\nu_{12}}, \frac{\pi}{\nu_{23}}$  umgeben, demnächst folgt eine den einzelnen Punkt  $(1, 3), \dots$  umringende Kette von  $2\nu_{13}$  offen bleibenden Kreisen, und hieran schliesst sich ein Ring von  $2\nu_{13}$  Vierecken, aussen durch Kreise  $K_4, K_4', \dots$  abgeschlossen.

Man betrachte nun einen einzelnen Ring von  $2\nu_{13}$  Kreisen  $K_2$  um einen Punkt  $(1, 3)$  und fülle diesen Ring unter vorläufiger Vernachlässigung der Kreise  $K_4, K_4', \dots$  durch zwei Dreiecknetze vollständig aus, wobei der Hauptkreis inmitten des Ringes verläuft. Während nun das neue innere Netz wieder intact bleibt, sind aus den Dreiecken des äusseren Netzes (soweit dieselben neu sind) die Kreise  $K_4'', K_4''', \dots$  herauszunehmen. Es entspringen so wiederum inselartig gelegene Systeme zu  $2\nu_{13}$  Dreiecken, umgeben durch Ringe von  $2\nu_{13}$  offenen Kreisen. Jeder neue Schritt dieses Processes, der sich nun ohne Schwierigkeit weiter fortsetzt, liefert ein neues fertiges Dreiecknetz und eine Vervollständigung des einen Vierecknetzes.

Da die Möglichkeit, von einem einzelnen Viereck aus ein die ganze  $\xi$ -Ebene bedeckendes Netz zu gewinnen, besonderes Interesse hat, so ist ein hierher gehöriger Fall in Figur 12 besonders erläutert. Es ist hierbei das Viereck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  gewählt, während  $\nu_{13} = 3$  ist und  $j_{24}$  einen nicht weiter in Betracht kommenden Werth  $< -1$  hat. Die beiden zu  $j_2$  und  $j_4$  gehörenden Kreisbogen-dreiecke sind hier Tetraederdreiecke, und wir könnten im Sinne einer

gleich zu bezeichnenden Sprechweise sagen, *die hier vorliegende Gruppe entstehe durch Composition der Tetraedergruppe mit sich selbst.*

Zum Verständniss der Figur 12 verfolge man das in derselben hervortretende Ineinandergreifen von Tetraedertheilungen. Nimmt man nämlich nach Maassgabe der letzt vorausgehenden Erörterungen vorab

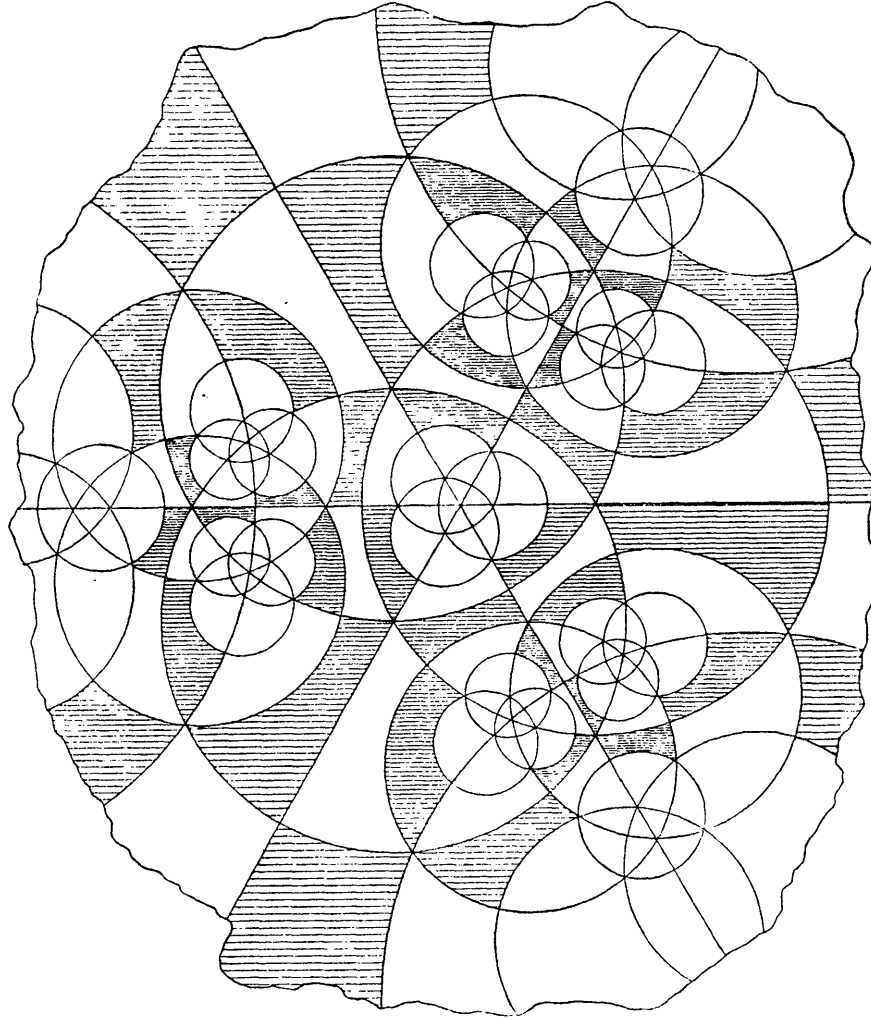


Fig. 12.

den Kreis  $K_2$  fort, so erzeugen die übrigen Kreise die für die Tetraedergruppe charakteristische Theilung der Ebene in 24 Dreiecke. Der Zusatz der Kreise  $K_2, K_2', \dots$  liefert weiter ein in Figur 12 leicht zu isolirendes *vierfach* zusammenhängendes Netz von 24 Vierecken. Im Innern jeder noch bleibenden, von drei Kreisbogen begrenzten Oeffnung

sieht man inmitten einen Schnittpunkt zu drei Symmetriekreisen, rings herum aber drei weitere solche. Um jeden dieser letzteren herum ist wieder nach Art der Tetraedertheilung ein Tripel von Kreisen zu legen, was man in Figur 12 für drei unter den zunächst gebliebenen vier Oeffnungen noch ausgeführt findet. In der Oeffnung finden dann 18 neue Vierecke Platz; aber es stellen sich zugleich drei neue analog gebildete Oeffnungen ein, so dass der Grad des Zusammenhanges des bis dahin gewonnenen Vierecknetzes um zwei Einheiten wächst.

Geht man in dem hiermit eingeleiteten Verfahren hinreichend weit, so sinken die Inhalte der Oeffnungen unter jede Grenze, zugleich aber wächst auch ihre Anzahl unbegrenzt. Man gelangt also hier zu ganz analogen Verhältnissen wie im Artikel IV betreffs des Grenzgebildes. Auch hier könnte man wieder ohne besondere Mühe zeigen, dass das Grenzgebilde ein perfectes Punktsystem ohne Inhalt ist u. s. w.

In einigen Fällen kann man sogar das hier eintretende Punktsystem mit dem des Artikels IV als identisch ansehen. Wenn man z. B. die Tetraedergruppe in der Weise mit sich componirt, dass die Reihenfolge der Winkel  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  ist, so giebt es eine Gruppe von der Art des Artikels IV, welche mit der Viereckgruppe commensurabel ist. In diesem Falle haben nämlich die Vierecke eine zu zwei Seiten ( $K_1$  und  $K_3$ ) orthogonal verlaufende Symmetrielinie; die Gesamtheit dieser Symmetrielinien liefert dann gerade das Kreissystem der fraglichen Gruppe ohne elliptische und parabolische Substitutionen. Uebrigens könnte man die hier vorliegende Gesamtgruppe auch durch Composition der Tetraeder- mit einer Diedergruppe erzeugen.

Das eben hervorgetretene *Princip der Composition zweier oder mehrerer Gruppen* ist für den weiteren Ausbau der Theorie der regulären Ebenentheilungen sehr ergiebig\*). Bereits bei alleiniger Anwendung auf die Gruppen des Tetraeders, Octaeders und Icosaeders entspringen durch Composition zu Paaren 27 unterschiedene Gruppen, bei denen jedesmal ein Vierecksnetz genau nach Art der Figur 12 die ganze Ebene bedeckt. Dabei handelt es sich für jede Combination noch um  $\infty^1$  Gruppen, insofern ja die Invariante  $j_{24}$  unterhalb der Grenze  $-1$  beliebig wählbar bleibt.

In allen besprochenen Fällen mit  $j_{13} > -1$  zeigte die regulärsymmetrische Ebenentheilung ein *einziges* Vierecksnetz, zu welchem eventuell noch unendlich viele Dreiecksnetze hinzutraten. Aber im Gegensatz zu den Gruppen mit nur einer Grenzcurve gilt hier der sehr wesentliche Satz, dass der von dem Vierecksnetz bedeckte Bereich

\*) Man vergl. hierzu die Auseinandersetzungen von Klein in Bd. 21 der Mathem. Annalen pag. 200 u. ff.

der Ebene unendlich hohen Grad des Zusammenhanges hat; im Falle der Figur 12 hat man dabei das Grenzgebilde als *nicht* zum Vierecknetz gehörig anzusehen.

Es liegt dieses Sachverhältniss auch bereits bei den Gruppen des Artikel IV vor; jedoch herrscht zwischen den dortigen und den jetzigen Gruppen ein wesentlicher Unterschied, wenn man die *gruppentheoretischen* Folgen des unendlich hohen Zusammenhanges des Netzes ziehen will. Ein im Vierecksnetz verlaufender geschlossener Weg, der das Grenzgebilde nirgends streifen soll und also nur durch eine *endliche* Anzahl von Vierecken hindurchzieht, liefert bekanntermaassen eine von den erzeugenden Substitutionen identisch erfüllte Relation, und man gewinnt *alle* derartigen Relationen von den fraglichen geschlossenen Wegen. Dabei darf der Weg *innerhalb* des einzelnen Vierecks beliebig abgeändert werden, ohne dass die Relation eine Modification erfährt.

Liegt nun irgend ein geschlossener Weg vor, so denke man sich das Vierecknetz (und zwar gerade nach der obigen Herstellungsart) soweit gebildet, dass alle vom Wege durchzogenen Vierecke gezeichnet sind. Das Netz hat dann *endlichen* Grad des Zusammenhanges, insofern nur eine *endliche* Reihe von Oeffnungen vorhanden ist. Man ziehe nun den Weg zusammen und mache sich dabei im Einzelnen deutlich, was es heisst, den Weg über eine der fraglichen Oeffnungen hinwegziehen. Es kommt das darauf hinaus, dass man in der zum Wege gehörenden Relation der  $V_1, \dots, V_4$  an einer gewissen Stelle die Combination  $V^{-1} \cdot (V_1 V_3)^{r_{13}} \cdot V$  zufügt oder wegnimmt. Verfährt man aber bei einer Gruppe des Artikels IV gerade in derselben Art, so durchzieht der Weg nach Hinwegheben über eine einzelne Oeffnung zunächst gerade dieselben Vierecke wie vorher. Im übrigen kommen wir bei Behandlung der geschlossenen Wege des Vierecknetzes auf bekannte Dinge zurück\*); wir geben etwa noch unter Benutzung einer von Hrn. Ritter l. c. gebrauchten Sprechweise als Resultat an, dass für  $j_{13} > -1$  neben den acht *primären* Relationen:

$V_1^2 = 1, \dots, V_4^2 = 1, (V_1 V_2)^{r_{12}} = 1, \dots, (V_4 V_1)^{r_{41}} = 1$   
 die eine *secundäre*  $(V_1 V_3)^{r_{13}} = 1$  besteht.

Braunschweig, den 2. Januar 1894.

---

\*) Siehe die Abhandlung von E. Ritter in den Mathem. Annalen Bd. 41, pag. 8 oder die „Vorlesungen über Modulfunctionen“ Bd. I, pag. 452.