

Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der  
linearen Differentialgleichungen. (Mit 17 Figuren  
im Tex...

by Hilb, Emil

in: Mathematische Annalen, (page(s) 215 - 257)

Berlin, Göttingen, Heidelberg; 1869

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. \*)

Von

E. HILB in Erlangen.

Herr Klein behandelte in seinen Vorlesungen\*\*) über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Jahren 1890—91 und 1893—94 die Frage, inwieweit man nach Vorgabe der als reell angenommenen singulären Punkte und der dazu gehörigen Exponenten über die noch zur Verfügung stehenden Parameter dergestalt verfügen kann, daß das Kreisbogenpolygon, auf welches die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene durch den Quotienten zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung abgebildet wird, vorgegebene Eigenschaften besitzt.

Die allgemeinen hier einschlägigen Problemstellungen sind von Herrn Klein in einem im Herbst 1891 zu Borkum verfaßten Manuskripte, von dem ich Kenntnis genommen habe, das aber nicht veröffentlicht wurde, niedergelegt.

Herr Klein versuchte nun in den oben erwähnten Vorlesungen und mehreren damals veröffentlichten Noten\*\*\*) diese Probleme mit den von ihm sogenannten Oszillationstheoremen in Verbindung zu bringen, wobei es ihm jedoch zunächst nicht gelang, im allgemeinen Falle durchzudringen. Angeregt durch Untersuchungen von Herrn Hilbert, welcher im Verfolge seiner Arbeiten über Integralgleichungen zu einem höchst einfachen Prinzip gekommen war, das gestattet, Oszillationstheoreme auch auf solche Intervalle auszudehnen, die sich über singuläre Punkte hinüberziehen, hat

---

\*) Vgl. eine vorläufige Mitteilung in den Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1908.

\*\*) Autographierte Vorlesungshefte; es sind jedoch nur die Vorlesungen von 1893—1894 im Buchhandel erschienen.

\*\*\*) z. B. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890.

Herr Klein diese Untersuchungen etwa im Jahre 1906 wieder aufgenommen und in der für das Folgende grundlegenden Arbeit\*): „Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ nach verschiedenen Richtungen gefördert. Er nimmt dabei zunächst allerdings nur einen Spezialfall in Angriff, der aber von entscheidender Bedeutung ist; es gelingt ihm dabei, das Problem auf eine einfache Oszillationsforderung zurückzuführen. Der wesentliche innere Fortschritt dieser Arbeit liegt in der scharfen *analytischen* Formulierung der schon in oben erwähnten Arbeiten ausgesprochenen geometrischen Ideen.

Bei seinem Aufenthalte in Erlangen im April 1907 (gelegentlich des 70-jährigen Geburtstages von Gordan) machte mich Herr Klein mit diesen seinen Untersuchungen bekannt und wünschte einen Beweis für die in der gerade erwähnten Annalenarbeit ausgesprochenen Behauptungen. Dieser Beweis ergibt sich nun, wie ich fand, mit größter Leichtigkeit durch elementare Stetigkeitsbetrachtungen, die ganz analog den bei der Lehre von den reellen Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen benutzten sind. Mit derselben Leichtigkeit gelingt es aber auch, die sämtlichen von Herrn Klein von Anfang an in Aussicht gestellten Probleme zu erledigen, welche, wie oben schon erwähnt wurde, darauf ausgehen, den Zusammenhang zwischen den Bestimmungsstücken des Kreisbogenpolygons und den noch zur Verfügung stehenden Parametern der Differentialgleichung festzulegen. *Irgend welche höhere Prinzipien sind also für die Beweise nicht notwendig; die Form der angewandten Stetigkeitsbetrachtungen ist sogar in gewisser Hinsicht noch einfacher als in den ersten auf das Oszillationstheorem bezüglichen Untersuchungen von Herrn Klein* (Math. Ann. Bd. 18, 1881).

In der folgenden Arbeit beschränke ich mich, dem von Herrn Klein in seiner genannten Annalenarbeit gegebenen Beispiele folgend, auf eine lineare Differentialgleichung mit vier reellen singulären Punkten.

Es seien also  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  gegebene reelle Größen und zwar sei:

$$(1) \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \delta < 1;$$

ferner:

$$(2) \quad a > b > c.$$

Wir betrachten dann die Differentialgleichung:

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)} y = 0,$$

welche die vier singulären Stellen  $a, b, c, d = \infty$  besitzt. Es gehören dabei zu diesen singulären Stellen die Exponentenpaare,  $\alpha, 0; \beta, 0; \gamma, 0; \delta', \delta''$ ; dabei ist:

---

\*) Mathematische Annalen, Band 64 (1907).

$$\begin{aligned}
 (4a) \quad & \alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2, \\
 (4b) \quad & \delta' \delta'' = A, \\
 (4c) \quad & \delta' - \delta'' = \delta.
 \end{aligned}$$

Die Ausschließung von 0 in den Ungleichungen (1), wodurch das Auftreten logarithmischer Glieder verhindert wird, geschieht nur der Bequemlichkeit halber, um die Untersuchung von Spezialfällen zu vermeiden; ebenso geschieht die Beschränkung auf vier reguläre Punkte nur deshalb, um zunächst einen einfachen, konkreten Fall zu haben; die Untersuchung bei  $n$  singulären Punkten erledigt sich hinterher mit derselben Leichtigkeit.

Dagegen geschieht der Ausschluß der Werte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , die größer als 1 sind, aus inneren Gründen, da sonst die Eindeigkeitstheoreme bei den Oszillationsbetrachtungen verloren gehen; immerhin lassen sich auch in diesem ausgeschlossenen Falle eine große Anzahl bemerkenswerter Aussagen machen, auf die an anderer Stelle als in dieser Arbeit zurückzukommen ist. Ebenso bleibt noch der Fall komplexer singulärer Punkte der Differentialgleichung, der komplexer Werte für die dazugehörigen Exponenten und der komplexer Parameter zu erledigen.

Es erscheint als ungemein wahrscheinlich, daß der weitere Ausbau der von Herrn Klein in der erwähnten Annalenarbeit niedergelegten Ideen mittels der im folgenden durchgeführten Kontinuitäts-Methode genau entsprechend den ursprünglichen Zielen von Herrn Klein dazu führen wird, allgemeine Sätze zu gewinnen, in denen alle die von den Herren Klein und Poincaré ausgesprochenen Grundtheoreme der automorphen Funktionen als Spezialfälle enthalten sind. Dies wird für den vorliegenden Fall ausführlicher am Schlusse des § 7 erläutert werden.

Zum Schlusse dieser einleitenden Bemerkungen möchte ich nur noch hervorheben, daß ich mich während der ganzen Zeit, in der ich an den hier folgenden Ausführungen arbeitete, fortwährend mit Herrn Klein in lebhafter Korrespondenz befand. Ich werde im folgenden daher sehr oft Herrn Klein anzuführen haben, was durch Beifügung des Buchstabens (K) geschehen möge.

## § 1.

### Die Maßzahlen eines Kreisbogenviereckes.

Unter einem Kreisbogenpolygon verstehen wir im folgenden eine von Kreisbogen begrenzte, einfach zusammenhängende, ebene oder sphärische Fläche, die im Inneren keinen Verzweigungspunkt besitzt. Dagegen können in den Ecken Verzweigungspunkte auftreten, d. h. die Winkel, die je zwei aufeinander folgende Polygonseiten einschließen, können  $> 2\pi$  sein, auch dürfen sich die Polygonseiten beliebig oft überschlagen. Es war nun bis jetzt

noch nicht gelungen, sich über die allgemeinste mögliche Gestalt eines solchen Polygons Rechenschaft zu geben. Nur die Theorie der Kreisbogendreiecke ist durch die Arbeiten der Herrn H. A. Schwarz\*), Klein\*\*), Schilling\*\*\*) vollständig behandelt, so daß wir uns eine anschauliche Vorstellung aller überhaupt hier möglichen Kreisbogendreiecke machen können. Die Kreisbogenvierecke wurden von Herrn Schönflies†) nur erst vorläufig auf ihre gestaltlichen Verhältnisse hin untersucht; eine volle Diskussion der möglichen Kreisbogenvierecke findet sich in der demnächst erscheinenden Göttinger Doktordissertation von Herrn Ihlenburg (Acta Leopoldina).

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit solchen Vierecken, deren Winkel  $< \pi$  sind, während allerdings die Seiten sich beliebig oft überschlagen können; die Diskussion aller hier möglichen Vierecke wird sich später auf das leichteste in Anschluß††) an die Differentialgleichung (3) ergeben. Wir haben hier vorab nur einiges Allgemeine über die Maßzahlen eines Kreisbogenviereckes der betrachteten Art zu sagen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir das Viereck auf der Kugel und denken uns den reellen Punkten der Kugel die Gesamtheit der komplexen Werte einer Variablen  $\eta$  ein-eindeutig zugeordnet, wie dieses durch stereographische Projektion der komplexen  $\eta$ -Ebene auf die  $\eta$ -Kugel geschieht. Nun kommen für uns nur solche Eigenschaften des Kreisbogenviereckes in Betracht, die bei einer linearen Transformation:

$$(5) \quad \eta' = \frac{e\eta + f}{g\eta + h}$$

ungeändert bleiben, wenn  $e, f, g, h$  irgend welche komplexe Zahlen sind. Die Substitution (5) entspricht nämlich bekanntlich dem Übergang von dem Quotienten zweier Partikularlösungen von (3) zu dem Quotienten irgend zweier anderer Partikularlösungen derselben Differentialgleichung. Wir müssen daher die Maßzahlen des Viereckes so festlegen, daß sie bei einer (5) entsprechenden Transformation der  $\eta$ -Kugel unverändert bleiben, was man bekanntlich dadurch erreicht, daß man eine solche projektive Maßbestimmung†††) einführt, deren Maßfläche die  $\eta$ -Kugel ist. Dabei

\*) H. A. Schwarz, Crelles Journal Band 75.

\*\*) F. Klein, Mathematische Annalen, Band 37, ferner: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Wintersemester 1889—90 und Sommersemester 1890, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Wintersemester 1893—94, autographierte Vorlesungshefte im Verlag bei Teubner.

\*\*\*) Fr. Schilling, Mathematische Annalen, Band 44. 1894.

†) A. Schönflies, Mathematische Annalen, Band 42 und 44. 1893, 1894.

††) Ich werde in einer späteren Arbeit eine auf diese Weise durchgeführte Diskussion der gestaltlichen Verhältnisse des allgemeinsten Kreisbogenpolygons bringen.

†††) Klein, Math. Annalen, Band 9, vgl. bezüglich weiterer Ausführungen: Fricke-Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I, Einleitung S. 4 u. f.

drückt man die Winkel zweier Geraden eines Büschels oder zweier Ebenen eines Büschels oder zweier Punkte einer Punktreihe durch:

$$(6) \quad C \lg D$$

aus, wobei  $C$  eine noch geeignet zu wählende Konstante,  $D$  dasjenige Doppelverhältnis ist, welches die beiden in das Auge gefaßten Elemente mit denjenigen Elementen desselben Trägers bilden, welche die Kugel berühren, bez. ihr angehören. Da in der so festgelegten Maßbestimmung nur Doppelverhältnisse vorkommen, so behalten die so gemessenen Größen bei jeder projektiven Transformation des Raumes, welche die Kugel in sich überführen, ihren Wert bei. Nun kann man aber die durch (5) gegebene Transformation der  $\eta$ -Kugel in sich geradezu als eine projektive Transformation des Raumes deuten. Es geht nämlich bei der Transformation (5) ein jeder Kreis der Kugel wieder in einen solchen über; wir ordnen nun die beiden Ebenen, durch welche die entsprechenden Kreise ausgeschnitten werden, einander zu; dann zeigt man leicht\*), daß allen Ebenen, welche durch einen Punkt hindurchgehen, mittels (5) und der eben gemachten Festsetzung solche Ebenen entsprechen, die wieder alle durch einen Punkt gehen, so daß wir es mit einer Punkttransformation des Raumes zu tun haben, bei welcher alle Ebenen wieder in Ebenen übergehen. Eine solche Transformation des Raumes kann aber nur eine projektive Transformation sein, bei der also alle Doppelverhältnisse und speziell alle auf die  $\eta$ -Kugel gegründeten projektiven Maßbestimmungen erhalten bleiben.

Nachdem wir dieses vorausgeschickt haben, betrachten wir die vier Ebenen, in denen die vier Seiten unseres Viereckes liegen. Je zwei aufeinander folgende Ebenen haben dann eine „Kante“ gemeinsam, je drei aufeinander folgende Ebenen eine „Ecke“. Die vier Ebenen selbst wird man zweckmäßig als „Seitenflächen“ bezeichnen. Die Konfiguration, welche von den vier Seitenflächen, den vier Kanten und den vier Ecken gebildet wird, heißt der zum Kreisbogenviereck gehörige *Kern* ( $K$ ).

Der Kern sowohl wie das dazugehörige Viereck besitzt  $3 \cdot 4 = 12$  Maßzahlen\*\*), nämlich:

1. *Vier Kantenwinkel*, das sind die Winkel, welche von zwei durch eine Kante gehenden Seitenflächen gebildet werden. Wir messen diese

\*) Vgl. Klein, Hypergeometrische Funktion, Seite 343 oder auch z. B. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen, 2. Auflage, S. 49.

\*\*) Nähere Ausführungen hierüber finden sich in der autographierten Vorlesung von Herrn Klein über lineare Differentialgleichungen vom Jahre 1890—91, die aber nicht im Buchhandel erschienen ist, sowie in dem ebenfalls nicht veröffentlichten Borkumer Manuskript von 1891 (siehe oben Einleitung).

Winkel, wie festgesetzt, durch den in (6) gegebenen Ausdruck, wobei wir in bekannter Weise

$$(7) \quad C = \frac{i}{2}$$

setzen. Da nun der Logarithmus um ganze Vielfache von  $2\pi i$  unbestimmt ist, so sind die Winkel zunächst nur mod  $\pi$  festgelegt. Um sie mod  $2\pi$  zu bestimmen, nehmen wir immer den Winkel, den diejenigen durch die in das Auge gefaßte Kante gelegten Halbebenen bilden, welche die Polygonseiten in der unmittelbaren Nachbarschaft der Ecke enthalten. Es folgt dann, daß die so bestimmten Kantenwinkel zunächst mod  $2\pi$  mit den in gewöhnlicher Weise auf der Kugel gemessenen Eckenwinkeln des Vierecks übereinstimmen; wir dürfen durch Definition festsetzen, daß *die Kantenwinkel eines Kernes genau mit den in gewöhnlicher Weise gemessenen Eckenwinkeln des Kreisbogenvierecks übereinstimmen.*

2. *Vier Seitenwinkel.* Wir führen statt der Kanten jetzt die auf ihnen liegenden Halbgeraden ein, welche vom Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Kanten derart ausgehen, daß sie den auf ihnen liegenden Begrenzungspunkt des Vierecks als ersten Schnittpunkt mit der Kugel gemein haben. Dann stimmt der betr. Seitenwinkel des Kernes mit dem von zwei solchen Halbgeraden gebildeten Winkel mod  $2\pi$  überein, sofern wir wiederum  $C$  durch (7) bestimmen. Diese Seitenwinkel wählen wir als Maß für die *Seitenlängen* des Kreisbogenvierecks, wobei wir die Unbestimmtheit mod  $2\pi$  durch die Festsetzung aufheben, daß der Vermehrung des Seitenwinkels um  $2\pi$  gerade die Hinzufügung einer vollen Selbstüberschlagung der Seite entspreche.

3. *Vier Kantenlängen.* Jede Kante wird von der vorhergehenden und der folgenden Kante in je einem Punkte, einer „Ecke“, geschnitten. Den in projektiver Maßbestimmung gemessenen Abstand von zwei auf einer Kante liegenden Ecken nennen wir *Kantenlänge*. Wir wählen dabei zweckmäßigerweise in (6) für  $C$  irgend einen reellen Wert, wobei wir uns noch der Bestimmtheit halber für den Hauptwert des Logarithmus entscheiden.

Wir gehen nun dazu über, die Seitenlängen und Kantenlängen durch diejenigen Werte von  $\eta$  auszudrücken, die den Schnittpunkten der Kanten mit der Kugel entsprechen. Es ist dabei keine wesentliche Spezialisierung, wenn wir annehmen, daß unsere Kugel den Durchmesser 1 besitze, daß ferner die Werteverteilung auf der Kugel durch stereographische Projektion der in einem Punkte  $O$  berührenden Zahlenebene von dem dem Punkte  $O$  diametral gegenüberliegenden Punkte  $P$  aus erhalten ist. Dem Punkte  $O$  entspreche  $\eta = 0$ , dem Punkte  $P$   $\eta = \infty$ .

Es seien nun  $a', b', c', d'$  die vier Ecken des Kreisbogenviereckes; die zweiten Schnittpunkte der Kanten des Kernes mit der Kugel bezeichnen wir bez. mit  $a'', b'', c'', d''$ . Wir greifen  $b'$  heraus und bringen es durch eine geeignete Transformation (5) nach  $O$ ,  $b''$  nach  $P$ , ferner die Seitenfläche  $a'b'$  in den Meridian der reellen Zahlen. Zu  $a'$  gehört dann ein reeller Wert  $l_1$  von  $\eta$ , zu  $a''$  ein reeller Wert  $l_2$ .

Wir führen jetzt die Verbindungslinie  $OP$  als  $z$ -Achse, die Tangente in  $O$  an den Meridian der reellen Zahlen als  $x$ -Achse ein. In diesem Koordinatensysteme haben  $a'$  und  $a''$  die Koordinaten:

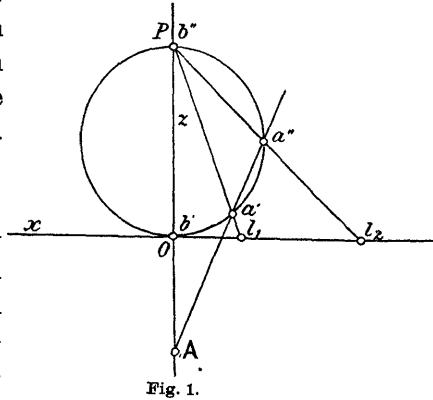


Fig. 1.

$$x = \frac{l_1}{1+l_1^2}, \quad z = \frac{l_1^2}{1+l_1^2}; \quad \text{bez.} \quad x = \frac{l_2}{1+l_2^2}, \quad z = \frac{l_2^2}{1+l_2^2}$$

und man findet für die Gerade

$$u_1 x + u_2 z + u_3 = 0,$$

welche durch  $a'$  und  $a''$  geht, die Koordinaten:

$$(8) \quad u_1 = -(l_1 + l_2), \quad u_2 = 1 - l_1 l_2, \quad u_3 = l_1 l_2.$$

Für den Schnittpunkt A der Achse  $a'a''$  mit der Achse  $b'b''$ , also mit der  $z$ -Achse des Koordinatensystems ist also:

$$(9) \quad x = 0, \quad z = -\frac{l_1 l_2}{1 - l_1 l_2}.$$

Nachdem dies vorausgeschickt ist, gehen wir dazu über, die Seitenlänge  $b'a'$  unseres Polygons zu berechnen, und stellen dazu die Gleichung des die reellen Zahlen tragenden größten Kreises in homogenen Linienkoordinaten  $u_1, u_2, u_3$  dar.

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten  $x = 0, z = \frac{1}{2}$ , der Radius hat die Größe  $\frac{1}{2}$ . Also ist die Gleichung des Kreises:

$$\Phi(u, u) = u_1^2 - 4u_2 u_3 - 4u_3^2 = 0.$$

Dann erhält man den in der projektiven Maßbestimmung unter Zugrundelegung dieses Kreises gemessenen Winkel, den zwei in dieser Ebene liegende Gerade mit den homogenen Linienkoordinaten  $u_1', u_2', u_3'$  bez.  $u_1'', u_2'', u_3''$  einschließen, bekanntlich folgendermaßen:

Es seien

$$u_1' + \lambda_1 u_1'', \quad u_2' + \lambda_1 u_2'', \quad u_3' + \lambda_1 u_3''$$



bez.

$$u_1' + \lambda_2 u_1'', \quad u_2'' + \lambda_2 u_2'', \quad u_3' + \lambda_2 u_3''$$

die Koordinaten der beiden Tangenten, welche von dem Schnittpunkte der gegebenen Geraden an den Kreis gezogen werden können; hier sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\Phi(u', u') + 2\lambda \Phi(u', u'') + \lambda^2 \Phi(u'', u'') = 0,$$

wobei

$$\Phi(u', u'') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi(u', u')}{\partial u_1'} \cdot u_1'' + \frac{\partial \Phi(u', u')}{\partial u_2'} \cdot u_2'' + \frac{\partial \Phi(u', u')}{\partial u_3'} \cdot u_3'' \right)$$

ist.

Da nun nach (7)  $C = \frac{i}{2}$  ist, so ist der gesuchte Winkel:

$$\varphi = \frac{i}{2} \cdot \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

also

$$\cos \varphi = \frac{e^{-\frac{1}{2} \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + e^{\frac{1}{2} \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = - \frac{\Phi(u', u')}{\sqrt{\Phi(u', u') \Phi(u'', u'')}}.$$

Für unseren Fall ist nun nach (8):

$$u_1' = -(l_1 + l_2), \quad u_2' = 1 - l_1 l_2, \quad u_3' = l_1 l_2,$$

ferner ist:

$$u_1'' = 1, \quad u_2'' = 0, \quad u_3'' = 0.$$

Man erhält also für den von den Geraden  $a'a''$ ,  $b'b''$  eingeschlossenen Winkel  $\varphi$ :

$$(10) \quad \cos \varphi = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}, \quad \sin \varphi = \frac{2 \cdot \sqrt{-l_1 l_2}}{l_1 - l_2}. \quad (K)$$

An sich würde bei beiden Ausdrücken ein doppeltes Vorzeichen auftreten, was daher rührt, daß wir vermöge unserer Ableitung die Formeln sowohl für  $\pm \varphi$ , als auch für die Nebenwinkel dieser Winkel gewinnen; es erweist sich aber als zweckmäßig, für den früher bei der Festlegung der Seitenwinkel näher bestimmten Winkel in den Formeln ein für allemal das positive Vorzeichen zu wählen.

Ehe wir nun eine weitere Diskussion von (10) durchführen, berechnen wir noch die Kantenlänge auf  $b'b''$ . Zu diesem Zwecke haben wir nur noch die Koordinaten des Schnittpunktes B der Kante  $c'c''$  mit der Kante  $b'b''$  anzugeben. Zu  $c'$  und  $c''$  gehören Werte

$$(11) \quad \eta = \nu_1 = n_1 e^{\beta \pi i}, \quad \text{bez.} \quad \eta = \nu_2 = n_2 e^{\beta \pi i},$$

wobei  $n_1$  und  $n_2$  reelle Größen,  $\beta \pi$  aber der Winkel des Kreisbogenviereckes bei  $b'$  ist. Wir drehen nun die Ebene, welche die Vierecksseite  $b'c'$  enthält, um den Winkel  $-\beta \pi$  mit  $b'b''$  als Achse, so daß der Kreisbogen  $c'c''$  in den Meridian der reellen Zahlen fällt.

B bleibt bei der Drehung liegen, zu  $c'$  bez.  $c''$  gehören nach der Drehung die reellen Werte

$$\eta = n_1, \quad \text{bez.} \quad \eta = n_2,$$

so daß wir wieder denselben Sachverhalt haben wie schon oben. Man findet daher für B die Koordinaten

$$(12) \quad x = 0, \quad z = -\frac{n_1 n_2}{1 - n_1 n_2}.$$

Durch Zusammenfassung mit (9) finden wir für die in der projektiven Maßbestimmung gemessene Länge  $L$  der Kante AB:

$$(13) \quad L = C \cdot \lg \left( \frac{-l_1 l_2 (1 - l_1 l_2)}{1 - l_1 l_2} : \frac{-n_1 n_2 (1 - n_1 n_2)}{1 - n_1 n_2} \right) = C \lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}, \quad (K)$$

wobei  $C$ , wie festgesetzt wurde, hier irgend eine reelle Konstante ist.

Nachdem wir jetzt das nötige Formelmateriale gewonnen haben, gehen wir zur Diskussion der Formeln (10) und (13) über.

1) Es mögen, wie in nebenstehender Figur,  $a'$  und  $a''$  zwischen  $b'$  und  $b''$ , d. h.  $l_1$  und  $l_2$  zwischen 0 und  $\infty$  liegen, und zwar gelange man, wenn man von  $b'$  entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers ausgeht, direkt nach  $a'$  und dann nach  $a''$ , ohne in beiden Fällen die ganze Kreisperipherie ein oder mehrmals durchlaufen zu haben. Da hierbei  $l_1$  und  $l_2$  positiv sind und  $l_2$  einen größeren Wert besitzt als  $l_1$ , so ist

$$\frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1} > 1,$$

es folgt also aus (10), daß  $\varphi$  einen rein imaginären Wert besitzt. Zunächst können wir allerdings nur behaupten, daß

$$\varphi = \psi_1 i + 2k\pi$$

ist, wobei  $\psi$  irgend eine reelle Größe,  $k$  eine ganze Zahl ist; es ist jedoch äußerst zweckmäßig und natürlich, hier  $k = 0$  zu setzen.

Es ist nun für die späteren Anwendungen von Bedeutung, zu sehen, wie sich  $\varphi$  ändert, wenn wir  $a'$  und  $a''$  entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne den Kreis beliebig oft durchlaufen lassen, dergestalt, daß  $a'$  niemals  $a''$  einholt und  $a''$  niemals  $a'$  um einen vollen Kreisumlauf überholt. Es dürfte dabei zweckmäßig sein, für  $a'$  und  $a''$  die dazugehörigen Werte von  $\eta$ ,  $l_1$  und  $l_2$ , für  $b'$  den Wert 0, für  $b''$  den Wert  $\infty$  einzuführen. Es sei dazu noch bemerkt, daß  $\eta$  auf dem rechts liegenden, von  $b'$  und  $b''$  begrenzten Halbkreise die positiven, auf dem links liegenden Halbkreise die negativen reellen Zahlen durchläuft.

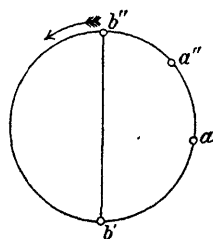


Fig. 2.

Zunächst kommt jetzt bei unserer Bewegung  $l_2$  nach  $\infty$ ; es wird also  $\cos \varphi = 1$ . Da wir natürlich  $\varphi$  sich nur stetig ändern lassen werden, und es vorher rein imaginär war, so werden wir jetzt  $\varphi = 0$  setzen müssen. Dieses stimmt mit der bekannten Tatsache überein, daß, wenn man in der sogenannten parabolischen Geometrie auf der Kugel die Kreisbogen in allgemein-projektiver Weise mißt, ihre Längen gleich 0 sind. Wenn  $l_2$  jetzt  $\infty$  überschritten, also negative Werte angenommen hat, wird  $\cos \varphi < 1$ ; also wird  $\varphi$  reelle Werte zwischen 0 und  $\pi$  annehmen.

Es kann nun fernerhin nach unseren Festsetzungen entweder  $l_1 = \infty$  und dann  $l_2 = 0$  werden, oder es können diese beiden Ereignisse in umgekehrter Reihenfolge oder auch gleichzeitig eintreten. Diskutieren wir zuerst den ersten Fall, nehmen wir also an, es werde  $l_1 = \infty$ , solange  $l_2$  noch negativ ist; es wird dann  $\varphi = \pi$ , und  $\varphi$  hat alle Werte zwischen 0 und  $\pi$  mindestens einmal durchlaufen. Bei Weiterbewegung wird  $l_1$  negativ,  $|\cos \varphi| > 1$  und da wir wieder  $\varphi$  als sich stetig ändernd annehmen,  $\varphi = \pi + \psi_2 i$ , wobei  $\psi_2$  eine reelle Größe ist.  $\varphi$  behält diese Form so lange, bis  $l_2 = 0$  wird; es kann dabei  $\psi$  nicht  $\infty$  werden, da stets  $l_2 \geq l_1$  ist; gibt man daher für  $|l_2 - l_1|$  eine untere Grenze vor, so kann  $\psi_2$  eine bestimmte obere Grenze nicht überschreiten.

Wenn nun  $l_2 = 0$  wird, wird wieder  $\cos \varphi = -1$ , also  $\varphi = \pi$ .

Ganz analog ist die Sachlage in dem zweiten möglichen Falle, wenn  $l_2$  zuerst 0 und  $l_1$  dann erst  $\infty$  wird, d. h.  $\varphi$  wird auch hier zuerst  $= \pi$ , dann von der Form  $\varphi = \pi + \psi_3 i$ , dann wieder  $\pi$ .

Im dritten Falle, wenn gleichzeitig  $l_2 = 0$ ,  $l_1 = \infty$  wird, erhält  $\varphi$  den Wert  $\pi$ .

Nachdem nun  $l_1$  den Punkt  $\infty$ ,  $l_2$  den Punkt 0 passiert hat, ist  $|\cos \varphi| < 1$ ; wir werden zweckmäßigerweise daher  $\varphi = \pi + \psi_3$  setzen, wobei  $0 < \psi_3 < \pi$  ist, während an sich auch die Ungleichung  $0 > \psi_3 > -\pi$  zulässig wäre, was wir durch Definition ausschließen wollen.  $\varphi$  bleibt jetzt reell und  $0 < \psi_3 < \pi$ , bis entweder  $l_1$  den Wert 0 oder  $l_2$  den Wert  $\infty$  annimmt; in beiden Fällen wird  $\cos \varphi = 1$ ,  $\varphi = 2\pi$ .

Eine weitere Diskussion und Festsetzung der noch frei stehenden Definitionen geschieht ganz analog.

Da die vorstehenden Untersuchungen für das Folgende von grundlegender Bedeutung sind, so wollen wir die Sachlage im allgemeinen Fall in folgendem Satz 1 zusammenfassen.

**Satz 1.** Wenn  $l_1$   $k$  mal durch  $\infty$  und  $k$  mal durch 0,  $l_2$   $k$  mal durch  $\infty$  und  $k$  mal durch 0 gegangen ist, oder auch, wenn  $l_1$   $k$  mal durch  $\infty$ , aber nur  $k - 1$  mal durch 0,  $l_2$  dagegen  $k + 1$  mal durch  $\infty$  und  $k$  mal durch 0 gegangen ist, so ist der Winkel, welcher die Länge  $b'a'$  mißt, von der Form  $\varphi = 2k\pi + \psi i$ , wo  $\psi$  irgend eine reelle Größe ist. Geht nun

im 1. Falle  $l_2$  das  $(k+1)^{\text{te}}$  Mal durch  $\infty$ , im 2. Falle  $l_1$  das  $k^{\text{te}}$  Mal durch 0, so ist  $\varphi = 2k\pi$  und wächst, wenn sich  $l_1$  und  $l_2$  entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne weiter bewegen, alle dazwischen liegenden reellen Werte und nur diese annehmend, auf  $\varphi = (2k+1)\pi$ , bis  $l_1$  das  $(k+1)^{\text{te}}$  Mal durch  $\infty$  oder  $l_2$  das  $(k+1)^{\text{te}}$  Mal durch 0 geht. Welches von diesen beiden Ereignissen zuerst eintreffen mag,  $\varphi$  wird nach dem Eintreffen des einen bis zum Eintreffen des anderen die Form  $(2k+1)\pi + \psi i$  haben, beim Eintreffen des anderen Ereignisses selbst wird wieder  $\varphi = (2k+1)\pi$  sein. Dann bleibt  $\varphi$  reell und erreicht den Wert  $2(k+1)\pi$ , wenn  $l_1$  das  $(k+1)^{\text{te}}$  Mal durch 0, oder  $l_2$  das  $(k+2)^{\text{te}}$  Mal durch  $\infty$  geht. Damit sind wir aber beim Ausgangspunkte des Satzes angekommen, wenn wir nur  $k$  mit  $k+1$  vertauschen.

Unter Zugrundelegung der in Satz 1 getroffenen Festsetzungen wird es zweckmäßig sein, an der Vorstellung festzuhalten, daß sich die Seite  $b'a'$   $k$  mal durch  $\infty$ , bez.  $k$  mal durch 0 hindurchzieht, wenn  $l_1$  bei unserer Bewegung das  $k^{\text{te}}$  Mal durch  $\infty$ , bez. durch 0 hindurchgegangen ist.

Wir entnehmen aus Satz 1 speziell:

Satz 2. Wenn  $l_2$  und  $l_1$  von zwei zwischen 0 und  $+\infty$  liegenden Punkten ausgehend den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne beliebig oft derart durchlaufen, daß  $l_2$  immer vorausgeht, ohne  $l_1$  je um einen ganzen Umlauf zu überholen, so nimmt  $\varphi$  jeden positiven reellen Wert mindestens einmal an.

2) Wir kommen jetzt zur Diskussion von (13). Dabei ist derjenige Fall von besonderem Interesse, in welchem das Kreisbogensviereck einen Orthogonalkreis besitzt, d. h. in welchem für das Kreisbogensviereck ein Kreis existiert, auf welchem die vier die Seiten des Viereckes enthaltenden Kreise senkrecht stehen. Dazu ist, wie wir zeigen wollen, die Bedingung:

$$(14) \quad l_1 l_2 = n_1 n_2$$

notwendig und hinreichend.\*)

Diese Gleichung sagt nämlich nach (13) aus, daß die Kantenlänge AB den Wert 0 besitzt; daraus folgt, daß die Ecken A und B des Kernes zusammenfallen. Es schneiden sich daher die Kanten  $a'a''$ ,  $b'b''$ ,  $c'c''$  in einem Punkte; durch diesen Punkt geht dann von selbst auch die vierte Kante  $d'd''$ , welche mit  $a'a''$  und  $c'c''$  je in einer Ebene liegt.

Ist also Gleichung (14) erfüllt, so sind alle Kantenlängen 0 und alle Ecken des Kernes fallen in einen Punkt  $\Pi$  zusammen.

\*) Diese Bedingung wurde von Herrn Klein in seiner Annalenarbeit Bd. 64, S. 187 ff. auf ganz andere Weise abgeleitet und *Involutionsbedingung* genannt.

Wir betrachten jetzt die Polarebene  $\Pi_1$  dieses Punktes  $\Pi$  in bezug auf die Kugel. Dann steht jede Ebene  $E$ , welche den Punkt  $\Pi$  enthält, auf  $\Pi_1$  im Sinne unserer projektiven Maßbestimmung senkrecht. In der Tat hat das Doppelverhältnis, das  $\Pi_1$  und  $E$  mit den beiden in dem von  $\Pi_1$  und  $E$  gebildeten Ebenenbüschel enthaltenen Tangentialebenen bilden, den Wert  $-1 = e^{-\pi i}$ , also ist nach (6) und (7) der von  $E$  und  $\Pi_1$  eingeschlossene Winkel  $\frac{\pi}{2}$ . Speziell stehen also die vier Seitenflächen des Vierecks auf  $\Pi_1$  senkrecht. Da man nun alle Schlüsse in umgekehrter Reihenfolge wiederholen kann, so ist damit die Behauptung in ihrer vollen Allgemeinheit bewiesen.

Wenn nun  $l_1$  und  $l_2$  dasselbe Zeichen haben und (14) erfüllt ist, liegt  $\Pi$  außerhalb der Kugel; die Polarebene  $\Pi_1$  schneidet die Kugel in einem reellen Kreise und das Viereck besitzt einen reellen Orthogonalkreis. Wenn dagegen in (14)  $l_1$  und  $l_2$  entgegengesetzte Zeichen haben, so liegt  $\Pi$  innerhalb der Kugel;  $\Pi_1$  schneidet die Kugel in einem imaginären Kreise und das Viereck besitzt einen imaginären Orthogonalkreis.

Was nun im allgemeinen Falle die Kantenlänge anbelangt, so folgt, da  $C$  hier reell angenommen wurde, aus (13), daß eine Kante eine reelle Länge besitzt, wenn die beiden auf ihr liegenden Ecken des Kernes gleichzeitig im Äußeren oder gleichzeitig im Innern der Kugel liegen. Eine Kante hat dagegen eine komplexe Länge, wenn die eine Ecke im Innern, die andere im Äußeren der Kugel liegt.

## § 2.

### Zusammenhang der Differentialgleichung mit den Bestimmungsstücken des Vierecks. \*)

Wir gehen jetzt etwas näher auf die Differentialgleichung (3) der Einleitung ein, wobei wir ein für allemal hier annehmen, daß die durch 1, 2 und 4 gegebenen Gleichungen und Ungleichungen erfüllt seien.

Es seien nun  $Y_\beta^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  die zu den Exponenten  $\beta$  bezüglich 0 gehörigen Fundamentallösungen von (3) im Punkte  $b$ ; den bei  $Y_0^b(x)$  noch zur Verfügung stehenden konstanten Faktor denken wir uns so bestimmt, daß

$$(15) \quad Y_0^b(b) = 1$$

ist; ebenso denken wir uns  $Y_\beta^b(x)$  fest normiert, behalten uns aber die nähere Festsetzung hierüber für den nächsten Paragraphen vor.

---

\*) Vgl. Klein l. c. Bd. 64.

Für die singulären Punkte  $a$  und  $c$  sollen nun die entsprechenden Fundamentallösungen  $Y_a^a, Y_0^a, Y_\gamma^c, Y_0^c$  sein. Wir denken uns in diesen die noch zur Verfügung stehenden konstanten Faktoren so gewählt, daß sie sich beim Hinschreiten längs der Stücke  $\overline{ab}$ , bez.  $\overline{cb}$  der reellen  $x$ -Achse in der Form darstellen lassen:

$$(16) \quad \begin{aligned} Y_a^a &= Y_\beta^b - l_1 Y_0^b; & Y_\gamma^c &= Y_\beta^b - \nu_1 Y_0^b; \\ Y_0^a &= Y_\beta^b - l_2 Y_0^b; & Y_0^c &= Y_\beta^b - \nu_2 Y_0^b. \end{aligned}$$

Dabei sind  $l_1$  und  $l_2$  reelle Größen,  $\nu_1$  und  $\nu_2$  dagegen komplexe, und zwar ist:  $\nu_1 = e^{+\beta\pi i} \cdot n_1$ ,  $\nu_2 = e^{+\beta\pi i} \cdot n_2$ , wenn  $n_1$  und  $n_2$  reelle Größen sind (vergl. Formel (11)).

Wir zeichnen nun weiterhin  $b$  aus und setzen:

$$(17) \quad \eta = \frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}.$$

Dieser Quotient bildet die von der reellen Achse begrenzte Halbebene der  $x$  auf ein Kreisbogenviereck ab, das wir uns zweckmäßigerweise statt in der  $\eta$ -Ebene auf der  $\eta$ -Kugel gelegen denken. Den singulären Punkten  $a, b, c, d = \infty$  entsprechen die Ecken  $a', b', c', d'$  des Viereckes.

Wir führen neben  $a', b', c', d'$  die Punkte  $a'', b'', c'', d''$  ein, d. h. diejenigen Punkte, in denen die Kanten des zu dem Kreisbogenvierecke gehörigen Kernes die Kugel das zweite Mal schneiden.

Nun entspricht einem vollen Umlaufe in der  $x$ -Ebene um  $b$  eine Drehung der  $\eta$ -Kugel von der Amplitude  $2\pi\beta$  um die Achse  $b'b''$ . Die diesem Umlaufe entsprechende Substitution ist:

$$\eta' = e^{2\pi\beta i} \cdot \eta;$$

daraus folgt, daß das zu  $b''$  d. h. zu dem 2. Fixpunkte bei der Drehung gehörige  $\eta$  den Wert  $\infty$  besitzt. Es verschwindet also  $Y_\beta^b(x)$  in dem Punkte  $b'$ ,  $Y_0^b(x)$  in dem Punkte  $b''$  der  $\eta$ -Kugel. Analog folgt, daß  $Y_a^a, Y_0^a, Y_\gamma^c, Y_0^c$  bezüglich in den Punkten  $a', a''; c', c''$  der  $\eta$  Kugel verschwinden. Aus (16) und (17) folgt dann, daß  $\eta$  in den Punkten:

$$a', a''; b', b''; c', c''$$

bez. die Werte annimmt:

$$l_1, l_2; 0, \infty; \nu_1, \nu_2.$$

Wir haben nun schon im letzten Paragraphen die Seitenfläche  $b'c'$  in die den Kreis der reellen Zahlen enthaltende Ebene gedreht; diese Drehung wird uns auch hier nützliche Dienste leisten.

Um sie analytisch zum Ausdruck zu bringen, werden wir zweckmäßigerweise eine bestimmte Verabredung über die Festlegung der zu  $b$

gehörigen Fundamentallösungen treffen. Wir machen nämlich folgende Festsetzung:

$$(18) \quad \begin{aligned} Y_\beta^b &= (x-b)^\beta \mathfrak{P}_\beta(x-b) \text{ für } x > b \\ Y_\beta^b &= (b-x)^\beta \mathfrak{P}_\beta(x-b) \text{ für } x < b, \end{aligned}$$

d. h. wir setzen

$$Y_\beta^b = |x-b|^\beta \mathfrak{P}_\beta(x-b) \text{ und analog } Y_\alpha^a = |x-a|^\alpha \mathfrak{P}_\alpha(x-a),$$

und entsprechend

$$Y_\gamma^c = |x-c|^\gamma \mathfrak{P}_\gamma(x-c), \quad Y_{\delta'}^\infty = \left| \frac{1}{x} \right|^{\delta'} \mathfrak{P}_{\delta'}\left(\frac{1}{x}\right), \quad Y_{\delta''}^\infty = \left| \frac{1}{x} \right|^{\delta''} \mathfrak{P}_{\delta''}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dabei schreiben wir  $\mathfrak{P}$  als Symbol einer Potenzreihe mit von 0 verschiedenem konstanten Glied; die vorkommenden Potenzen reeller positiver Größen aber sollen selbst reell und positiv genommen sein.

Diese Festsetzung bezüglich der Fortsetzung über einen singulären Punkt hinaus wurde von Herrn Hilbert zunächst in dem Falle eingeführt, daß  $\alpha, \beta, \gamma, \delta' - \delta''$  verschwinden, Herr Klein hat dann in der öfter erwähnten Annalenarbeit von 1907 diese Festsetzung für allgemeine Werte der  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta' - \delta''$  fixiert und geometrisch interpretiert, was wir im folgenden benützen müssen.

Unter der Annahme des durch (18) ausgedrückten Fortsetzungsprinzips unterscheidet sich  $\frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}$  zwar für alle Werte von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  von der abbildenden Funktion  $\eta$  überhaupt nicht, für alle Werte von  $x$  zwischen  $b$  und  $c$  jedoch um den Faktor  $e^{-\beta\pi i}$ ; diesem Faktor entspricht aber gerade eine Drehung der  $b'c'$  enthaltenden Seitenfläche in die Ebene, welche den Meridian der reellen Zahlen enthält.

Wir haben also hier dieselbe Drehung, die wir bei der Ableitung von (13) benützten.

Unter Zugrundelegung des durch (18) gegebenen Fortsetzungsprinzips erhalten wir in (16) nach geeigneter Abänderung der Normierung von  $Y_\gamma^c, Y_0^c$  statt  $\nu_1, \nu_2$  die Werte  $n_1$  und  $n_2$ , so daß wir mit den Ergebnissen des § 1 zusammenfassend haben

Satz 3: *Es sei unter Zugrundelegung des durch (18) gegebenen Fortsetzungsprinzips*

$$(19) \quad \begin{aligned} Y_\alpha^a &= Y_\beta^b - l_1 Y_0^b; & Y_\gamma^c &= Y_\delta^b - n_1 Y_0^b; \\ Y_0^a &= Y_\beta^b - l_2 Y_0^b; & Y_0^c &= Y_\delta^b - n_2 Y_0^b; \end{aligned}$$

dann erhält man für die Längen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der Vierecksseiten  $a'b'$  und  $b'c'$  nach (10):

$$(20) \quad \cos \varphi_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{n_1 + n_2}{n_2 - n_1}$$

und nach (13) für die Länge  $L$  der Kante auf  $b'b''$ :

$$(21) \quad L = C \cdot \lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2},$$

wobei  $C$  eine reelle Konstante ist.

Es ist damit ein einfacher Zusammenhang zwischen den Maßzahlen des Kreisbogenviereckes und den durch die Fundamentallösungen definierten Größen  $l_1, l_2, n_1, n_2$  aufgestellt.

Wir haben jetzt noch die Abhängigkeit dieser Größen von dem Parameter  $B$  zu untersuchen, wobei wir uns sogenannter Oszillationsbetrachtungen bedienen wollen. Ehe wir aber dazu übergehen, wollen wir die Differentialgleichung auf eine für diese Untersuchungen geeignetere Form bringen; ferner wollen wir diskutieren, welchen Einfluß es auf die Differentialgleichung hat, wenn wir statt  $d$  einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen.

### § 3.

#### Umformungen der Differentialgleichung. Allgemeine Bemerkungen über Oszillationsbetrachtungen.

Wir setzen jetzt gemäß unserem Fortsetzungsprinzip:

$$(22) \quad dt = \frac{dx}{|x-a|^{1-\alpha} |x-b|^{1-\beta} |x-c|^{1-\gamma}}.$$

Dann geht (3) über in

$$(23) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha} |x-b|^{2-2\beta} |x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} (Ax + B)y = 0.$$

Dadurch erhält man nicht nur, wie man sieht, die Differentialgleichung in einfacherer Gestalt, sondern es ist auch, wenn wir die Ungleichungen für  $\alpha, \beta, \gamma$  berücksichtigen:

$$(24) \quad \left( \frac{dY_0^a(x)}{dt} \right)_{x=a} = 0, \quad \left( \frac{dY_0^b(x)}{dt} \right)_{x=b} = 0, \quad \left( \frac{dY_0^c(x)}{dt} \right)_{x=c} = 0,$$

da ja z. B.

$$\left( \frac{dY_0^a(x)}{dt} \right)_{x=a} = \left( \frac{dY_0^a(x)}{dx} |x-a|^{1-\alpha} |x-b|^{1-\beta} |x-c|^{1-\gamma} \right)_{x=a}.$$

Ferner ist nach (18):

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{dY_\beta^b(x)}{dt} \right)_{x=b+\varepsilon} = - \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{dY_\beta^b(x)}{dt} \right)_{x=b-\varepsilon} \neq 0.$$

Wir wollen nun die in § 2 verschobene Festsetzung der Normierung von  $Y_\beta^b(x)$  derart treffen, daß:

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{dY_\beta^b(x)}{dt} \right)_{x=b+\varepsilon} = +1, \text{ also } \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{dY_\beta^b(x)}{dt} \right)_{x=b-\varepsilon} = -1$$

ist.



Fassen wir dieses mit der in (15) gegebenen Festsetzung zusammen, so hat man:

$$(25) \quad Y_0^b(b) = 1, \quad \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=b} = 0, \quad Y_\beta^b = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=b+\varepsilon} = 1, \\ \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = -1.$$

In den zu  $\alpha$  und  $c$  gehörigen Fundamentallösungen sind dann die an sich noch willkürlichen konstanten Faktoren durch die Gleichungen (19) festgelegt; aber auch in diesen beiden singulären Punkten haben die dazu gehörigen Fundamentallösungen die Eigenschaft, daß immer die eine selbst verschwindet, die andere eine dort verschwindende 1. Ableitung besitzt.

Die Gültigkeit von (24) beruht wesentlich auf der Voraussetzung, daß  $\alpha, \beta, \gamma$  kleiner als 1 sind, und dieses ist auch der Grund, warum wir diese so stark beschränkende Voraussetzung einführen mußten.

In der Tat ist (24) für die folgenden Oszillationsbetrachtungen von grundlegender Bedeutung, wenigstens was die dabei auftretenden Eindeutigkeitsfragen anbelangt; denn die benutzten Beweismethoden versagen zum größten Teile, wenn die in (24) auftretenden Größen, anstatt zu verschwinden, unendlich groß werden.

Es ist noch zu untersuchen, was aus  $A$  in (3) bez. (23) wird, wenn wir statt  $d$  einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen. Zu diesem Zwecke fügen wir vorübergehend  $A$  und  $B$  den im  $\infty$  gelegenen Punkt als Index bei, so daß wir z. B. in (23) statt  $A$  und  $B$   $A_d$  und  $B_d$  zu schreiben hätten. Wir führen jetzt statt  $x$  die Größe  $Z = -\frac{1}{x-b}$  als Variable ein, dann geht (3) in eine Differentialgleichung analoger Art über, welche die singulären Stellen  $\bar{a} = \frac{1}{b-a}, \bar{b} = \infty, \bar{c} = \frac{1}{b-c}, \bar{d} = 0$  besitzt, wobei jetzt aus den Ungleichungen  $a > b > c$  folgt, daß  $\bar{c} > \bar{d} > \bar{a}$  ist.

Die Differentialgleichung (3) geht daher über in:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left( \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-(\delta'+\delta'')}{z} + \frac{1-\alpha}{z-\bar{a}} \right) \frac{dy}{dz} \\ + \frac{-\bar{a}\bar{c}}{(z-\bar{c})z(z-\bar{a})} \left( A_d b - \frac{A_d}{z} + B_d \right) y = 0.$$

Setzt man dann noch  $y = x^{\delta''} y_1$ , so erhält man für  $y_1$  die Gleichung:

$$(26) \quad \frac{d^2 y_1}{dz^2} + \left( \frac{1-\gamma}{z-\bar{c}} + \frac{1-(\delta'-\delta'')}{z} + \frac{1-\alpha}{z-\bar{a}} \right) \frac{dy_1}{dz} + \frac{1}{(z-\bar{c})z(z-\bar{a})} (A_b z + B_b) y_1 = 0.$$

Dabei würde gesetzt:

$$(27) \quad \delta''(\beta + \delta'') = A_b;$$

$$(28) \quad (\bar{c} + \bar{a})A_d - \bar{c}\delta''(1-\alpha) - \bar{a}\delta''(1-\gamma) - \bar{a}\bar{c}B_d - \bar{a}\bar{c}A_d b = B_b.$$

Da nun  $\bar{a}\bar{c}$  seiner Definition gemäß einen negativen Wert besitzt, so steigt und fällt, wie aus (28) unmittelbar folgt,  $B_b$  gleichzeitig mit  $B_a$ .

Überhaupt spielt jetzt das Intervall  $(\bar{d}, \bar{c})$  dieselbe Rolle, wie früher das Intervall  $(b, a)$ , das Intervall  $(\bar{a}, \bar{d})$  dieselbe Rolle, wie früher das Intervall  $(c, b)$ .

Wenn also  $A_a$  und  $A_b$  dasselbe Vorzeichen besitzen, so können wir die Sätze über das Verhalten von Lösungen der Gleichung (3) in dem Intervalle  $(b, a)$  bzw.  $(c, b)$  unmittelbar als Sätze über das Verhalten von Lösungen der Gleichung (26) für die Intervalle  $(\bar{d}, \bar{c})$  bzw.  $(\bar{a}, \bar{d})$  aussprechen und daher gelten diese Sätze, soweit sie durch die ausgeführten Transformationen nicht modifiziert werden, unmittelbar für die Lösungen der Differentialgleichung (3) in den Intervallen  $(d, c)$  bzw.  $(a, d)$ . Es ist also von größter Wichtigkeit, die Vorzeichen der Größen  $A$  zu diskutieren. Da wir alle vier Punkte gleichmäßig behandeln wollen, setzen wir:

$$\delta''(\alpha + \delta') = A_a, \quad \delta''(\beta + \delta') = A_b, \quad \delta''(\gamma + \delta') = A_c, \quad \delta' \delta'' = A_d.$$

Es sind dann folgende Fälle möglich:

I.  $A_d$  sei positiv,  $\alpha + \beta + \gamma < 2$ .

Da nun  $\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2$ ,  $\delta' \delta'' = A_d > 0$  ist, muß sowohl  $\delta'$  als auch  $\delta''$  positiv sein. Nun sind  $\alpha, \beta, \gamma$  nach (1) positive Größen, also sind auch  $A_a, A_b, A_c$  positive Größen. Man kann diesen Satz auch sofort umkehren. Es seien  $A_a, A_b, A_c, A_d$  positive Größen. Da  $A_d > 0$ , so sind  $\delta'$  und  $\delta''$  entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ. Sind  $\delta'$  und  $\delta''$  positiv, so folgt aus (4a), daß  $\alpha + \beta + \gamma < 2$  ist. Nehmen wir aber an, es wären sowohl  $\delta'$  als auch  $\delta''$  negative Größen, dann folgt, daß jede der drei Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  größer ist als  $|\delta' + \delta''|$ , da ja nach (1) z. B.  $\alpha + \beta < 2$  und nach (4a)  $\alpha + \beta + \gamma - |\delta' + \delta''| = 2$  ist. Daher wären in diesem Falle  $A_a, A_b, A_c$  negativ, was gegen die Voraussetzung ist. Wir haben also:

Satz 4: Ist  $A_d > 0$ ,  $\alpha + \beta + \gamma < 2$ , so sind  $A_a, A_b, A_c$  positiv; sind  $A_a, A_b, A_c, A_d$  positiv, so ist immer  $\alpha + \beta + \gamma < 2$ .

II. Es ist  $A_d > 0$ ,  $\alpha + \beta + \gamma > 2$ .

Aus (4a) folgt jetzt, daß  $\delta'$  und  $\delta''$  negative Größen sind. Dann zeigt man, wie eben, daß jede der drei Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  größer ist als  $|\delta' + \delta''|$ , also ist gewiß  $(\alpha + \delta'') > 0$ ,  $(\beta + \delta') > 0$ ,  $(\gamma + \delta'') > 0$ , und es folgt  $A_a < 0$ ,  $A_b < 0$ ,  $A_c < 0$ , so daß wir also den Satz haben:

Satz 5: Ist  $A_d > 0$ ,  $\alpha + \beta + \gamma > 2$ , so sind  $A_a, A_b$  und  $A_c$  negative Größen. Ist  $A_d > 0$ ,  $A_a < 0$ ,  $A_b < 0$ ,  $A_c < 0$ , so ist  $\alpha + \beta + \gamma > 2$ .

Der 2. Teil dieses Satzes 5 folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß  $\delta'$  und  $\delta''$  negative Größen sein müssen, da sonst aus Satz 4 folgen würde, daß  $A_a, A_b, A_c$  positive Größen sind.

Es sei jetzt  $A_d$  negativ. Dann sind folgende zwei Fälle möglich. Entweder sind alle vier Größen  $A_a, A_b, A_c$  und  $A_d$  negativ, oder es ist zum mindesten eine von diesen Größen positiv. Wenn aber eine dieser Größen positiv ist, so haben wir einen zu Fall I oder zu Fall II analogen Fall. Ein zu Fall I analoger Fall ist aber unmöglich, da  $A_d$  negativ ist.

Wir haben also

Satz 6: *Ist  $A_d$  negativ, so sind entweder alle vier Größen  $A_a, A_b, A_c, A_d$  negativ oder zum mindesten drei von ihnen.*

Wir kommen also bei negativem  $A_d$  nur, wenn der zu II analoge Fall nicht eintritt, auf einen neuen Fall:

III.  $A_a < 0, A_b < 0, A_c < 0, A_d < 0$ .

Den Satz 6 sieht man auch ohne Zuhilfenahme der Sätze 4 und 5 leicht folgendermaßen ein. Da nach (4c)  $\delta' - \delta'' = \delta$  und nach (1)  $0 < \delta < 1$ , ferner nach Voraussetzung  $A_d$  negativ ist, so ist gewiß  $\delta'' < 0$ . Es sei nun  $\beta$  beispielshalber die kleinste der Größen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  und nicht nur  $\beta + \delta'' < 0$ , sondern auch  $\gamma + \delta'' < 0$ , dann wäre, da

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = \alpha + \beta + \delta'' + \gamma + \delta'' + \delta' - \delta'' = 2$$

ist,

$$\alpha + \delta' - \delta'' > 2,$$

was aber unmöglich ist, da  $\alpha < 1$  und  $\delta' - \delta'' < 1$  ist. Es kann also unter der Annahme, daß  $\beta$  die kleinste der Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  ist, bei den gemachten Voraussetzungen nur  $A_b$  positiv sein, womit Satz 6 aufs neue bewiesen ist.

Um die Tragweite dieser auf so einfache Weise gewonnenen Sätze klar zu machen, wollen wir folgendes Theorem aussprechen, dessen 1. Teil im nächsten Paragraphen, dessen 2. Teil im § 8 bewiesen wird.

Satz 7: *Ist  $A_d$  positiv, so besitzt höchstens die eine der beiden nicht durch  $d'$  gehenden Seiten des Kreisbogenviereckes eine in projektiver Maßbestimmung gemessene Länge mit von 0 verschiedenem reellem Teile. Ist  $A_d$  negativ, so besitzt mindestens die eine der beiden nicht durch  $d'$  gehenden Seiten des Kreisbogenviereckes eine in projektiver Maßbestimmung gemessene Länge mit von 0 verschiedenem reellem Teile.*

Um derartige Sätze zu beweisen, bedienen wir uns sogenannter „Oszillationsbetrachtungen“.\*). Die ursprüngliche Form des Oszillations-

\*) Eine ausführliche Literaturangabe über diesen Gegenstand findet sich in dem Artikel von Herrn Bôcher über „Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen“, Encyclopädie der math. Wiss. II A 7a, 1900.

theorems findet sich in den Arbeiten von Sturm und Liouville im Bande I und II von Liouvilles Journal aus den Jahren 1836—1838. Es handelt sich dabei im wesentlichen um folgendes Theorem.

Es sei  $(x_1, x_2)$  ein Intervall der  $x$ -Achse, ferner seien zwei in diesem Intervalle stetige Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  gegeben; überdies sei  $\varphi(x)$  für  $x_1 < x < x_2$  stets  $> 0$ . Wir betrachten dann die Differentialgleichung:

$$(29) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (A\varphi(x) + \psi(x))y = 0.$$

Dann kann man stets einen und nur einen reellen Wert des Parameters  $A$  derart bestimmen, daß eine Lösung  $y$  von (29) existiert, für die  $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y}$  in  $x_1$  und  $x_2$  je einen vorgeschriebenen Wert annimmt, welche ferner zwischen  $x_1$  und  $x_2$  eine gegebene Anzahl von Nullstellen besitzt, womit die Anzahl von *Halboszillationen* festgelegt ist, die  $y$  im Intervalle macht. Dieses Theorem wurde dann von Herrn Klein\*), der den Namen Oszillationstheorem schuf, aufgenommen und dahin erweitert, daß er Differentialgleichungen mit  $m$  Parametern betrachtete und die  $m$  Parameter durch den obigen analoge Grenzbedingungen bez. Oszillationsforderungen für  $m$  Intervalle festlegte. Dann aber untersuchte Herr Klein, zunächst allerdings nur für einen Spezialfall, auch solche Oszillationstheoreme, bei denen sich das Intervall bis an singuläre Punkte heranzieht. Herr Bôcher\*\*) zeigte nun in der Folge ganz allgemein, daß das Oszillationstheorem für Intervalle, die an singuläre Punkte heranreichen, bestehen bleibt, sofern die Exponentendifferenzen der in Betracht kommenden singulären Punkte reell sind, zwischen 0 und 1 liegen und von dem Parameter unabhängig sind. Man muß aber dann, statt den Wert des Quotienten  $\frac{y'}{y}$  in den Randpunkten vorzuschreiben, angeben, welchen linearen Kombinationen der zu den singulären Punkten gehörigen Fundamentallösungen  $y$  proportional sein soll. Ferner werden von Herrn Bôcher auch solche Fälle erörtert, bei denen die Exponentendifferenzen  $\geq 1$  sind, diese bleiben aber hier außer Betracht.

Bei allen diesen Erweiterungen des Oszillationstheorems blieb man dabei stehen, daß man, wenn ein Parameter gegeben war, auch nur für eine Lösung der Differentialgleichung Grenzbedingungen vorschrieb. Unsere Aufgabe ist es aber, den Parameter  $B$  in (3) derart zu bestimmen, daß die durch (10) oder (13) gegebenen Verbindungen von  $l_1, l_2, n_1, n_2$  vorgeschriebene Werte annehmen, d. h. wir haben im ersten Falle zwei

\*) Math. Annalen 18, Göttinger Nachrichten 1890, vgl. auch Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 1894. (Autographiertes Vorlesungsheft, Verlag Teubner).

\*\*) American Bulletin, Oktober 1898 u. April 1900.

Lösungen,  $Y_a^a$ ,  $Y_0^a$ , im zweiten Falle vier Lösungen  $Y_a^a$ ,  $Y_0^a$ ,  $Y_\gamma^c$ ,  $Y_0^c$  zu betrachten und den Parameter  $B$  so zu bestimmen, daß, wenn diese Lösungen durch die Fundamentallösungen  $Y_\beta^b$  und  $Y_0^b$  in der durch (19) gegebenen Weise dargestellt werden, entweder  $\frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}$  oder  $\frac{l_2 l_2}{n_1 n_2}$  in geeigneter Weise vorgeschriebene Werte annehmen.

Um diese Probleme zu behandeln, müssen wir zunächst die Abhängigkeit der Größen  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  von  $B$  direkt untersuchen und dann erst die aus ihnen gebildeten Ausdrücke (10) und (13) in ihrer Abhängigkeit von  $B$  diskutieren.

Diese Methode wird uns über die meisten hier in Betracht kommenden Fragen in befriedigender Weise Aufschluß erteilen.

Es ist nun im folgenden ein wesentlicher Unterschied zu machen, ob  $A$  positiv oder negativ ist. Wir lassen zunächst, um einen konkreten Fall zu haben,  $d$  im Unendlichen; es geht dann aus den Untersuchungen am Anfang dieses Paragraphen hervor, wie wir aus diesem Spezialfall Aufschluß über die Verhältnisse gewinnen, die eintreten, wenn wir einen anderen singulären Punkt in das Unendliche werfen.

#### § 4.

##### Oszillationsbetrachtungen bei positivem $A$ .

Wir gehen von der Differentialgleichung:

$$(23) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha} |x-b|^{2-2\beta} |x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot (Ax + B)y = 0$$

aus, wobei  $a > b > c$  und  $A > 0$  ist.

Dabei ist also:

$$\frac{|x-a|^{2-2\alpha} |x-b|^{2-2\beta} |x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

für  $b < x < a$  negativ, für  $c < x < b$  positiv.

Wir führen jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x$ ,  $z$  ein und betrachten die verschiedenen Lagen der Geraden:

$$z = Ax + B$$

bei variierendem  $B$ , dem Parallelverschiebungen der Geraden entsprechen, da  $A$  einen festen, positiven Wert besitzt.

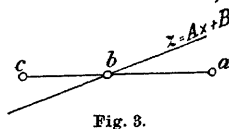


Fig. 3.

Als Anfangswert wählen wir  $B = -b \cdot A$ , d. h. wir geben der Geraden die in nebenstehender Figur gezeichnete Lage. Dann aber ist in (23) der Faktor von  $y$  sowohl im Intervalle  $(c, b)$  als auch im Intervalle  $(b, a)$  negativ und dies ist die einzige mögliche Lage der Geraden, bei der der Faktor von  $y$  in beiden Intervallen durchaus dasselbe Vorzeichen besitzt.

Verschieben wir die Gerade nach oben, so wird für das Intervall  $(c, b)$  der Faktor von  $y$  in einem immer größer werdenden Teile dieses Intervalles positiv, verschieben wir die Gerade nach abwärts, so gilt dasselbe vom Intervalle  $(b, a)$ .

Wir untersuchen jetzt den Verlauf von  $Y_\beta^b$  und  $Y_0^b$  in den Intervallen  $(b, a)$  und  $(b, c)$  unter der Annahme daß  $B = -bA$  sei. Es ist nach (25):

$$Y_\beta^b(b) = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x) \right)_{x=b+\varepsilon} = 1.$$

Da nun in (23) der Koeffizient von  $y$  nach unserer Annahme im Intervalle  $(b, a)$  negativ ist, so folgt, daß  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  immer dasselbe Vorzeichen hat wie  $y$ . Nun sind in der unmittelbaren Nachbarschaft von  $t_b$ , d. h. von dem Werte von  $t$ , der zu  $x = b$  gehört,  $Y_\beta^b(x)$  und  $\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)$  positiv, also ist auch  $\frac{d^2}{dt^2} Y_\beta^b(x)$  positiv, d. h. aber,  $\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)$  und also auch  $Y_\beta^b(x)$  wachsen beständig, wenn sich  $t$  von  $t_b$  nach  $t_a$ , d. h. nach dem zu  $x = a$  gehörigen Werte von  $t$  bewegt. Da ferner nach (25)

$$Y_0^b(b) = 1, \quad \left( \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right)_{x=b+\varepsilon} = 0$$

ist, so folgt auf dieselbe Weise, daß

$$Y_0^b(x), \quad \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \text{ und } \frac{d^2}{dt^2} Y_0^b(x)$$

im ganzen Intervall durchaus positiv sind. Es empfiehlt sich, den Verlauf von  $Y_\beta^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  graphisch darzustellen und zwar als Funktionen von  $t$ , wie es in Figur 4 geschieht.

Nun soll sich  $Y_\alpha^a$  in der Form  $Y_\beta^b - l_1 Y_0^b$  darstellen lassen derart, daß  $Y_\alpha^a(a) = 0$  ist; daraus folgt, daß  $l_1$  positiv ist. Ebenso folgt, daß  $l_2$  positiv ist, denn man hat ja:

$$Y_0^a = Y_\beta^b - l_2 Y_0^b, \quad \left( \frac{d}{dt} Y_0^a(x) \right)_{x=a} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x) \right)_{x=a-\varepsilon} > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right)_{x=a-\varepsilon} > 0.$$

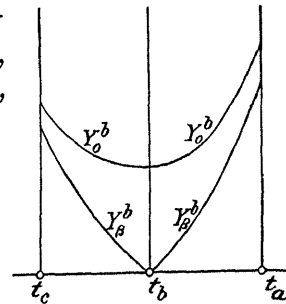


Fig. 4.

Wir untersuchen jetzt für den betrachteten Fall die gegenseitige Lage von  $l_1$  und  $l_2$ . Es ist:

$$l_1 = \frac{Y_\beta^b(a)}{Y_0^b(a)}, \quad l_2 = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\left( \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x) \right)_{x=a-\varepsilon}}{\left( \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right)_{x=a-\varepsilon}};$$

also:

$$(30) \quad l_2 - l_1 = \lim_{\varepsilon=0} \frac{Y_0^b(a) \cdot \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon} - Y_\beta^b(a) \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon}}{Y_0^b(a) \cdot \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon}}.$$

Nach dem früheren sind aber

$$Y_0^b(a) \text{ und } \lim_{\varepsilon+\alpha} \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=a-\varepsilon}$$

positiv, ferner ist für  $b \leq x \leq a$ :

$$Y_0^b(x) \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x) - Y_\beta^b(x) \frac{d}{dt} Y_0^b(x) = \text{const.},$$

wie aus einem bekannten Satze der linearen Differentialgleichungen unmittelbar folgt. Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir  $x = \lim_{\varepsilon=0} (b + \varepsilon)$  und finden ihren Wert gleich 1. Es folgt also aus (30)  $l_2 - l_1 \stackrel{\varepsilon=0}{>} 0$ , d. h.

$$(31) \quad l_2 > l_1.$$

Wir leiten jetzt die analogen Resultate für  $n_1$  und  $n_2$  ab, wobei wir zunächst zeigen, daß  $Y_0^b(x)$  und  $Y_\beta^b(x)$  auch zwischen  $t_b$  und  $t_c$  den in Figur 4 schematisch angegebenen Verlauf haben. Da nämlich:

$$Y_\beta^b(b) = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = -1,$$

$$Y_0^b(b) = +1, \quad \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=b-\varepsilon} = 0,$$

so folgt, daß mit abnehmendem  $t$ , also auch mit abnehmendem  $x$ :

$$Y_\beta^b(x), \quad \left| \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x) \right|, \quad Y_0^b(x), \quad \left| \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right|$$

durchaus und zwar immer stärker wachsen. Es ist also sicher:

$$Y_\beta^b(c) > 0, \quad Y_0^b(c) > 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon} < 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon} < 0.$$

Da nun

$$Y_\gamma^c(c) = 0 = Y_\beta^b(c) - n_1 Y_0^b(c),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d}{dt} Y_0^c(x)\right)_{x=c+\varepsilon} = 0 = \lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{d}{dt} (Y_\beta^b(x) - n_2 Y_0^b(x))\right]_{x=c+\varepsilon},$$

so folgt, daß  $n_1 > 0$  und  $n_2 > 0$  ist. Ferner hat man analog wie oben:

$$n_1 - n_2 = \lim_{\varepsilon=0} \frac{Y_\beta^b(c) \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon} - Y_0^b(c) \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon}}{Y_0^b(c) \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=c+\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{Y_0^b(c) \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{c+\varepsilon}} < 0.$$

Daher ist:

$$(32) \quad n_2 > n_1.$$

Zusammenfassend haben wir also:

Satz 8. Ist  $A > 0$ ,  $B = -bA$ , dann verschwindet weder  $Y_\beta^b(x)$  noch  $Y_0^b(x)$  im Intervalle  $b < x \leq a$  oder im Intervalle  $c \leq x < b$ ; es sind ferner  $l_1, l_2, n_1, n_2$  positive Größen und es ist  $l_2 > l_1, n_2 > n_1$ .

Die Gültigkeit dieses Satzes ist wesentlich von der Annahme  $A > 0$  abhängig.

Um nun weiterhin zu sehen, wie sich die Größen  $l_1, l_2, n_1, n_2$  mit abnehmendem oder wachsendem  $B$  ändern, bedienen wir uns folgenden Satzes:

Es sei

$$(33) \quad L(u) = \frac{d^2 u}{dt^2} + \varphi(t) \cdot u = 0,$$

wobei  $\varphi(t)$  eine stetige Funktion von  $t$  ist. Es seien ferner  $t_1$  und  $t_2$  reelle Zahlen, dann gilt die Identität:

$$(34) \quad \int_{t_1}^{t_2} (v L(v) - u L(u)) dt = \left[ v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Wir betrachten jetzt speziell die beiden Gleichungen:

$$(35) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} (Ax + B) y = 0$$

und:

$$(35a) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} (Ax + B + \varepsilon_1) y = 0.$$

Die Lösungen von (35a) sind analytische Funktionen von  $\varepsilon_1$ . Die zu (35) gehörigen Fundamentallösungen bezeichnen wir wie früher; die zu (35a) gehörigen Fundamentallösungen und Größen zeichnen wir durch Hinzufügung eines Index  $\varepsilon_1$  aus, wir schreiben also z. B.:

$$Y_\alpha^{\varepsilon_1} = Y_\beta^{\varepsilon_1} - l_1^{(\varepsilon_1)} Y_0^{\varepsilon_1}.$$

Wir setzen nun in (33) bzw. (34):

$$\varphi(t) = \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot Ax, \quad t_1 = t_b, \quad t_2 = t_a,$$

$$u = Y_\alpha^{\varepsilon_1}(x), \quad v = Y_\alpha^{\varepsilon_1}(x);$$

dann erhält man:

$$-\varepsilon_1 \int_t^a \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot Y_\alpha^{\varepsilon_1}(x) \cdot Y_\alpha^{\varepsilon_1}(x) dt = l_1 - l_1^{(\varepsilon_1)}.$$



Nun ist

$$\frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

im ganzen Intervalle negativ, ferner können wir  $\varepsilon_1$  so klein wählen, daß sich  $Y_{\alpha}^{a, \varepsilon_1}(x) \cdot Y_{\alpha}^a(x)$  beliebig wenig von  $(Y_{\alpha}^a(x))^2$  unterscheidet; für kleine positive Werte von  $\varepsilon_1$  ist daher der Wert des Integrals negativ, also  $l_1 > l_1^{(\varepsilon_1)}$ , für kleine negative Werte von  $\varepsilon_1$  ist  $l_1 < l_1^{(\varepsilon_1)}$ . Es folgt unmittelbar, daß derselbe Satz auch für  $l_2$ , dagegen der entgegengesetzte Satz für  $n_1$  und  $n_2$  gilt. Denn man sieht sofort, daß das Verhalten von  $Y_{\beta}^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  im Intervalle  $(b, c)$  bez. einer Abwärtsbewegung der Geraden  $z = Ax + B$  dasselbe ist wie im Intervalle  $(b, a)$  bez. einer Aufwärtsbewegung dieser Geraden und umgekehrt.

Wir dürfen uns also im folgenden stets darauf beschränken, die Veränderung von  $l_1, l_2, n_1, n_2$  bei einer Abwärtsbewegung der Geraden von der Anfangslage aus zu diskutieren. Zunächst verzeichnen wir aber den

**Satz 9.** *Wenn wir die Gerade  $z = Ax + B$  parallel zu sich nach unten verschieben, so wachsen  $l_1$  und  $l_2$ ,  $n_1$  und  $n_2$  nehmen dagegen ab; verschieben wir die Gerade nach oben, so nehmen  $l_1$  und  $l_2$  ab,  $n_1$  und  $n_2$  wachsen.*

Da nun bei der Abwärtsbewegung der Geraden von der Anfangslage aus der Koeffizient von  $y$  in der Differentialgleichung in dem Intervalle  $(b, c)$  immer stärker negativ wird, so gelten die Schlüsse, durch welche wir bei der Anfangslage zeigten, daß

$$Y_{\beta}^b(x), \quad Y_0^b(x), \quad \left| \frac{d}{dt} Y_{\beta}^b(x) \right|, \quad \left| \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right|$$

im Intervalle  $(b, c)$  mit abnehmendem  $t$  fortwährend wachsen, a fortiori können daher

$$Y_{\beta}^b(c), \quad Y_0^b(c), \quad \lim_{t=0} \left( \frac{d}{dt} Y_{\beta}^b(x) \right)_{x=c+t}, \quad \text{und} \quad \lim_{t=0} \left( \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right)_{x=c+t}$$

nicht verschwinden; dann folgt aber aus (19), daß  $n_1$  und  $n_2$  stets von 0 verschieden sind. Verbinden wir dies mit den Sätzen (8) und (9), so erhalten wir, da ja  $n_2$  und  $n_1$  nie einander gleich werden können,

**Satz 10.** *Ist  $B < -bA$ , so sind  $n_1$  und  $n_2$  stets positiv,  $n_2 > n_1$  und  $Y_{\beta}^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  sind stets von 0 verschieden, wenn  $c \leq x < b$ ; ist  $B > -bA$ , so sind  $l_1$  und  $l_2$  stets positiv,  $l_2 > l_1$  und sowohl  $Y_{\beta}^b(x)$  als auch  $Y_0^b(x)$  sind von 0 verschieden, wenn  $b < x \leq a$ .*

Wir können diesen Satz auch folgendermaßen aussprechen:

**Satz 11.** *Wenn  $B < -bA$ , so erstreckt sich die in den Meridian der reellen Zahlen gedrehte Seite  $b'c'$  direkt von 0 bis zu dem positiven Wert  $c'$ , ohne die Kreisperipherie mehrmals zu umspannen. Ist dagegen*

$B > -bA$ , so erstreckt sich die Seite  $b'a'$  direkt von 0 bis zu dem positiven  $a'$ .

Etwas komplizierter ist die Sachlage in den beiden anderen Fällen, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden. Wir wollen also z. B. die Änderung von  $l_1$  und  $l_2$  bei Abwärtsverschiebung der Geraden aus der Anfangslage verfolgen. Dabei wissen wir zunächst, daß sich

$$Y_\beta^b(a), \quad Y_0^b(a), \quad \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x) \right)_{x=a-\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_0^b(x) \right)_{x=a-\varepsilon}, \quad l_1 \text{ und } l_2$$

stetig mit  $B$  verändern. Ausgenommen dabei sind zunächst nur die Fälle, in denen  $l_1$  und  $l_2$  unendlich werden; in diesen Fällen ändern sich aber  $\frac{1}{l_1}$  bzw.  $\frac{1}{l_2}$  stetig.

Um weitergehen zu können, müssen wir jetzt das Sturmsche Oszillationstheorem heranziehen und zwar für ein Segment, an dessen beiden Enden singuläre Punkte liegen. Wir können hier nun auf zwei verschiedene Weisen verfahren. Wir können nämlich den oben erwähnten Satz des Herrn Bôcher, der aussagt, daß das Oszillationstheorem hier noch gilt, direkt benützen; wir kommen aber auch zu Ende, wenn wir nur als bekannt voraussetzen, daß wir  $-B$  so groß wählen können, daß in irgend einem zwischen  $t_b$  und  $t_a$  gelegenen Intervalle die Lösungen der Differentialgleichung, also speziell auch  $Y_\beta^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  mindestens eine gegebene Anzahl von Nullstellen besitzen. Dieses folgt unmittelbar aus dem am Ende des vorigen Paragraphen zitierten Satze von Sturm, wenn wir noch hinzufügen, daß die Nullstellen irgend zweier Lösungen einer solchen Differentialgleichung sich stets trennen. Wir werden diesen letzteren Satz später noch direkt beweisen.

Es tritt nun die Frage auf, wie es möglich ist, daß bei Abwärtsbewegung unserer Geraden von der Anfangslage aus Nullstellen von  $Y_\beta^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  im Innern des Bereiches  $(b, a)$  entstehen können.

Von  $b$  aus können bei sich veränderndem  $B$  keine Nullstellen in das Innere hereinrücken, da man, sofern nur  $B$  unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, von  $x = b$  aus nach rechts ein endliches Intervall derart angeben kann, daß innerhalb desselben

$$Y_0^b(x), \quad Y_\beta^b(x), \quad \frac{d}{dt} Y_0^b(x), \quad \frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)$$

gewiß nicht verschwinden. Aber auch im Innern des Intervalles  $(b, a)$  kann keine Nullstelle entstehen; denn nehmen wir an, es verschwinde für  $B = B_1$   $Y_0^b(x)$  im Punkte  $t = \tau$ , wobei  $t_b < \tau < t_a$  ist, ferner seien die zu  $B > B_1$  gehörigen  $Y_0^b(x)$  in der Umgebung von  $t = \tau$  durchaus von 0 verschieden, wenn  $B$  nahe genug an  $B_1$  liegt. Nun sind  $Y_0^b(x)$  und  $Y_\beta^b(x)$  in der Umgebung von  $t = \tau$  analytische Funktionen von  $t$  und  $B$ , es

müßte daher unter den obigen Annahmen für  $B = B_1$  außer  $(Y_0^b(x))_{t=\tau}$  auch noch  $(\frac{d}{dt} Y_0^b(x))_{t=\tau}$  verschwinden; dann aber wäre für  $B = B_1$   $Y_0^b(x) \equiv 0$ , was widersinnig ist. Es kann also  $Y_0^b(x)$  bei Verkleinerung von  $B$  nur dadurch im Innern des Intervalles Nullstellen erhalten, daß  $Y_0^b(a)$  verschwindet und diese Nullstelle in das Innere des Intervalles rückt. Da man nun nach den obigen Ausführungen  $B$  so stark negativ wählen kann, daß jede Lösung der Differentialgleichung, also auch  $Y_0^b(x)$  in einem zwischen  $b$  und  $a$  gelegenen Intervalle mindestens eine vorgegebene Anzahl  $n$  von Nullstellen besitzt, so folgt, daß  $Y_0^b(a)$  mindestens  $n$  mal verschwinden muß, während  $B$  sich von  $B = -bA$  soweit abwärts bewegt, da ja für  $B = -bA$   $Y_0^b(x)$  im Intervalle  $(b, a)$  keine Nullstelle besaß. So oft aber  $Y_0^b(a) = 0$  ist, muß es proportional mit  $Y_a^b(x)$  sein, dieses ist aber nach (19) nur dann möglich, wenn  $\frac{1}{l_1} = 0$ , d. h.  $l_1 = +\infty$  ist. Nun kann bei abnehmendem  $B$  die Größe  $l_1$  im allgemeinen nur wachsen, es springt also  $l_1$  von  $+\infty$  nach  $-\infty$  und durchwandert alle reellen Zahlen, bis  $Y_0^b(a)$  wieder verschwindet. Da ferner  $l_2$  stets  $l_1$  vorausseilen muß, so durchläuft auch  $l_2$  beliebig oft den Kreis der reellen Zahlen, ohne aber je  $l_1$  um einen ganzen Umlauf überholen zu können. Wir haben also folgenden wichtigen Satz gewonnen:

Satz 12. Ist  $B < -bA$ , so durchlaufen die Werte  $l_1$  und  $l_2$ , wenn wir  $B$  genügend abnehmen lassen, den ganzen Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn beliebig oft, ohne daß dabei  $l_1$  je  $l_2$  einholen oder  $l_2$  um einen ganzen Umlauf  $l_1$  überholen kann; man kann also  $B$  so klein wählen, daß die Seite  $b'a'$  den Kreis der reellen Zahlen eine gegebene Zahl Male umspannt. Ist dagegen  $B > -bA$ , so durchlaufen, wenn wir  $B$  genügend wachsen lassen, die Werte  $n_1$  und  $n_2$  den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne beliebig oft, ohne daß dabei  $n_1$  je  $n_2$  einholen oder  $n_2$  um einen ganzen Umlauf  $n_1$  überholen kann; man kann also  $B$  so groß wählen, daß die in den Meridian der reellen Zahlen gedrehte Seite  $b'c'$  den Kreis der reellen Zahlen eine gegebene Zahl Male umspannt.

Einen genaueren Einblick in das Verhalten der Seitenlänge erhalten wir jetzt durch Zuhilfenahme von Satz 1 und 2. Wir entnehmen daraus speziell folgende Schlußfolgerung:

Satz 13. Man kann stets  $B$  so bestimmen, daß die Seite  $a'b'$  eine gegebene reelle Seitenlänge  $\varphi$  besitzt. Dagegen kann man für  $a'b'$  nicht jede beliebige Seitenlänge von der Form  $k\pi + \chi i$  vorschreiben, wo  $k$  eine ganze Zahl,  $\chi$  eine vorgegebene reelle Größe ist.

Aus Satz 12 können wir jetzt auch unmittelbar den ersten Teil von Satz 7 entnehmen; denn, wenn  $B < -bA$  ist, sind  $n_1$  und  $n_2$  durchaus

positiv (vgl. Fig. 5), ebenso wenn  $B > -bA$  ist, sind  $l_1$  und  $l_2$  positiv, also ist in dem einen Fall die Länge von  $b'c'$ , im anderen Falle die von  $b'a'$  rein imaginär.

Wir haben aber jetzt erst gezeigt, daß man den Parameter  $B$  stets so bestimmen kann, daß die Seitenlänge von  $a'b'$  einen vorgeschriebenen reellen Wert annimmt, es folgt aber daraus keineswegs, daß bei Vorgabe einer reellen Seitenlänge von  $a'b'$  auch der Parameter  $B$  *eindeutig* bestimmt ist. Wir werden im nächsten Paragraphen diese Lücke ausfüllen, indem wir zeigen, daß, wenn wir für die Seitenlänge  $\varphi$  einen reellen Wert vorschreiben, der nicht gerade von der Form  $k\pi$  ist, wo  $k$  eine ganze Zahl, der Parameter  $B$  *eindeutig* bestimmt ist. Was die reellen Werte  $k\pi$  anbetrifft, so folgt aus Satz 1 ja schon, daß es zu  $\varphi = k\pi$  zwei Parameterwerte  $B$  gibt, es müßte denn gleichzeitig  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = \infty$  oder  $l_1 = \infty$ ,  $l_2 = 0$  sein. Desgleichen kann es natürlich nicht gelingen, die eindeutige Bestimmung von  $B$  durch eine Seitenlänge  $\varphi = k\pi + \psi i$  zu erweisen; denn man ersieht ja sofort aus Satz 1, daß es dazu entweder überhaupt keinen Parameterwert  $B$  oder mindestens zwei Parameterwerte gibt.

Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir nur noch hervorheben, daß in der hier gegebenen Ableitung des einschlägigen Oszillationstheorems vieles enthalten ist, was sich unmittelbar auf den Fall übertragen läßt, bei dem die Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma$  zum Teil  $\geq 1$  sind.

## § 5.

### Eindeutige Bestimmung von $B$ durch Vorgabe einer reellen Maßzahl für die in projektiver Weise gemessene Seitenlänge von $a'b'$ .

Wir bedienen uns zum Nachweise des angekündigten Satzes einer Methode, welche von Herrn Klein im Falle  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$  in seinen Vorlesungen\*) entwickelt wurde, die aber sehr leicht verallgemeinerungsfähig ist. Wir nehmen also an, die Seitenlänge  $a'b'$  sei reell

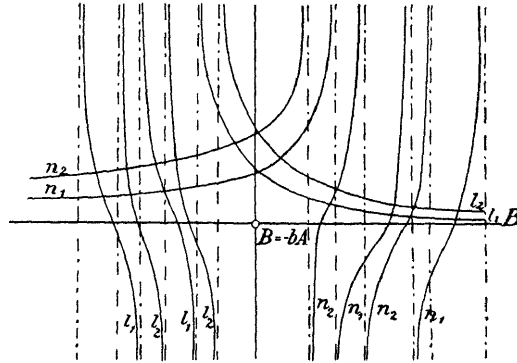


Fig. 5.

\*) Klein, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, 1894, S. 379.

und gleich der Größe  $\frac{m}{n} \pi$ , wobei  $\frac{m}{n}$  eine rationale, nicht ganze Zahl sein soll. Wir setzen jetzt:

$$(36) \quad d\tau = |dt| = \frac{|dx|}{|x-a|^{1-\alpha}|x-b|^{1-\beta}|x-c|^{1-\gamma}}.$$

Wenn  $x$  jetzt  $n$  mal den Weg von  $b$  nach  $a$  und von  $a$  nach  $b$  zurück durchläuft, wächst  $\tau$  von  $t_b$  bis  $t_b + 2n(t_a - t_b)$ ; dabei bezeichnen wir die zu  $x = a$  und  $x = b$  gehörigen Werte von  $t$  mit  $t_a$  und  $t_b$ . Durch die Festsetzung in (36) haben wir erreicht, daß die auf der  $x$ - und  $t$ -Achse übereinander liegenden Intervalle auf der  $\tau$ -Achse nebeneinander zu liegen kommen.

Wir führen jetzt für  $Y_\beta^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  ein neues Fortsetzungsprinzip ein, indem wir festsetzen, daß sich

$$Y_\beta^b(x), \quad Y_0^b(x), \quad \frac{d}{d\tau} Y_\beta^b(x), \quad \frac{d}{d\tau} Y_0^b(x)$$

längs des ganzen Segmentes auf der  $\tau$ -Achse stetig verändern, dann gilt dasselbe auch von

$$Y_\alpha^a(x), \quad Y_0^a(x), \quad \frac{d}{d\tau} Y_\alpha^a(x), \quad \frac{d}{d\tau} Y_0^a(x).$$

Nun ist für  $x = a$

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_0^a(x) \right)_{x=a-\varepsilon} = 0 = \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{d\tau} Y_0^a(x) \right)_{x=a-\varepsilon},$$

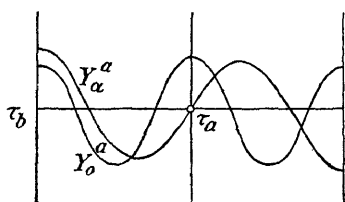


Fig. 6.

es wird also  $Y_0^a(x)$  an der Stelle  $a$  infolge unserer Festsetzung gerade so reflektiert, wie es dorthin gekommen ist, d. h. auf dem Rückwege von  $a$  aus hat  $Y_0^a(x)$  denselben Wert in irgend einem zwischen  $a$  und  $b$  gelegenen Punkte  $\xi$ , den es auf dem Hinwege zu  $a$  hatte.

Anders aber verhält sich  $Y_\alpha^a(x)$  bei der Reflexion. Es ist nämlich  $Y_\alpha^a(a) = 0$ , dagegen ist auf dem Hinwege

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_\alpha^a(x) \right)_{x=a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{d\tau} Y_\alpha^a(x) \right)_{x=a-\varepsilon},$$

auf dem Rückwege

$$\lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{dt} Y_\alpha^a(x) \right)_{x=a-\varepsilon} = - \lim_{\varepsilon=0} \left( \frac{d}{d\tau} Y_\alpha^a(x) \right)_{x=a-\varepsilon}.$$

Nun ändert sich die Differentialgleichung nicht, wenn wir  $\tau$  statt  $t$  einführen, und wir haben in  $Y_\alpha^a(x)$  vor und nach der Reflexion zwei Lösungen der Differentialgleichung, deren Anfangswerte gerade das entgegengesetzte Zeichen haben, also haben diese Lösungen durchaus gleich große absolute Werte, aber entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. es wird gemäß unserer Festsetzung  $Y_\alpha^a(x)$  als  $-Y_\alpha^a(x)$  an  $a$  reflektiert. Als Funk-

tion von  $\tau$  haben  $Y_0^a$  und  $Y_a^a$  hiernach den in Figur 6 verzeichneten Verlauf; wir verstehen dabei unter  $\tau_{b_1}$  den Wert von  $\tau$  in  $b$  nach der ersten Reflexion.

Was bedeutet das für  $\eta = \frac{Y_\beta^b(x)}{Y_0^b(x)}$ ? Es gehe durch die Reflexion in  $a$   $\eta$  in  $\eta_1$  über, dann ist nach (19):

$$\frac{\eta - l_1}{\eta - l_2} = - \frac{\eta_1 - l_1}{\eta_1 - l_2},$$

d. h. aber, die  $\eta$ -Kugel erleidet bei der Reflexion eine Drehung von der Amplitude  $\pi$  um  $a'a''$  als Achse.  $a'$  und  $a''$  bleiben bei dieser Drehung liegen,  $b'$  und  $b''$  gehen in zwei andere Punkte  $b_1'$  und  $b_1''$  des reellen Zahlenkreises über, und zwar geht  $b_1'b_1''$  durch den Schnittpunkt von  $b'b''$  mit  $a'a''$ , da ja dieser Punkt bei der Drehung liegen bleibt. Die Länge der Seite  $a'b_1'$  ist natürlich gleich der von  $b'a'$ . Der Reflexion an  $b$  entspricht in gleicher Weise eine Drehung der Kugel von der Amplitude  $\pi$  mit  $b_1'b_1''$  als Achse,  $a'$  und  $a''$  gehen dabei über in  $a_1'$  und  $a_1''$ .  $n$  Reflexionen an  $a$  und  $b$  entsprechen also hintereinander ausgeführten Drehungen von der Amplitude  $\pi$  um die Achsen

$a'a''$ ;  $b_1'b_1''$ ;  $a_1'a_1''$ ;  $b_2'b_2''$ ;  $\dots$ ;  $a_{n-2}'a_{n-2}''$ ;  $b_{n-1}'b_{n-1}''$ ;  $a_{n-1}'a_{n-1}''$ ;  $b_n'b_n''$ .

Dabei geht  $a_v'$  und  $a_v''$  aus  $a_{v-1}'$  und  $a_{v-1}''$  durch eine Drehung um die Achse  $b_v'b_v''$  hervor und  $b_\mu'$  bzw.  $b_\mu''$  aus  $b_{\mu-1}'$  bzw.  $b_{\mu-1}''$  durch eine Drehung um die Achse  $a_{\mu-1}'a_{\mu-1}''$ . Bei jeder Drehung bleibt der Scheitel des die Seitenlänge messenden Winkels liegen und jeder Winkel hat die Größe  $\frac{m}{n}\pi$ . Die Länge des zwischen  $b'$  und  $b_n'$  liegenden Bogens ist also  $\frac{m}{n}\pi \cdot 2n = 2m\pi$ , d. h. der Bogen  $b'b_n'$  durchläuft von  $b'$  ausgehend den Kreis der reellen Zahlen gerade  $m$  mal und endigt wieder in  $b'$ .

Unter Festhaltung des am Anfang des Paragraphen ausgesprochenen Fortsetzungsprinzips muß also  $\eta$  im Innern des Intervalles zwischen  $\tau_b = t_b$  und  $\tau_{b_n} = t_b + 2n(t_a - t_b)$  genau  $m$  mal unendlich werden und außer in  $\tau_b$  und in  $\tau_{b_n}$  noch in  $m-1$  Stellen im Innern dieses Intervalles verschwinden. Um dieses zu erreichen, müssen wir in der Differentialgleichung

$$(37) \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} (Ax + B)y = 0$$

den Parameter  $B$  so bestimmen können, daß im Intervalle  $(\tau_b, \tau_{b_n})$  eine Lösung existiert, die im Innern des Intervalles stetig ist, eine stetige erste Ableitung besitzt und außer in  $\tau_b$  und  $\tau_{b_n}$  noch in  $m-1$  Punkten im Innern des Intervalles verschwindet.

Dieses ist aber ein ganz gewöhnliches Oszillationstheorem, welches nur insofern von den sonst gebrauchten Oszillationstheoremen abweicht, als

im Innern und auf dem Rande des Intervalles singuläre Stellen liegen, die von demselben Charakter sind, wie die im vorigen Paragraphen behandelten. Dabei soll aber jetzt die gewünschte Lösung, sowie ihre nach  $\tau$  genommene erste Ableitung über die im Innern gelegenen singulären Stellen hinweg stetig fortgesetzt werden. Man zeigt nun, genau wie im letzten Paragraphen, daß man den Parameter  $B$  immer so bestimmen kann, daß den gewünschten Oszillationsbedingungen\*) genügt wird; wir können überdies dieses Resultat selbst, ohne neue Oszillationsbetrachtungen, aus dem vorigen Paragraphen übernehmen. Es bleibt also nur mehr zu beweisen, daß auch der Parameter  $B$  durch diese Oszillationsbedingungen *eindeutig* bestimmt ist. Um zu zeigen, daß es nicht zwei Parameter,  $B_1$  und  $B_2$  (es sei dabei  $B_1 > B_2$ ) geben kann, für welche je eine Lösung  $Y_\beta^b(x)$  bzw.  $\bar{Y}_\beta^b(x)$  der Differentialgleichung existiert, die für  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_{b_n}$  verschwindet und im Innern des Intervalles  $m-1$  Nullstellen hat, machen wir folgende Hilfsbetrachtung.

Es sei  $\tau_1$  ein Punkt des Intervalles,  $u$  und  $v$  je eine Lösung mit stetiger erster Ableitung von (37) für  $B = B_1$  bzw.  $B = B_2$ ; ferner sei  $u(\tau_1) = 0$  und  $v(\tau_1) = 0$ . Wir können ferner es immer so einrichten, daß  $u(\tau)$  und  $v(\tau)$  für die Werte von  $\tau$ , die  $> \tau_1$  und in genügender Nähe von  $\tau_1$  sind, positiv ausfallen. Wir zeigen dann, daß die auf  $\tau_1$  folgende Nullstelle  $\tau_2$  von  $u(\tau)$  weiter entfernt ist, als die nächste Nullstelle  $\tau_3$  von  $v(\tau)$ . Denn nehmen wir zunächst an, es liege zwischen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  keine Nullstelle von  $u(\tau)$  und  $v(\tau)$ . Nun ist nach (34)

$$(38) \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)} (B_1 - B_2) u(\tau) v(\tau) d\tau \\ = \left[ u \frac{dv}{d\tau} - v \frac{du}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} = \left( -v \cdot \frac{du}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_2}.$$

Es ist aber der Ausdruck unter dem Integralzeichen zwischen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  durchaus negativ, also hat das ganze Integral einen negativen Wert, ferner ist  $\left( \frac{du}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_2}$  negativ, da ja  $u(\tau_2) = 0$  und  $u(\tau)$  vorher positiv war, es muß also  $v(\tau_2)$  negativ sein, also  $v(\tau)$  zwischen  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$  eine Nullstelle besitzen, da wir annehmen, daß  $v(\tau)$  für  $\tau > \tau_1$  zunächst positiv sein soll.

Diesen Hilfssatz verbinden wir mit einem zweiten Hilfssatz, den wir schon früher benützten und der aussagt, daß zwischen zwei Nullstellen einer Lösung  $u_1$  der Differentialgleichung (37) jede andere Lösung  $u_2$  der-

---

\*) Unter Oszillationsbedingungen verstehen wir die Grenzbedingungen und die Zahl der Nullstellen.

selben Differentialgleichung mindestens eine Nullstelle besitzen muß. Der Beweis dieses zweiten Hilfssatzes folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$u_1(\tau) \frac{d}{d\tau} u_2(\tau) - u_2(\tau) \frac{d}{d\tau} u_1(\tau) = \text{const.};$$

verschwindet nämlich  $u_1$  für  $\tau = \tau_4$  und  $\tau = \tau_5$ , so ist:

$$u_2(\tau_4) \left( \frac{d}{d\tau} u_1(\tau) \right)_{\tau=\tau_4} = u_2(\tau_5) \left( \frac{d}{d\tau} u_1(\tau) \right)_{\tau=\tau_5},$$

und da

$$\left( \frac{d}{d\tau} u_1(\tau) \right)_{\tau=\tau_4} \quad \text{und} \quad \left( \frac{d}{d\tau} u_1(\tau) \right)_{\tau=\tau_5}$$

entgegengesetzte Zeichen haben, so haben auch  $u_2(\tau_4)$  und  $u_2(\tau_5)$  entgegengesetzte Zeichen.

Nun folgt aus dem ersten Hilfssatze, daß die  $\tau = \tau_b$  zunächst liegende Nullstelle von  $Y_\beta^b(\tau)$  weiter von  $\tau = \tau_b$  wegliegt, als die nächstliegende Nullstelle von  $\bar{Y}_\beta^b(\tau)$ ; wir nehmen nun an, diese Eigenschaft gelte bis zu den  $\varrho^{\text{ten}}$  Nullstellen, d. h. es liege die  $\varrho^{\text{te}}$  Nullstelle von  $Y_\beta^b(\tau)$  weiter von  $\tau = \tau_b$  entfernt als die  $\varrho^{\text{te}}$  Nullstelle von  $\bar{Y}_\beta^b(\tau)$ , dann liegt auch die  $(\varrho + 1)^{\text{te}}$  Nullstelle von  $Y_\beta^b(\tau)$  weiter von  $\tau = \tau_b$  entfernt als die  $(\varrho + 1)^{\text{te}}$  Nullstelle von  $\bar{Y}_\beta^b(\tau)$ . Denn wählen wir für  $\tau_1$  die  $\varrho^{\text{te}}$  Nullstelle, für  $\tau_2$  die  $(\varrho + 1)^{\text{te}}$  Nullstelle von  $Y_\beta^b(\tau)$ , für  $u$   $Y_\beta^b(\tau)$ , dann existiert nach dem ersten Hilfssatze für  $B_2$  eine Lösung  $v(\tau)$ , die für  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_3 < \tau_2$  verschwindet. Nach dem zweiten Hilfssatze muß aber dann zwischen  $\tau_1$  und  $\tau_3$  auch eine Nullstelle von  $\bar{Y}_\beta^b(\tau)$ , also zum mindesten die  $(\varrho + 1)^{\text{te}}$  Nullstelle von  $\bar{Y}_\beta^b(\tau)$  liegen. Daraus folgt aber unmittelbar, daß  $Y_\beta^b(\tau)$  und  $\bar{Y}_\beta^b(\tau)$  nicht gleichzeitig in  $\tau_b$  und  $\tau_{b_n}$  verschwinden und im Innern gleich viele Nullstellen besitzen können. Also ist  $B$  durch die Oszillationsforderungen eindeutig festgelegt.

Damit ist bewiesen, daß durch Vorgabe einer Seitenlänge in der Form  $\frac{m}{n}\pi$  der Parameter  $B$  eindeutig bestimmt ist, sofern  $\frac{m}{n}$  keine ganze Zahl ist. Es folgt aber hieraus in Verbindung mit den Sätzen des letzten Paragraphen, daß durch Vorgabe irgend einer reellen Seitenlänge  $\psi_1$ , die gerade kein ganzes Vielfaches von  $\pi$  ist, der Parameter  $B$  eindeutig festgelegt ist. Denn es ergibt sich ja aus jenen Untersuchungen, daß mit der Seitenlänge  $\psi$  sich umgekehrt auch  $B$  stetig ändert, sofern  $\psi$  kein ganzes Vielfaches von  $\pi$  ist, so daß wir stets rationale Werte von  $\psi$  angeben können, die teils größer sind als  $\psi_1$ , teils kleiner sind und zu beliebig nahe benachbarten Werten von  $B$  gehören.

Man sieht überdies leicht ein, daß das Resultat dieses Paragraphen von der Annahme  $A > 0$  unabhängig ist, da sich alle Untersuchungen nur auf das eine Intervall  $(b, a)$  beziehen, und alle Sätze, die wir be-



nützten, von den Eigenschaften, die wir aus der speziellen Anfangslage der Geraden  $z = Ax + B$  gewannen, unabhängig sind. Wir haben also ganz allgemein den

Satz 14. Wenn wir für die in projektiver Maßbestimmung gemessene Länge  $\psi$  der Seite  $a'b'$  einen beliebigen reellen Wert vorschreiben, so ist dadurch der Parameter  $B$  **eindeutig** festgelegt. Ausgenommen ist dabei nur der Fall, in dem  $\varphi = k\pi$  und  $k$  eine ganze Zahl ist; dann gibt es stets zwei und nur zwei Parameterwerte  $B$ .

### § 6.

#### Festlegung des Parameters $B$ durch eine Kantenlänge, wenn $A > 0$ .

Nach Satz 3 ist die Kantenlänge auf der Achse  $b'b''$  wesentlich bestimmt durch den Quotienten  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$ . Wir gehen wieder von der Anfangslage der Geraden  $z = Ax + B$  für  $B = -bA$  aus, bei der sowohl  $l_1$  und  $l_2$ , als auch  $n_1$  und  $n_2$  positiv sind. Aus Satz 13 folgt, daß wir  $B$  von dem gewählten Anfangswerte aus so weit wachsen lassen können, daß  $n_2$  das erste Mal  $\infty$  wird; das geschehe für  $B = \beta_0$ ;  $n_1$  ist dabei noch positiv, ebenso  $l_1$  und  $l_2$ ; für  $B = \beta_0$  ist also  $n_1 n_2 = \infty$ ,  $l_1 l_2 > 0$ . Lassen wir aber jetzt von  $B = \beta_0$  aus  $B$  wieder abnehmen, so nimmt  $n_1$  und  $n_2$ , also auch  $n_1 n_2$  kontinuierlich ab, dagegen wachsen  $l_1$  und  $l_2$ , also auch  $l_1 l_2$ , bis  $l_2 = \infty$  wird, was natürlich erst für  $B < -bA$  eintreten kann; es geschehe für  $B = \beta_1$ . Der Quotient  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  nimmt also, wenn  $B$  von  $\beta_0$  nach  $\beta_1$  geht, alle Werte zwischen 0 und  $\infty$  einmal und nur einmal an, da ja der Zähler kontinuierlich wächst, der Nenner dagegen kontinuierlich abnimmt; die Seiten  $b'c'$  und  $b'a'$  haben dabei nach Satz 1 rein imaginäre Werte. Wir haben also:

Satz 15. Wenn  $A$  positiv ist, kann man den Parameter  $B$  auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß die Kantenlänge auf der Achse  $b'b''$  irgend einen zwischen 0 und  $\infty$  gelegenen reellen Wert besitzt und die beiden Seiten  $b'c'$  und  $b'a'$  rein imaginäre Längen haben.

Speziell können wir daraus folgendes Theorem, das sogenannte *Grundtheorem*\*) entnehmen:

\*) Nach der Ausdrucksweise von Herrn Klein in den Math. Annalen Bd. 64. Das Grundtheorem deckt sich in dem Falle, daß  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  reziproke Werte ganzer Zahlen sind, mit dem sogenannten *Fundamentaltheoreme* der automorphen Funktionen. (Vergl. Schluß des § 7.) Die Bestimmung des Parameters  $B$  für das Grundtheorem sowie für die ersten Obertheoreme wurde für den Fall  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$  im Anschluß an die von Herrn Klein im Sommer 1907 gehaltenen Seminarvorträge von Herrn Rothe mit Hilfe der elliptischen Funktionen rechnerisch durchgeführt. (Monatshefte für Mathematik und Physik, 19. Jahrgang, S. 258 ff.)

Satz 16. Wenn  $A_a$  positiv ist, kann man den Parameter  $B$  auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, den die Seiten  $b'a'$  und  $b'c'$  nicht schneiden.

Denn aus den Untersuchungen am Ende des § 1 folgt unmittelbar, daß das Viereck dann und nur dann einen Orthogonalkreis besitzt, wenn  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2} = 1$ , also die Kantenlänge auf  $b'b''$  den Wert 0 hat. Da nun  $l_1$  und  $l_2$  positiv sind, so liegt der Schnittpunkt der Achse  $a'a''$  und  $b'b''$  außerhalb der Kugel, woraus folgt, daß der Orthogonalkreis reell ist. Es sei nun in Figur 7  $O_1 O_2$  die Schnittlinie dieses Orthogonalkreises mit dem Meridian der reellen Zahlen, dann lehrt ein Blick auf die Figur in Verbindung mit Satz 1, daß die Forderung, die Seite  $b'a'$ , soll den Orthogonalkreis nicht schneiden, identisch ist mit der Forderung, daß  $b'a'$  eine rein imaginäre Seitenlänge besitzen soll. Über das Verhalten der Seiten  $d'a'$  und  $d'b'$  in bezug auf den Orthogonalkreis werden erst die folgenden Paragraphen Aufschluß geben.

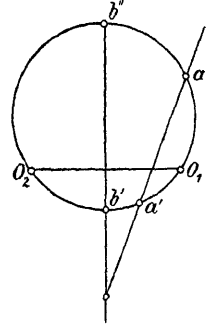


Fig. 7.

Wir lassen jetzt  $B$  von  $\beta_1$  an weiter abnehmen,  $n_1$  und  $n_2$  bleiben nach wie vor positiv,  $l_1$  ist zunächst noch positiv,  $l_2$  dagegen negativ,  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  ist also für die Werte  $B < \beta_1$  zunächst negativ und sein absoluter Betrag nimmt zunächst im allgemeinen ab, wobei aber Schwankungen nicht ausgeschlossen sind. Es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden wie wir schon früher bemerkt haben. Entweder wird nämlich bei fortwährendem Abnehmen von  $B$  zuerst  $l_2 = 0$  und erst später  $l_1 = \infty$ , oder diese beiden Ereignisse treten in umgekehrter Reihenfolge ein. Im ersten Falle wird, wenn  $B$  von  $\beta_1$  an abnimmt,  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  zunächst alle Werte zwischen  $-\infty$  und 0 mindestens einmal annehmen, dann aber alle Werte zwischen 0 und  $+\infty$  einmal und nur einmal, bis  $l_1 = +\infty$  geworden ist. Es durchläuft dabei die Kantenlänge auf  $b'b''$  zunächst alle Werte zwischen  $C\pi i + \infty$  und  $C\pi i - \infty$  von der Form  $C\pi i + D$ , wobei  $D$  irgend eine reelle Größe ist, jeden solchen Wert mindestens einmal annehmend; dann aber durchläuft sie alle reellen Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ , jeden Wert einmal und nur einmal annehmend. Solange dabei  $l_2 < 0$ , ist die Länge der Seite  $b'a'$  rein reell, aber  $\leq \pi$ , wenn  $l_2 > 0$ , ist die Seitenlänge von der Form  $\pi + \psi i$ , wobei  $\psi$  eine reelle Größe ist. Ganz anders aber ist das Verhalten der Kantenlänge im zweiten Falle, in dem  $l_1$  zuerst  $\infty$  wird. Jetzt durchläuft die Kantenlänge nicht mehr alle Werte zwischen  $C\pi i + \infty$  und  $C\pi i - \infty$ , sondern sie kehrt nach

$C\pi i + \infty$  zurück, wenn  $l_1 = \infty$  wird. Von da an durchwandert  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  alle Werte zwischen  $\infty$  und 0, aber wir können nicht mehr direkt schließen, daß der Bruch dabei monoton abnimmt, da ja Zähler und Nenner gleichzeitig abnehmen. Aber jedenfalls nimmt dabei die Kantenlänge jeden reellen Wert zum mindesten einmal an. Dabei ist die Länge von  $a'b'$  reell und kleiner als  $\pi$ , solange  $l_1$  positiv ist, dagegen von der Form  $\pi + \psi i$ , wenn  $l_1$  und  $l_2$  negativ sind. Nachdem wir so den einfachsten Fall völlig diskutiert haben, können wir gleich anschließend an Satz 1 im allgemeinsten Fall das Resultat aussprechen, wobei uns jedoch aus naheliegenden Gründen\*) nur die Fälle interessieren, in denen die Kantenlänge reell ist, die Seiten  $a'b'$  und  $b'c'$  also komplexe bzw. rein imaginäre Längen besitzen. Man hat dann:

*Satz 17. Wenn die Länge von  $a'b'$  die Form  $k\pi + \psi i$  hat, wobei  $k$  eine beliebige vorgegebene ganze Zahl,  $\psi$  eine noch unbekannte, reelle Größe ist, so kann man den Parameter  $B$  stets so bestimmen, daß die Kantenlänge  $b'b''$  einen beliebig vorgeschriebenen reellen Wert zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  annimmt. Ist speziell  $k$  eine solche ganze Zahl, daß die Werte  $l_1$  und  $l_2$ , zu denen Seiten von der Länge  $k\pi + \psi i$  gehören (wobei  $\psi$  irgend eine reelle Größe ist), positiv sind, so ist der Parameter  $B$  durch Vorgabe von  $k$  und der Kantenlänge eindeutig bestimmt.*

In den anderen Fällen, in denen  $l_1$  und  $l_2$  beide negativ sind, können wir über die eindeutige Bestimmtheit des Parameters  $B$  nichts Sicheres aussagen. Es ist dabei noch hervorzuheben, daß, wenn  $l_1$  und  $l_2$  bei irgend einem Werte von  $\psi$  positiv bzw. negativ sind, sie bei festgehaltenem  $k$  für jedes reelle  $\psi$  positiv bzw. negativ sind.

Der Beweis des Satzes 17 ist nun folgender: Soll die Länge von  $a'b'$  die Form  $k\pi + \psi i$  besitzen, so muß die Achse  $a'a''$  die Achse  $b'b''$  außerhalb der Kugel schneiden, also müssen  $l_1$  und  $l_2$  gleichzeitig positiv oder negativ sein.  $l_1$  und  $l_2$  können aber, wenn wir von dem in Satz 15 erledigten Fall absehen, nur dadurch bei abnehmendem  $B$  beide positive Werte annehmen, daß die eine von den beiden Größen schon positiv ist, die andere durch 0 hindurchgehend positiv wird, was für  $B = B_0$  eintreten möge. Dann wachsen aber  $l_1$  und  $l_2$  mit abnehmendem  $B$ , bis für  $B = B_1$  diejenige Größe, die am Anfang schon positiv war,  $\infty$  wird.  $n_1$  und  $n_2$  nehmen aber mit abnehmendem  $B$  ab und sind gewiß, da  $B < -bA$ , positiv; also wächst  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  von 0 bis  $\infty$ , jeden Wert einmal

---

\*) Man sieht ja aus dem eben behandelten Fall, daß man nicht immer reelle  $B$  zu einer Kantenlänge von der Form  $C\pi i + D$  bestimmen kann, wenn  $D$  eine beliebig vorgegebene Konstante ist.

und nur einmal annehmend, wenn  $B$  von  $B_0$  bis  $B_1$  abnimmt. Andererseits können  $l_1$  und  $l_2$  nur dadurch beide bei abnehmendem  $B$  negative Werte annehmen, daß die eine der beiden Größen schon negativ ist, die andere durch  $\infty$  hindurchgehend negativ wird, was für  $B = B_2$  eintreten möge. Dann nehmen die Größen  $|l_1|$  und  $|l_2|$  mit weiter abnehmenden  $B$  ab, bis für  $B = B_3$  die eine verschwindet.  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  nimmt also von  $+\infty$  bis 0 ab, wenn  $B$  von  $B_2$  bis  $B_3$  sinkt, und zwar nimmt  $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  jeden zwischen  $\infty$  und 0 liegenden Wert mindestens einmal an; daß aber jeder solche Wert wirklich nur einmal angenommen wird, dürfen wir nicht schließen, da ja Zähler und Nenner gleichzeitig abnehmen.

Damit sind alle Aussagen des Satzes 17 bewiesen. Als Spezialfall von Satz 17 haben wir:

Satz 18. *Wenn  $A$  positiv ist, kann man den Parameter  $B$  stets so bestimmen, daß das Viereck einen (reellen) Orthogonalkreis besitzt, den die Seite  $a'b'$  genau  $k$  mal schneidet.*

Damit ist die Existenz der sogenannten „Obertheoreme“\*) bewiesen. Über die eindeutige Festlegung von  $B$  durch diese Bedingung gilt dasselbe wie bei Satz 17.

Es tritt jetzt die Aufgabe an uns heran, das Verhalten der beiden nicht durch  $b$  gehenden Seiten zu untersuchen; dieses wird uns dann erlauben, die Sätze 17 und 18 noch weiter zu vertiefen.

## § 7.

### Nähere Ausführungen für den Fall, daß die Winkelsumme im Vierecke kleiner ist als $2\pi$ . (Fall I des § 3.)

Wir haben jetzt das Material beisammen, um in dem in § 3 mit I bezeichneten Falle die Untersuchung über die Abhängigkeit der Maßzahlen des Viereckes vom Parameter  $B$  zum Abschluß zu bringen.

Wir benützen dazu den 1. Teil des Satzes 7, dessen Beweis sich am Schlusse des § 4 findet. Es sind nämlich hier  $A_a, A_b, A_c, A_d$  positiv, folglich kann jetzt durch eine jede Ecke des Viereckes höchstens eine Seite gehen, deren Länge einen von 0 verschiedenen reellen Wert besitzt. Nun kann man nach Satz 18 bei positivem  $A_d$  die Größe  $B_d$  immer so bestimmen, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, den die Seite  $a'b'$   $k$  mal schneidet. Dann hat die Länge von  $a'b'$  die Form  $k\pi + \psi i$ , wo  $\psi$  irgend eine reelle Größe ist. Ist daher die ganze Zahl  $k \geq 1$ , so kann weder die Seite  $b'c'$  noch  $a'd'$  nach dem 1. Teil des Satzes 7 den Ortho-

\*) Vergl. Klein, Math. Annalen, Bd. 64, Seite 185.

gonalkreis schneiden. Der von den Vierecksseiten gebildete Linienzug geht aber von  $b'$  aus und endet in demselben Punkte; nun schneidet  $b'a'$  den Orthogonalkreis  $k$  mal, und zwar müssen wir uns übereinanderliegende Punkte der Seite  $b'a'$  in verschiedenen Blättern einer Riemannschen Fläche

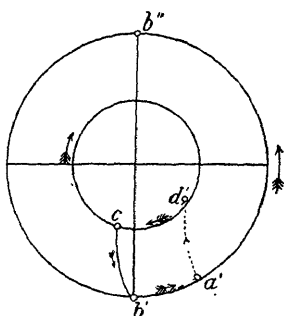


Fig. 8.

liegend denken. Es soll aber der Linienzug, der von  $a'd'$ ,  $d'c'$ ,  $c'b'$  gebildet wird, von  $a'$  nach  $b'$  zurückführen, wobei  $a'd'$  und  $c'b'$  den Orthogonalkreis nicht schneiden. Dieses ist nur möglich, wenn  $c'd'$  den Orthogonalkreis  $k$  mal schneidet.

Ist aber  $k = 0$  und schneidet auch  $b'c'$  den Orthogonalkreis nicht (Satz 16), so können auch die beiden anderen Seiten den Orthogonalkreis nicht schneiden. Denn  $c'd'$  und  $d'a'$  können den Orthogonalkreis nicht alle beide schneiden, wenn aber  $c'd'$  allein den Orthogonalkreis schneidet,

so würde  $d'$  auf der anderen Seite des Orthogonalkreises oder gar in einem anderen Blatte wie  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  liegen, was doch unmöglich ist, da  $d'a'$  den Orthogonalkreis nicht schneiden kann. Wir haben also:

**Satz 19.** *Ist  $\alpha + \beta + \gamma + \delta' - \delta'' < 2$ , so schneidet beim Grundtheorem keine Vierecksseite den Orthogonalkreis, bei den Obertheoremen gibt es immer zwei gegenüberliegende Seiten, die den Orthogonalkreis nicht schneiden; die beiden anderen Seiten schneiden den Orthogonalkreis gleich oft.*

Wir können den eben gewonnenen Satz noch etwas verallgemeinern. Wir verstehen unter  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  u. s. f. im folgenden beliebige reelle Größen. Es sei dann bei der Existenz eines Orthogonalkreises die Länge von  $b'a'$  gleich  $k\pi + \psi_1 i$ , wobei  $k$  Null oder eine ganze Zahl ist; dann ist die Länge von  $c'd'$  von der Form  $k\pi + \psi_2 i$ . Lassen wir jetzt  $B_a$  weiter abnehmen, so wird die Länge von  $b'a'$  zunächst die Form  $k\pi$  erhalten, dann auf  $(k+1)\pi$  wachsen und bei abermaligem Auftreten eines Orthogonalkreises von der Form  $(k+1)\pi + \psi_3 i$  sein. Nun verhält sich nach § 3 das Wachsen und Sinken der Seite  $c'd'$  bei Veränderungen von  $B_a$  genau wie das Wachsen und Sinken der Seite  $b'a'$ , d. h. die Länge der Seite  $c'd'$  wird bei abnehmendem  $B_a$  zunächst die Form  $k\pi$  annehmen, dann auf  $(k+1)\pi$  wachsen und bei abermaliger Existenz eines Orthogonalkreises die Form  $(k+1)\pi + \psi_4 i$  besitzen. Es folgt also:

**Satz 20.** *Ist  $\alpha + \beta + \gamma + \delta' - \delta'' < 2$ , so ist der Unterschied zwischen den reellen Teilen der Längen gegenüberliegender Seiten nie  $> \pi$ .*

Die gleichzeitige Betrachtung zweier gegenüberliegender Seiten führt nun weiter zu:

**Satz 21.** *Es sei  $\alpha + \beta + \gamma + \delta' - \delta'' < 2$ , ferner  $k$  eine ungerade Zahl. Wenn dann für die Seite  $a'b'$ , also auch für die Seite  $c'd'$  vor-*

geschrieben ist, daß sie sich in der Form  $k\pi + \psi i$  darstellen läßt, so hat mindestens eine der beiden Achsen  $b'b''$  oder  $a'a''$  die Eigenschaft, daß durch Vorgabe irgend einer reellen Länge für die auf ihr liegende Kante  $B$  eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Wenn  $k$  eine solche ganze Zahl ist, daß die Werte  $l_1$  und  $l_2$ , bei denen die Seitenlänge von  $a'b'$  die Form  $k\pi + \psi i$  besitzt, positiv sind, so folgt schon aus Satz 17, daß der Parameter  $B$  durch Vorgabe irgend einer reellen Kantenlänge auf  $b'b''$  eindeutig bestimmt ist. Wir haben also nur den Fall zu betrachten, daß  $l_1$  und  $l_2$  negativ sind. Wir gehen dann von einem Werte  $B$  aus, für den das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt und  $a'b'$  eine Länge von der Form  $k\pi + \psi i$  hat. Die Existenz eines solchen  $B$  ist durch Satz 18 gewährleistet. Nun ist  $k$  ungerade, also schneidet  $b'a'$  den Orthogonalkreis in einer ungeraden Anzahl von Punkten; da ferner  $l_1$  und  $l_2$  beide negativ sind, so folgt, daß  $l_2 > l_1$ , d. h. daß  $a''$  näher an  $b'$  liegen muß als  $a'$  (Fig. 9). Wir erteilen jetzt, was erlaubt ist, dem singulären Punkte  $a$  dieselbe Rolle, die früher  $b$  spielte, d. h. wir nehmen an, daß  $\eta$  in  $a'$  den Wert 0, in  $a''$  den Wert  $\infty$  hat. Früher wählten wir nun für die positiven Werte aller reellen  $\eta$  denjenigen der beiden zwischen 0 und  $\infty$  liegenden Kreisbogen, durch den die von  $b'$  ausgehende Seite  $b'a'$  zunächst ging. Dementsprechend müssen wir jetzt als Träger der positiven Werte der reellen  $\eta$  denjenigen der beiden zwischen  $a'$  und  $a''$  liegenden Kreisbogen wählen, durch den die von  $a'$  ausgehende Seite  $a'b'$  zunächst geht, um die für  $b$  abgeleiteten Resultate unmittelbar übertragen zu können. Diesem entsprechend müssen wir also bei der neuen Wertverteilung  $\eta$  in  $b'$  und  $b''$  positive reelle Werte  $m_1$  und  $m_2$  zuweisen; da nun  $m_1$  und  $m_2$  in bezug auf die Achse  $a'a''$  dieselbe Rolle spielen wie  $l_1$  und  $l_2$  in bezug auf  $b'b''$ , so folgt, nach Satz 17, daß durch Vorgabe der Kantenlänge auf  $a'a''$  jetzt  $B$  eindeutig bestimmt ist.

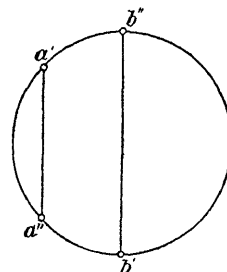


Fig. 9.

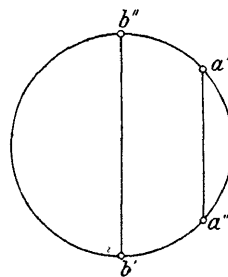


Fig. 10.

Sind übrigens, wie wir zuerst annahmen,  $l_1$  und  $l_2$  positiv, so sind, bei analoger Bezeichnung wie oben,  $m_1$  und  $m_2$  negativ, wenn  $k$  wiederum ungerade ist. Denn geben wir wieder  $\eta$  in  $a'$  den Wert 0, in  $a''$  den Wert  $\infty$ , so liegen diesmal konsequenterweise die positiven  $\eta$  auf demjenigen Bogen zwischen  $a'$  und  $a''$ , der  $b'$  und  $b''$  nicht enthält. Es haben also bei ungeradem  $k$  von den vier Kanten zum mindesten zwei und zwar zwei gegenüberliegende Kanten die Eigenschaft, daß durch Vorgabe einer

reellen Kantenlänge auf ihnen neben der Forderung für die Form einer Seitenlänge der Parameter  $B$  eindeutig bestimmt ist.

Schreiben wir nun speziell die Kantenlänge 0 bei ungeradem  $k$  vor, so ist dadurch  $B$  eindeutig bestimmt, da ja doch sicher eine, ja sogar zwei Achsen existieren, die unter den angegebenen Bedingungen nur für einen Wert  $B$  die Kantenlänge 0 haben können. Es folgt also:

**Satz 22:** *Wenn  $k$  eine ungerade Zahl ist, so ist durch die Forderung, daß das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, den eine Seite  $k$  mal schneidet, der Parameter  $B$  eindeutig bestimmt.*

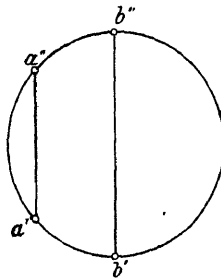


Fig. 11.

Es liegt jetzt die Frage nahe, ob man nicht bei geradem  $k$  einen analogen Schluß machen kann. Dies ist jedoch zu verneinen, wie ein Blick auf Fig. 11 lehrt. Denn wenn wiederum  $\eta$  in  $a'$  den Wert 0, in  $a''$  den Wert  $\infty$  haben soll, so müssen wir jetzt konsequenterweise dem Bogen zwischen  $a'a''$ , der  $b'$  und  $b''$  nicht enthält, die positiven reellen Werte  $\eta$  zuordnen, da ja die Seite  $a'b'$ , von  $a'$  ausgehend, Punkte dieses Bogens zunächst enthält. Es sind also nach diesen Festsetzungen auch  $m_1$  und  $m_2$  negativ.

Wir haben nun diese Untersuchungen noch auf die Fälle II und III von § 3 auszudehnen, wobei sich jedoch nur bezüglich der Grundtheoreme Unterschiede ergeben werden, für die Obertheoreme ergeben sich in allen drei Fällen dieselben Verhältnisse. Ehe wir aber darauf eingehen, wollen wir die bisherigen in einzelnen Sätzen zerstreuten Resultate in einen Satz zusammenfassen.

**Hauptsatz.** *Für Kreisvierecke, bei denen jeder Winkel  $> 0$  und  $< \pi$ , die Winkelsumme  $< 2\pi$  ist, und für die damit verknüpfte Differentialgleichung (3) gelten folgende Sätze:*

1) *Schreibt man der Differentialgleichung neben den Winkeln des Kreisvierecks und den singulären Punkten noch für eine Vierecksseite eine bestimmte reelle Länge vor, so ist dadurch der Parameter  $B$  eindeutig bestimmt.*

2) *Schreibt man dagegen neben den Winkeln und den singulären Punkten für irgend eine Kante des Vierecks eine bestimmte reelle Länge vor, verlangt man ferner, daß sich eine Seitenlänge in der Form  $k\pi + \psi$  darstellen läßt, wo  $k$  eine gegebene ganze Zahl ist, so gibt es dazu stets mindestens einen Parameterwert  $B$ .*

3) *Ist das in 2) vorkommende  $k$  ungerade oder 0, so gibt es zum mindesten zwei Kanten, welche die Eigenschaft haben, daß  $B$  auch eindeutig festgelegt ist, wenn man für eine von ihnen eine reelle Länge vorschreibt.*

Zum Schlusse dieser Untersuchungen soll nochmals hervorgehoben werden, daß mit den obigen Betrachtungen ein *neuer* Beweis des Fundamentaltheorems der automorphen Funktionen (vergl. Klein, Math. Annalen Band 20) — natürlich vorläufig nur für den Fall von vier reellen singulären Punkten — wirklich durchgeführt ist, indem gezeigt ist, daß man nach Vorgabe von vier reell angenommenen singulären Stellen und der dazu gehörigen Exponentendifferenzen als reziproke ganze Zahlen den noch zur Verfügung stehenden akzessorischen Parameter eindeutig so bestimmen kann, daß das dazu gehörige Viereck einen Orthogonalkreis besitzt, der von keiner Vierecksseite geschnitten wird.

## § 8.

Das Oszillationstheorem bei negativem  $A$ .

Wir gehen wieder auf die Differentialgleichung

$$(23) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{|x-a|^{2-2\alpha}|x-b|^{2-2\beta}|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B)y=0$$

zurück, in der jetzt  $A$  negativ sein soll.

Setzen wir zunächst  $B = -Aa$ , dann zeigt man, wie bei Satz 8, daß  $l_1$  und  $l_2$  positiv sind, und daß  $Y_\beta^b(x)$  und  $Y_0^b(x)$  im Intervalle  $b < x \leq a$  nicht verschwinden. Die Seite  $b'a'$  besitzt also eine rein imaginäre Länge. Wir sagen nun im folgenden, wenn, wie hier, der Koeffizient von  $y$  in (23) im ganzen Intervalle durchaus negativ ist, daß das Intervall durchaus nichtoszillatorisch ist. Wir lassen jetzt  $B$  bis  $-Ab$  abnehmen. Dann ist der Koeffizient von  $y$  in (23) durchaus positiv im Intervalle  $(b, a)$ ; ist also  $y$  für irgend eine Stelle des Intervalles positiv, so ist hier  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  negativ. Betrachten wir nun speziell  $Y_0^b$ ; für dieses ist  $\left(\frac{d}{dt} Y_0^b\right)_{x=b} = 0$ ,  $Y_0^b(b) = 1$ ; es ist also  $\frac{d}{dt} Y_0^b(x)$  gewiß so lange negativ, als  $Y_0^b(x)$  positiv ist, da ja  $\frac{d}{dt} Y_0^b(x)$  mit wachsendem  $x$  fortwährend abnimmt. Es ist also entweder für  $x = a \lim_{s=0} \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=a-s} < 0$ , oder  $Y_0^b(x)$  hat zwischen  $b$  und  $a$  schon eine Nullstelle; in beiden Fällen hat die Seite  $b'a'$  eine Länge mit einem von 0 verschiedenen reellen Teil. Ist  $B < -bA$ , so folgt a fortiori, daß die Länge von  $b'a'$  einen von 0 verschiedenen reellen Teil besitzt. Im Intervalle  $(c, b)$  herrschen wieder die entgegengesetzten Verhältnisse. Für  $B = -cA$  ist die Länge von  $b'c'$

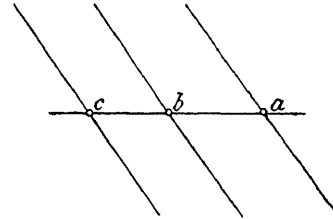


Fig. 12.



rein imaginär, für  $B \geq -bA$  besitzt die Länge von  $b'c'$  einen von 0 verschiedenen reellen Teil. Damit ist der zweite Teil des Satzes 7 bewiesen.

Wir setzen jetzt unter Festhaltung des in § 2 festgelegten Fortsetzungsprinzips:

$$\eta = \frac{Y_\gamma^c(x)}{Y_0^c(x)}, \quad \eta(d') = r_1, \quad \eta(d'') = r_2, \quad \eta(b') = s_1, \quad \eta(b'') = s_2.$$

Es sei jetzt  $B = -cA$ . Dann ist das Intervall  $(c, b)$  durchaus nichtoszillatorisch und die Seitenlänge von  $c'b'$  nach obigem rein imaginär. Ebenso ist das Intervall  $(c, \infty)$  jetzt durchaus nichtoszillatorisch; da jedoch in  $d$  bei unserer Anordnung andere Verhältnisse herrschen wie bei den anderen singulären Punkten, so können wir hier nur schließen, daß die Seite  $c'd'$ , die von 0 ausgeht, nicht durch  $\infty$  geht. In der Tat wachsen  $Y_\gamma^c$  und  $Y_0^c$  mit abnehmendem  $x$ , es kann also  $Y_0^c(x)$  im Intervalle  $c > x > -\infty$  nicht verschwinden. Von den Exponenten im Unendlichen ist aber  $\delta' > 0$ ,  $\delta'' < 0$ . Da nun aber weder  $Y_\gamma^c(x)$  noch  $Y_0^c(x)$  der zum Exponenten  $\delta'$  gehörigen Fundamentallösung, die für  $x = \infty$  verschwindet, proportional werden kann, so wird also auch  $\eta$  nicht  $\infty$  für  $x = \infty$ . Diese Schlüsse gelten, was den Bereich  $(c, d)$  anbetrifft, a fortiori, wenn  $B > -bA$  ist. Wir entnehmen daraus:

**Satz 23.** *Solange die Länge von  $b'c'$  einen von 0 verschiedenen reellen Teil besitzt, kann die von  $c'$  ausgehende Seite  $c'd'$  nicht durch  $c''$  hindurchgehen; solange die Länge von  $b'a'$  einen von 0 verschiedenen reellen Teil besitzt, kann die Seite  $a'd'$ , die von  $a'$  ausgeht, nicht durch  $a''$  hindurchgehen.*

Den 2. Teil des Satzes beweist man genau so wie den 1. Teil, indem man von  $B = -Aa$  ausgeht.\*)

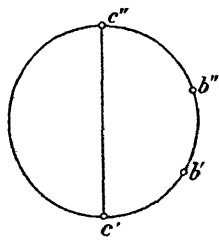


Fig. 13.

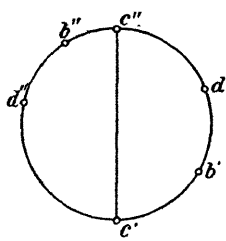


Fig. 14.

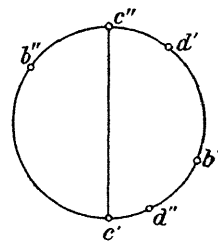


Fig. 15.

Es sei nun wieder  $B = -Ac$ , dann haben  $b'$  und  $b''$  die in Fig. 13 angegebene Lage, von Seite  $c'd'$  wissen wir zunächst nach Satz 7 nur, daß der reelle Teil ihrer Länge von 0 verschieden ist, wobei wir noch annehmen, daß auch  $A_a < 0$ . Lassen wir nun  $B$  wachsen, so bleibt der

\*) Da  $d$  im Unendlichen ist, haben wir hier  $B = B_d$ .

reelle Teil der Länge von  $c'd'$  aus demselben Grunde solange von 0 verschieden, bis  $b''$  durch  $c''$  hindurchgegangen ist. Ist aber  $b''$  durch  $c''$  hindurchgegangen, besitzt also  $c'b'$  eine Länge mit von 0 verschiedenem reellen Teil, so muß nach Satz 23  $d'$  auf dem rechts liegenden Bogen zwischen  $c'$  und  $c''$  liegen, während  $d''$  auf dem links liegenden Bogen zwischen  $c''$  und  $c'$  (Fig. 14) oder auf dem rechts liegenden Bogen zwischen  $d'$  und  $c'$  liegt (Fig. 15). Wir denken uns dabei natürlich wieder die Seite  $c'd'$  um  $c'c''$  in den die Seite  $c'b'$  enthaltenden Kreis gedreht. Im 1. Falle können wir  $B$  zunächst noch so klein annehmen, daß  $d''$  zwischen  $b''$  und  $c'$  liegt. Lassen wir nun  $B$  weiter wachsen, so können zwei Möglichkeiten eintreten.

1)  $b''$  und  $d''$  mögen sich auf dem linken Kreisbogen treffen. Es sei nun noch  $A_b < 0$ , also  $A_a < 0$ ,  $A_b < 0$ ,  $A_a < 0$ . Vertauschen wir dann in Satz 23 (1. Teil)  $b$  mit  $d$ , so folgt, daß  $b'$  so lange nicht durch  $c''$  hindurchgehen kann, als der reelle Teil der Länge von  $c'd'$  von 0 verschieden ist, d. h. solange nicht auch  $d''$  zwischen  $c''$  und  $d'$  liegt. Es ist also  $s_1 > 0$ , solange nicht  $d''$  durch  $c''$  hindurchgegangen ist. Ferner ist zunächst  $s_2 < 0$ ,  $r_1 > 0$ . Nun hat man weitere Unterfälle zu unterscheiden.

1a)  $b''$  komme nach  $c'$ , bevor  $d''$  nach  $c''$  gelangt. Dann durchläuft  $s_1 s_2$  alle Werte zwischen  $-\infty$  und 0,  $r_1 r_2$  ist aber inzwischen entweder durchaus negativ gewesen oder es ist durch 0 hindurchgehend negativ geworden. Unter diesen Annahmen gibt es also dazwischen gewiß einen Wert  $B$ , für den  $r_1 r_2 = s_1 s_2$  ist.

1b)  $d''$  komme nach  $c''$ , bevor  $b''$  nach  $c'$  gelangt.  $s_1 s_2$  hat einen negativen Wert, der von  $-\infty$  an im allgemeinen zunimmt,  $r_1 r_2$  durchläuft dagegen die negativen Werte von 0 bis  $-\infty$ , also muß es wieder dazwischen mindestens ein  $B$  geben, für welches  $r_1 r_2 = s_1 s_2$ .

Wenn sich dagegen  $b''$  und  $d''$  nicht auf dem links liegenden Halbkreis treffen, so muß  $d''$  noch zwischen  $d'$  und  $c'$  liegen, wenn  $b''$  durch  $c'$  hindurchgeht. Wir haben also:

2)  $b''$  geht durch  $c'$  hindurch, während  $d''$  zwischen  $c'$  und  $d'$  liegt. Dann ist, da wie bei 1)  $r_1$  und  $s_1 > 0$  sind, jetzt  $r_1 r_2 > 0$  und  $s_1 s_2 > 0$  und bei wachsendem  $B$  wächst  $s_1 s_2$  von 0 aus beständig, während  $r_1 r_2$  beständig abnimmt, bis es 0 wird. Also gibt es diesmal ein und nur ein  $B$ , für welches  $r_1 r_2 = s_1 s_2$ .

In den beiden Fällen (1a und 1b) schneiden sich, wenn  $r_1 r_2 = s_1 s_2$ , die drei Achsen  $c'c''$ ,  $b'b''$ ,  $d'd''$  in einem im Innern der Kugel gelegenen Punkte, den wir in den Mittelpunkt der Kugel durch eine geeignete Transformation (5) bringen können. Dann ist das Viereck  $a'b'c'd'$  ein *sphärisches Viereck im Sinne der Elementargeometrie*. Im Falle 2) haben wir dagegen wieder, wenn  $r_1 r_2 = s_1 s_2$ , ein Viereck mit reellem Ortho-

gonalkreis. Wir wollen die so gewonnenen Resultate auf den Fall II und III des § 3 anwenden.

## § 9.

## Nähere Ausführungen über den Fall II des § 3.

Wir nehmen jetzt an, es sei:

$$A_c > 0, \quad A_a < 0, \quad A_b < 0, \quad A_d < 0.$$

Dann folgt aus Satz 16, daß man den Parameter  $B_c$  auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß das Kreisbogenviereck einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den die Seiten  $a'd'$  und  $a'b'$  nicht schneiden, so daß also die Längen von  $a'd'$  und  $a'b'$  rein imaginäre Werte besitzen. Daher ergibt sich aus dem zweiten Teile des Satzes 7, daß sowohl  $b'c'$  als auch  $c'd'$  den Orthogonalkreis schneiden müssen. Nun folgt aber aus Satz 23, daß unter diesen Umständen  $c'd'$  nicht durch  $c''$  hindurchgehen kann; ebenso zeigt man, wenn man  $b$  mit  $d$  vertauscht, daß auch  $c'b'$  sich nicht durch  $c''$  hindurchziehen kann. Das Viereck  $a'b'c'd'$  hat also die in nebenstehender Fig. 16 gezeichnete Gestalt.

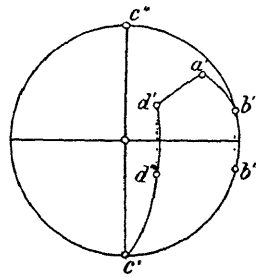


Fig. 16.

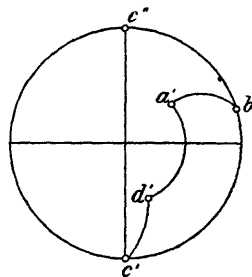


Fig. 17.

Wir haben also gerade den im vorhergehenden Paragraphen mit 2) bezeichneten Fall. Lassen wir daher  $B_a$  weiter wachsen, so folgt aus den dortigen Untersuchungen, daß erst dann wieder ein Obertheorem auftreten kann, wenn  $d''$  durch  $c'$  und  $c''$  hindurchgegangen ist, so daß also  $c'd'$  den nach Satz 18 reellen Orthogonalkreis nicht schneidet. Auch  $a'b'$  schneidet den Orthogonalkreis nicht, dagegen schneidet  $a'd'$  nach Satz 18 den Orthogonalkreis gerade einmal. Also kann auch  $c'b'$  den Orthogonalkreis nur einmal schneiden. Wir haben also die in Fig. 17 gezeichnete Sachlage, wobei wir ebenso wie in Fig. 16  $\eta$  so transformiert haben, daß der Orthogonalkreis sich als Durchmesser projiziert. Es herrschen aber jetzt genau dieselben Verhältnisse wie bei dem ersten Obertheoreme im Falle I, alles weitere sich an das erste Obertheorem Anschließende, be-

sonders bezüglich der weiteren Obertheoreme, können wir daher unmittelbar vom Falle I auf den Fall II übertragen.

### § 10.

#### Nähere Ausführungen über den Fall III des § 3.

Es sei jetzt:

$$A_a < 0, \quad A_b < 0, \quad A_c < 0, \quad A_d < 0.$$

Lassen wir wieder  $B$  von dem Werte  $-Ac$  aus wachsen, so haben wir nur die in § 8 durchgeführte Diskussion zu wiederholen; der dort angegebene Fall 2) ist aber jetzt unmöglich. Denn es existiert ja in diesem Falle ein reeller Orthogonalkreis, den die Seiten  $c'd'$  und  $c'b'$  schneiden. Nun muß aber nach dem zweiten Teile von Satz 7 entweder  $d'a'$  oder  $a'b'$  eine Seitenlänge mit von 0 verschiedenem reellen Teile besitzen, d. h. es muß entweder  $a'b'$  oder  $a'd'$  den reellen Orthogonalkreis schneiden, vorausgesetzt, daß dieser existiert. Unter der Annahme, daß alle Winkel des Kreisbogenvierecks kleiner sind als  $\pi$ , ist es aber unmöglich, daß drei Seiten den Orthogonalkreis schneiden. Es ist daher nur einer der beiden Fälle 1a) oder 1b) des § 8 möglich, d. h. *man kann jetzt  $B$  immer so bestimmen, daß das Viereck  $a'b'c'd'$  ein sphärisches Viereck im Sinne der Elementargeometrie wird.*

Das so gewonnene Resultat ist für die Theorie der *Minimalflächen* von Bedeutung.

Es ist nämlich damit folgender Satz bewiesen:

**Satz 24.** *Genügen  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta' - \delta''$  den für den Fall III charakteristischen Bedingungen, so kann man nach Vorgabe von vier reellen Punkten  $a, b, c, d$  ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück, welches von vier geraden Linien begrenzt wird, die die Winkel  $(1 - \alpha)\pi, (1 - \beta)\pi, (1 - \gamma)\pi, (1 - \delta' + \delta'')\pi$  miteinander einschließen, derart angeben, daß es sich auf die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene abbilden läßt, so daß den Ecken des räumlichen Vierseits die Punkte  $a, b, c, d$  entsprechen.*

Die Obertheoreme ergeben sich auf dieselbe Weise wie in den Fällen I und II.

Erlangen, Februar 1908.