

Periodical volume

Mathematische Annalen - 68

in: Periodical

601 page(s)

---

## Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

## Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

## Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

# Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.\*)

(Zweite Mitteilung.)

Von

EMIL HILB in Würzburg.

In einer ersten unter dem gleichen Titel erschienenen Mitteilung\*\*) hatte ich mich auf den Fall beschränkt, daß die in Betracht gezogene lineare Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)} y = 0$$

die vier reellen singulären Stellen  $a, b, c, d = \infty$  hatte, wobei die dazugehörigen Exponenten  $0, \alpha; 0, \beta; 0, \gamma; \delta', \delta''$  die Eigenschaft hatten, daß sie reell waren und daß  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta' - \delta''$  kleiner waren als 1. Ich hatte dann untersucht, inwieweit man den zunächst noch willkürlichen „akzessorischen Parameter“  $B$  als reelle Größe durch Vorgabe eines der noch zur Verfügung stehenden Bestimmungsstücke desjenigen Kreisbogenvierecks festlegen kann, auf welches die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene der  $x$  durch den Quotienten zweier Partikularlösungen von (1) dann abgebildet wird, wenn darin alle vorkommenden Parameter, also  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, A$  und  $B$  reell sind.

Im folgenden wollen wir nun zunächst den Fall ins Auge fassen, in welchem die vier singulären Stellen irgendwelche komplexe Werte haben. Dazu legen wir in der  $x$ -Ebene von irgend einem Punkte  $O$  aus vier beliebige, einander nicht überkreuzende Einschnitte nach den Punkten  $a, b, c, d = \infty$  und betrachten den Fundamentalbereich, auf den die so zerschnittene Ebene durch den Quotienten zweier Partikularlösungen ab-

\*) Vergl. eine vorläufige Mitteilung in den Göttinger Nachrichten, Math. phys. Klasse 1909.

\*\*) Math. Ann., Bd. 66, S. 215 u. f. Ich werde die ganze Arbeit als Kapitel I einführen und stets mit I zitieren.

gebildet wird. Dieser Fundamentalbereich ist im Falle von reellen singulären Punkten nicht wesentlich von demjenigen Bereiche verschieden, den wir dort durch Spiegelung des Kreisbogensviereckes an irgend einer Seite desselben erhalten. Es wird zunächst die Aufgabe entstehen, die Maßzahlen eines solchen allgemeinen Fundamentalbereiches festzulegen und dann zu versuchen, den akzessorischen Parameter  $B$  durch eine derartige noch zur Verfügung stehende Maßzahl zu bestimmen, wobei man jetzt natürlich für  $B$  komplexe Werte zulassen muß. In der vorliegenden Arbeit werde ich dabei in erster Linie den Fall behandeln, welcher die Existenz eines Orthogonalkreises postuliert. Der Gedanke, auch im Falle reeller singulärer Punkte komplexe Werte für  $B$  zuzulassen, auf den man jetzt von selbst geführt wird, wird uns nun auch für den früher behandelten Spezialfall eine große Anzahl neuer Resultate liefern.

Um dann auf  $n$  singuläre Punkte überzugehen, werde ich im zweiten Teile dieser Mitteilung zunächst wiederum den Fall von  $n$  reellen singulären Punkten behandeln, der sich, wenn wir wieder für die akzessorischen Parameter die Realität vorschreiben, mit ähnlichen Methoden durchführen läßt, wie der Fall von vier reellen singulären Stellen.

In einer folgenden Mitteilung werde ich dann auch bei  $n$  singulären Stellen die Fälle komplexer akzessorischer Parameter zu behandeln haben, wobei es völlig gleichgültig ist, ob die singulären Stellen rein reelle oder komplexe Werte besitzen.

Die Hauptschwierigkeit, die dabei auftritt, wird darin bestehen, einen Überblick über die dabei in außerordentlich großer Anzahl existierenden „Obertheoreme“ zu gewinnen.

## Kapitel II.

### Behandlung des Falles von vier komplexen singulären Stellen.

#### § 1.

#### Allgemeine Untersuchungen über die Maßzahlen eines von vier Drehungen erzeugten Kernes, wenn die Aufeinanderfolge der vier Drehungen die Identität ergibt.

Wir betrachten zunächst wieder die Differentialgleichung (1) mit vier komplexen singulären Stellen. Wir greifen dann, wie schon oben erwähnt wurde, in der  $x$ -Ebene irgend einen Punkt  $O$  heraus, von dem wir zunächst noch willkürliche, sich nicht überkreuzende, durch analytische Kurven dargestellte Einschnitte nach den singulären Punkten legen. Die so zer-

schnittene  $x$ -Ebene wird dann durch den Quotienten  $\eta$  zweier Partikularlösungen auf einen von acht Kurvenstücken begrenzten Bereich auf der  $\eta$ -Kugel abgebildet. Von den acht Ecken dieses Fundamentalbereiches entsprechen vier dem Punkte  $O$ , die anderen vier Ecken, welche den singulären Punkten  $a, b, c, d = \infty$  entsprechen, seien  $a', b', c', d'$ . Die in den letzteren Ecken zusammenstoßenden Seiten des Fundamentalbereiches sind sich durch lineare Substitutionen

$$A, B, \Gamma, \Delta$$

zugeordnet. Diesen vier linearen Substitutionen entsprechen unter Zugrundelegung der  $\eta$ -Kugel als Maßfläche einer projektiven Maßbestimmung vier Drehungen, welche diese Kugel in sich überführen. Die Achsen dieser Drehungen, welche jetzt im allgemeinen zueinander windschief sind, gehen bezüglich durch  $a', b', c'$  und  $d'$ ; sie mögen die Kugel das zweite Mal in  $a'', b'', c'', d''$  treffen. Die Amplituden der Drehungen sind  $2\alpha\pi, 2\beta\pi, 2\gamma\pi$  und  $2\delta\pi$ . Lassen wir nun einen Punkt  $x$  in der zerschnittenen  $x$ -Ebene nacheinander die Punkte  $a, b, c$  und  $d$  längs der Schnittlinien umlaufen, so erfährt  $\eta$  hintereinander die Substitutionen  $A, B, \Gamma, \Delta$ , kehrt aber zu seinem Ausgangswert zurück, so daß also die vier Drehungen  $A, B, \Gamma$  und  $\Delta$  hintereinander ausgeführt die Identität ergeben. Die vier Geraden  $a'a'', b'b'', c'c''$  und  $d'd''$  mit Einschluß der dazu gehörigen Drehungen bezeichnen wir in naheliegender Verallgemeinerung der Nomenklatur, welche von Herrn Klein eingeführt wurde\*), als „Kern“ des Fundamentalbereiches.

Wir müssen nun die Maßzahlen dieses Kernes so festlegen, daß sie sich bei Transformationen der Kugel in sich nicht ändern; dann werden wir sie durch die Werte von  $\eta$  in den Schnittpunkten der Achsen mit der Kugel und durch die reellen gegebenen Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  ausdrücken können.

Um dieses durchzuführen, müssen wir zunächst einige allgemeine Sätze und Begriffe aus der Theorie der projektiven Maßbestimmung einführen\*\*), deren Maßfläche die  $\eta$ -Kugel ist.

1) Eine Gerade steht im Sinne der projektiven Maßbestimmung auf einer zweiten Geraden senkrecht, wenn sie diese und die zu ihr in bezug auf die Kugel konjugierte Gerade schneidet.

2) Zu irgend zwei windschiefen Geraden kann man stets zwei gemeinschaftliche Perpendikel konstruieren, die zueinander konjugiert sind. Das eine dieser beiden Perpendikel schneidet stets die Kugel, das andere nicht. Das die Kugel schneidende Perpendikel nennen wir auch den *inneren*

\*) Vergl. I S. 219.

\*\*) Vergl. neben den in I S. 218 †††) zitierten Arbeiten speziell: Klein, Hypergeometrische Funktion, S. 337 u. f., Schilling, Math. Ann., Bd. 44, S. 186.

*kürzesten Abstand* der beiden windschiefen Geraden, das die Kugel nicht schneidende Perpendikel den *äußeren kürzesten Abstand*.

Wir konstruieren jetzt die so definierten inneren kürzesten Abstände je zweier aufeinanderfolgender der Geraden  $a'a''$ ,  $b'b''$ ,  $c'c''$  und  $d'd''$ , diese mögen die Kugel in  $A'A''$ ,  $B'B''$ ,  $C'C''$  und  $D'D''$  derart schneiden, daß man, wenn man z. B. auf  $A'A''$  im Inneren der Kugel von dem Schnittpunkt dieser Linie mit  $a'a''$  in der Richtung zum Schnittpunkt mit  $b'b''$  geht, nach  $A''$  kommt.

Auf jeder der so definierten Geraden setzen wir nun als positiven Durchlaufungssinn diejenige Richtung fest, welche von den eingestrichenen Buchstaben zu den zweigestrichenen führt.

Unter einer positiven Schraubung verstehen wir eine rechtsgewundene Schraubung in dem festgelegten positiven Sinne der Schraubungsachse. Man kann nun stets durch eine projektive Transformation der Kugel in sich die Schnittpunkte einer Drehungsachse mit der Kugel nach  $\eta = 0$  und  $\eta = \infty$  bringen. Einer Schraubenbewegung von der Amplitude  $\lambda\pi$  um die Achse  $0\infty$  entspricht analytisch die Transformation

$$(2) \quad \eta_1 = e^{\lambda\pi i} \eta.$$

Ist

$$(3) \quad \lambda = \lambda' + i\lambda'',$$

so setzt sich die Schraubenbewegung\*) aus einer Drehung um die Achse von der Amplitude  $\lambda'\pi$  und aus einer Verschiebung längs der Achse um die in projektiver Maßbestimmung gemessene Größe  $\lambda''\pi$  zusammen, wobei wir bei der Messung der Kantenlänge in I S. 220 die Größe

$$(4) \quad C = \frac{i}{2}$$

setzen. Überhaupt wird sich für die weiteren Entwicklungen als notwendig erweisen, von der dort getroffenen, völlig undualistischen Festsetzung von  $C$  als reelle Größe abzuweichen; wir setzen ein für allemal  $C = \frac{i}{2}$ , wobei wir allerdings das, was wir früher als reelle Kantenlänge bezeichneten, jetzt als eine rein imaginäre Kantenlänge ansprechen müssen.

Nachdem so der Begriff der Schraubenbewegung festgelegt ist, wählen wir das Perpendikel  $A'A''$  als die Achse einer Schraubenbewegung, welche die positive Richtung von  $a'a''$  in die positive Richtung von  $b'b''$  überführt.

Die vier Perpendikel mit den dazugehörigen Schraubenbewegungen bilden nun zusammen den „*Polarkern*“ des gegebenen Kernes, Kern und Polarkern bilden zusammen den „*Schillingschen Doppelkern*“\*\*).

\*) Klein, l. c. pag. 345 u. f.

\*\*) Schilling, l. c. pag. 186.

Der Kern hat nun folgende zwölf Maßzahlen.

1) *Vier Kantenwinkel*, das sind die zu den vier Achsen des Kernes gehörigen vorgegebenen Drehungen von der Größe  $2\alpha\pi, 2\beta\pi, 2\gamma\pi, 2\delta\pi$ .

2) *Vier Seiten*  $L\pi, M\pi, N\pi, R\pi$ , das sind die im positiven Sinne gerechneten Amplituden derjenigen rechts gewundenen Schraubenbewegungen um die Achsen des Polarkernes, welche die positiven Richtungen je zweier Achsen des Kernes, zu denen das betreffende Perpendikel gehört, ineinander überführen. Z. B. ist  $L\pi$  die Amplitude derjenigen Schraubenbewegungen um  $A'A''$ , welche die positive Richtung von  $a'a''$  in die positive Richtung von  $b'b''$  überführt.

3) *Vier Kanten*  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi, \varrho\pi$ . Dabei ist  $\lambda\pi$  die Amplitude derjenigen Schraubenbewegung um die Achse  $a'a''$ , welche sich als Differenz einer Schraubenbewegung und einer Drehung um  $a'a''$  ergibt. Die Schraubenbewegung ist dabei diejenige um die Achse  $a'a''$ , welche die positive Richtung des Perpendikels  $A'A''$  in die positive Richtung des Perpendikels  $B'B''$  überführt, die Drehung ist diejenige, deren Amplitude den Kantenwinkel  $2\alpha\pi$  liefert.

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Seiten und Kanten.

Es seien die Nullstellen der Ausdrücke:

$$F_1 = a_{11}\eta^2 + a_{12}\eta + a_{22}, \quad F_2 = b_{11}\eta^2 + b_{12}\eta + b_{22}, \quad F_3 = c_{11}\eta^2 + c_{12}\eta + c_{22}, \\ F_4 = d_{11}\eta^2 + d_{12}\eta + d_{22}$$

die Werte von  $\eta$  in  $a', a''; b', b''; c', c''; d', d''$ .

Dann ergeben sich\*) die Werte von  $\eta$  in  $A'$  und  $A''$ , d. h., in den Schnittpunkten des inneren kürzesten Abstandes der Geraden  $a'a''$  und  $b'b''$  mit der Kugel als die Nullstellen der Funktionaldeterminante  $\varphi_1$  der homogen geschriebenen Formen  $F_1$  und  $F_2$ ; analog ergeben sich die Werte von  $\eta$  in  $B', B'', C', C'', D', D''$  als die Nullstellen der Funktionaldeterminanten  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  von  $F_2$  und  $F_3, F_3$  und  $F_4, F_4$  und  $F_1$ .

Es sei dann:

$$(5) \quad D_{11} = a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}; \quad D_{12} = a_{12}b_{12} - 2a_{11}b_{22} - 2a_{22}b_{11}; \\ D_{22} = b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22},$$

dann ergibt sich\*\*):

$$(6) \quad \cos L\pi = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \quad \sin L\pi = i \frac{\sqrt{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}},$$

wobei dann noch durch Spezialisierung die Vorzeichen der Wurzeln so

\*) Klein, l. c. pag. 348 u. f.

\*\*) Klein, l. c. pag. 327. (Die Bezeichnung ist hier etwas geändert, so daß statt 2 und 3 in der dortigen Formel 1 und 2 zu setzen ist.)

zu bestimmen sind, daß wir in den elementaren Fällen auf die bekannten Formeln stoßen.

Bildet man analog aus  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die entsprechenden Ausdrücke, wie eben aus  $F_1$  und  $F_2$ , so erhält man  $\cos((\lambda + 2\alpha)\pi)$ , bez.  $\sin((\lambda + 2\alpha)\pi)$ .

Um nun alle diese Ausdrücke in einfacher Gestalt zu erhalten, bringen wir durch eine projektive Transformation  $b'$  nach 0,  $b''$  nach  $\infty$ ; es möge dann  $\eta$  in den Punkten  $a', a'', c', c''$  die Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2$  besitzen.

Dann hat man:

$$(7) \quad F_1 = \eta^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\eta + \lambda_1\lambda_2, \quad F_2 = \eta, \quad F_3 = \eta^2 - (\nu_1 + \nu_2)\eta + \nu_1\nu_2.$$

$\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind dann die Funktionaldeterminanten der homogen geschriebenen Formen  $F_1$  und  $F_2$ , bez.  $F_2$  und  $F_3$ , es ist daher:

$$(8) \quad \varphi_1 = \eta^2 - \lambda_1\lambda_2, \quad \varphi_2 = \eta^2 - \nu_1\nu_2.$$

Daher erhält man:

$$(9) \quad \cos L\pi = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \sin L\pi = \frac{2i\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Um uns zu überzeugen, daß dabei die Vorzeichen der Wurzeln richtig gewählt sind, setzen wir  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \infty$ , dann wird  $\cos L\pi$  tatsächlich gleich 1, setzen wir  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ , dann wird  $\sin L\pi = 1$ , wenn wir das Vorzeichen der Wurzel bei  $\sin L\pi$  positiv wählen. Im übrigen ist (9) mit der für den Spezialfall in I (12) gewonnenen Formel identisch.

Dadurch ist  $L\pi \bmod 2\pi$  festgelegt; Kanten, für welche sich  $L\pi$  um Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden, haben wir uns in verschiedenen Blättern derjenigen über der Kugel ausgebreiteten Riemannschen Fläche gelegen zu denken, welche aus der fortgesetzten Reproduktion des zum Kern gehörigen Fundamentalbereichs entsteht.

Indem wir jetzt die zu  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gehörigen Formeln berechnen, erhalten wir:

$$(10) \quad \begin{aligned} \cos((\lambda + 2\alpha)\pi) &= \frac{\nu_1\nu_2 + \lambda_1\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\nu_1\nu_2}}; \\ \sin((\lambda + 2\alpha)\pi) &= \frac{i\sqrt{(\nu_1\nu_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2\nu_1\nu_2}}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\nu_1\nu_2}} = \pm \frac{\nu_1\nu_2 - \lambda_1\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\nu_1\nu_2}} i. \end{aligned}$$

Daher ist:

$$e^{(\lambda + 2\alpha)\pi i} = \sqrt{\frac{\nu_1\nu_2}{\lambda_1\lambda_2}} \quad \text{oder es ist} \quad e^{(\lambda + 2\alpha)\pi i} = \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\nu_1\nu_2}}.$$

Um zwischen beiden Formeln zu entscheiden, nehmen wir an, es mögen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die reellen Werte  $l_1$  und  $l_2$  haben; ferner sei  $\nu_1 = n_1 e^{2\alpha\pi i}$ ,  $\nu_2 = n_2 e^{2\alpha\pi i}$ , dann wird im ersten Falle  $\lambda\pi = \frac{i}{2} \lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}$  wir haben also genau die Formel I (13) erhalten, wenn wir daselbst  $C = \frac{i}{2}$  setzen, wie schon vorher auf Seite 27 bemerkt war. Im zweiten Falle würde sich  $e^{2\alpha\pi i}$

nicht wegheben und man käme daher auf einen unbrauchbaren Ausdruck. Es ergibt sich also:

$$(11) \quad \lambda\pi = \frac{i}{2} \lg \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\nu_1 \nu_2} - 2\alpha\pi. *)$$

Durch (3) ist  $\lambda\pi$  nur mod.  $\pi$  festgelegt, doch betrachten wir solche  $\lambda$ , die sich nur um ganze Vielfache von  $\pi$  unterscheiden, als gleich.

Welche Bedingungen müssen nun die Größen  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \varrho_1, \varrho_2$  erfüllen, damit bei allen vier Drehungen ein Kreis in sich übergeht? In diesem Falle sagen wir, der zugehörige Fundamentalbereich besitze einen Orthogonalkreis oder kürzer, die Orthogonalitätsbedingungen seien erfüllt.

Nun gehen bei einer Drehung alle diejenigen Kreise in sich über, die von Ebenen ausgeschnitten werden, deren Pol auf der Drehungsachse liegt. Es müssen daher alle vier Drehungsachsen durch den Pol des Orthogonalkreises gehen, d. h. die vier Drehungsachsen müssen sich in einem Punkte schneiden. Wir nehmen nun wieder an, wir hätten  $b'$  nach 0,  $b''$  nach  $\infty$  gebracht. Nun ist jedenfalls für die Existenz eines Orthogonalkreises notwendig, daß die Gerade  $a'a''$  die Gerade  $b'b''$  schneidet; es müssen daher jetzt  $a'$  und  $a''$  auf demselben größten Kreise durch 0 und  $\infty$  liegen, wenn wir die Werteverteilung auf  $\eta$  der Kugel uns derart angeordnet denken, daß  $0\infty$  ein Durchmesser der Kugel ist und die  $\eta$ -Werte durch stereographische Projektion der in 0 die Kugel berührenden komplexen Zahlenebene von  $\infty$  aus erhalten sind; dann sehen wir sofort, daß  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  reell sein muß, d. h. es muß stets, wenn  $b'$  in 0,  $b''$  in  $\infty$  liegt:

$$(12) \quad \Re \left( \frac{1}{i} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = 0$$

sein, wenn  $\Re(f)$  der reelle Teil von  $f$  ist.

Ist nun (12) erfüllt, dann entspricht den nacheinander ausgeführten Drehungen um  $a'a''$  und  $b'b''$  eine Substitution, welche einen Kreis ungeändert läßt, nämlich den von der Polarebene des Schnittpunktes von  $a'a''$  und  $b'b''$  ausgeschnittenen Kreis, der reell oder imaginär sein kann. Daraus folgt, daß die aus A und B zusammengesetzte Substitution nur elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sein kann.

Diese durch Zusammensetzung erhaltene Substitution nennen wir E; dann geben E,  $\Gamma$  und  $\Delta$  hintereinander angewendet die Identität. Wir kommen daher auf einen von Herrn Klein und von Herrn Schilling l. c. ausführlich diskutierten Fall.

Es sei nun zunächst E elliptisch oder hyperbolisch; die Fixpunkte von E seien  $e'$  und  $e''$ , die Werte von  $\eta$  in denselben  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Wir führen dann zunächst die Substitution:

\*) Die Formel gilt ihrer Ableitung nach natürlich auch noch, wenn  $\alpha$  komplex ist.



$$(13) \quad \bar{\eta} = \frac{-\sigma_2 \eta + 1}{\eta - \sigma_2}$$

ein, welche  $e''$  nach  $\infty$  bringt, und zeichnen alle Größen nach der Transformation durch Überstreichen aus. Dann erhalten die drei Substitutionen  $E$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  die Form:

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{\eta}' - \bar{\sigma}_1 &= e^{2\pi i \varepsilon} (\bar{\eta} - \bar{\sigma}_1), \\ \frac{\bar{\eta}' - \bar{\nu}_1}{\bar{\eta}' - \bar{\nu}_2} &= e^{2\pi i \gamma} \frac{\bar{\eta} - \bar{\nu}_1}{\bar{\eta} - \bar{\nu}_2}, \\ \frac{\bar{\eta}' - \bar{\varrho}_1}{\bar{\eta}' - \bar{\varrho}_2} &= e^{2\pi i \delta} \frac{\bar{\eta} - \bar{\varrho}_1}{\bar{\eta} - \bar{\varrho}_2}. \end{aligned}$$

Dabei sind also  $\nu_1, \nu_2, \varrho_1$  und  $\varrho_2$  die ursprünglichen Werte von  $\eta$  in den Punkten  $c', c'', d', d''$ , dieselben Buchstaben überstrichen repräsentieren die daraus durch (13) entstandenen Werte;  $\varepsilon$  ist entweder reell oder rein imaginär, jenachdem  $E$  eine elliptische oder eine hyperbolische Substitution ist.

Wir ziehen jetzt die Bedingung in Betracht, daß die drei Substitutionen (14) hintereinander angewendet die Identität ergeben. Eine leichte Rechnung, welche sich übrigens bei Schilling\*) durchgeführt findet, ergibt die Gleichung:

$$(15) \quad \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\varrho}_2 - \bar{\sigma}_1)}{(\bar{\nu}_1 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1)} = e^{-2\pi i \varepsilon},$$

welche wir diskutieren wollen.

Es sei  $\varepsilon$  reell, dann ersehen wir aus (11), daß die Größe der Kante auf der Geraden  $e'e''$  gleich  $-\pi\varepsilon$  ist; der kürzeste innere Abstand von  $e'e''$  und  $d'd''$  geht also in den inneren kürzesten Abstand von  $e'e''$  und  $c'c''$  durch eine Schraubung um  $e'e''$  als Achse mit der Amplitude  $-\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon$ , also durch einfache Drehung um diese Achse über. Also schneiden sich die beiden Perpendikel auf der Geraden  $e'e''$  und liegen mit der zu  $e'e''$  in bezug auf die Kugel konjugierten Gerade in einer Ebene, da sie ja beide nach der Definition des Senkrechtstehens diese schneiden. Da wir nun bezüglich jeder der beiden anderen Achsen dieselben Schlüsse ziehen können, so folgt, daß immer je zwei kürzeste Abstände mit je einer der zu den Achsen konjugierten Geraden in einer Ebene liegen. Es liegen daher entweder alle drei kürzesten Abstände und damit auch die drei zu den Achsen konjugierten Geraden in einer Ebene, oder die drei kürzesten Abstände schneiden sich in einem Punkte. Im ersten Falle gehen daher die drei Geraden  $c'c'', d'd'', e'e''$  durch den Pol der Ebene, in denen die drei zu ihnen konjugierten Geraden liegen, schneiden sich also in einem Punkte. Dasselbe gilt aber auch im zweiten Falle, da ja, wie wir vorher schon bemerkten, der Schnittpunkt je zweier aufeinanderfolgender innerer

\*) l. c. S. 193.

kürzester Abstände je auf einer der Achsen lag. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die drei Geraden  $c'c''$ ,  $d'd''$  und  $e'e''$  sich außerhalb der Kugel schneiden, da dann die Ebene, welche die drei inneren Abstände miteinander bilden, die Polarebene dieses Punktes ist. Der zweite Fall tritt dann ein, wenn sich die drei Achsen im Innern der Kugel schneiden.

Es sei jetzt aber  $\varepsilon$  rein imaginär, also  $E$  hyperbolisch. Dann ändern sich die Schlüsse in bezug auf  $c'c''$  und  $d'd''$  in keiner Weise, es liegen daher wieder die inneren kürzesten Abstände von  $c'c''$ ,  $d'd''$  und von  $e'e''$ ,  $d'd''$  mit der zu  $d'd''$  konjugierten Geraden in einer Ebene und ebenso liegen die kürzesten inneren Abstände von  $d'd''$ ,  $c'c''$  und von  $e'e''$ ,  $c'c''$  mit der zu  $c'c''$  konjugierten Geraden in einer Ebene. Dagegen geht jetzt der kürzeste innere Abstand von  $c'c''$  und  $e'e''$  in den inneren kürzesten Abstand von  $d'd''$  und  $e'e''$  durch eine bloße Verschiebung längs  $e'e''$  über, diese beiden inneren kürzesten Abstände liegen also mit  $e'e''$  in einer Ebene. Es folgt daher wieder, daß die drei inneren kürzesten Abstände entweder in einer Ebene liegen, welche  $e'e''$  und die beiden zu  $c'c''$  und  $d'd''$  konjugierten Geraden enthält, oder sich in einem Punkte schneiden. Im ersten Falle gehen  $c'c''$ ,  $d'd''$  und die zu  $e'e''$  konjugierte Gerade durch den Pol jener Ebene, im zweiten Falle gehen  $c'c''$  und  $d'd''$  durch jenen Schnittpunkt, dieser bleibt also bei der Verschiebung längs  $e'e''$  fest, liegt also auch auf der zu  $e'e''$  konjugierten Geraden.

Zusammenfassend haben wir also:

*Satz 1. Geben vier Drehungen um vier vorgegebene Achsen hintereinander angewendet die Identität und schneiden sich die Achsen der beiden ersten Drehungen, so schneiden sich auch die beiden Achsen der letzten Drehungen. Ergeben die beiden ersten Drehungen hintereinander angewendet wieder eine Drehung, deren Achse natürlich durch den Schnittpunkt der Achsen der beiden ersten Drehungen geht, so liegt der Schnittpunkt der beiden letzten Achsen auf dieser Achse. Ergeben die ersten beiden Drehungen hintereinander angewendet eine hyperbolische Substitution, also eine Verschiebung, für welche die zur Achse konjugierte Gerade natürlich durch den Schnittpunkt der ersten beiden Drehungsachsen geht, so liegt auch der Schnittpunkt der letzten beiden Drehungsachsen auf der zur Achse der hyperbolischen Substitution konjugierten Geraden.*

Man kann den Teil dieses Satzes, der sich auf die hyperbolische Substitution bezieht, sofort dadurch auf den der elliptischen Substitution zurückführen, daß man jedesmal statt der Achse im Falle einer elliptischen Substitution die zur Achse konjugierte Gerade im Falle der hyperbolischen Substitution einführt.

Ergeben die ersten beiden Drehungen zusammen eine parabolische Substitution, so wird die Achse dieser Substitution eine Tangente an die

Kugel, und die beiden ersten und die beiden letzten Paare von Drehungsachsen schneiden sich beide entweder auf der Achse der parabolischen Substitution oder auf der dazu konjugierten Geraden. Um dieses zu erkennen, hat man nur die parabolische Substitution als Grenzfall einer elliptischen bezüglich hyperbolischen Substitution aufzufassen.

Sollen nun die vier Achsen sich in einem Punkte schneiden, so müssen, wenn sich die beiden ersten Achsen und damit auch die beiden letzten Achsen in einem Punkte schneiden, nur mehr diese beiden Schnittpunkte zusammenfallen, welche ohnehin auf einer durch die beiden ersten Substitutionen bestimmten Geraden liegen; das Zusammenfallen erfordert also nunmehr eine Bedingungsgleichung, an deren Aufstellung wir jetzt gehen.

Es sei also zunächst die Bedingungsgleichung (12) erfüllt. Dann berechnen wir die aus A und B zusammengesetzte Substitution E und die dazu gehörigen Fixpunkte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  und unterwerfen  $\eta$  der Substitution (13). Es sind dann die Fälle, in denen E elliptisch ist und in denen E hyperbolisch ist, zunächst scharf zu trennen.

1) E sei elliptisch, so daß also  $a'a''$ ,  $b'b''$  und  $c'c''$  die Gerade  $e'e''$  schneiden. Es sind dann die Größen  $\frac{\bar{\lambda}_1 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\sigma}_1}$ ,  $\frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\mu}_2 - \bar{\sigma}_1}$ ,  $\frac{\bar{\nu}_1 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1}$  reell und wir setzen:

$$(16) \quad \bar{\lambda}_1 - \bar{\sigma}_1 = \bar{l}_1 e^{\bar{\alpha}\pi i}, \quad \bar{\lambda}_2 - \bar{\sigma}_1 = \bar{l}_2 e^{\bar{\alpha}\pi i}, \quad \bar{\mu}_1 - \bar{\sigma}_1 = \bar{m}_1 e^{\bar{\beta}\pi i}, \\ \bar{\mu}_2 - \bar{\sigma}_1 = \bar{m}_2 e^{\bar{\beta}\pi i}, \quad \bar{\nu}_1 - \bar{\sigma}_1 = \bar{n}_1 e^{\bar{\gamma}\pi i}, \quad \bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1 = \bar{n}_2 e^{\bar{\gamma}\pi i}.$$

Da nun die Geraden  $a'a''$  und  $b'b''$  die Gerade  $e'e''$  in demselben Punkte schneiden, so folgt aus (11) oder auch schon aus dem in (I, (14)) abgeleiteten Spezialfall dieser Formel:

$$(17) \quad \bar{l}_1 \bar{l}_2 - \bar{m}_1 \bar{m}_2 = 0.$$

Sollen nun alle Achsen sich in einem Punkte schneiden, so muß aus demselben Grunde:

$$(18) \quad \bar{m}_1 \bar{m}_2 - \bar{n}_1 \bar{n}_2 = 0$$

sein. Die Gleichungen (12) und (18) stellen also in diesem Falle die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Orthogonalkreises dar. Statt (18) müssen wir dann nur mehr eine Gleichung wählen, die unabhängig von (12) einen Sinn hat und sich vermittels (12) auf (18) reduziert. Wir wählen dafür:

$$(19) \quad \left[ \Re \left( \frac{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\sigma}_1)^*}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\sigma}_1} \right) - \Re \left( \frac{(\bar{\nu}_1 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1)^*}{\bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1} \right) \right] \cdot \frac{1}{1 + |\sigma_1|^2} = 0.$$

Dieser Ausdruck behält seinen Sinn, welchen Charakter auch die Substitution E, welche im allgemeinen loxodromisch sein wird, haben mag, es reduziert sich jedoch, wenn (12) erfüllt ist und E eine elliptische Sub-

stitution ist, auf (17). Sollte E in eine parabolische Substitution übergehen, deren Achse durch den Schnittpunkt von  $a'a''$  und  $b'b''$  geht, während (12) erfüllt ist, so haben wir in (19) nur  $\bar{\sigma}_1$  in das Unendliche wachsen zu lassen.

2) E sei hyperbolisch, so daß also  $a'a''$ ,  $b'b''$  und  $c'e''$  die zu  $e'e''$  konjugierte Gerade  $\varepsilon'\varepsilon''$  schneiden. Fällt dann  $e'e''$  mit dem vertikalen durch 0 und  $\infty$  gehenden Durchmesser der Kugel zusammen, dann liegen  $a'a''$ ,  $b'b''$  und  $c'e''$  in horizontalen Ebenen, da sie ja in Polarebenen von Punkten des Durchmessers  $e'e''$  liegen. Ist (12) erfüllt, so werden  $a'a''$  und  $b'b''$  parallel, da sie sich in demselben Punkte der im Unendlichen liegenden zu  $e'e''$  konjugierten Geraden schneiden. Wir setzen dann, indem wir wieder die Substitution (13) ausgeführt denken,

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 - \bar{\sigma}_1 &= \bar{l}_1 e^{\bar{\alpha}_1 \pi i}, & \bar{\lambda}_2 - \bar{\sigma}_1 &= \bar{l}_1 e^{\bar{\alpha}_2 \pi i}, & \bar{\mu}_1 - \bar{\sigma}_1 &= \bar{m}_1 e^{\bar{\beta}_1 \pi i}, \\ \bar{\mu}_2 - \bar{\sigma}_1 &= \bar{m}_1 e^{\bar{\beta}_2 \pi i}, & \bar{\nu}_1 - \bar{\sigma}_1 &= \bar{n}_1 e^{\bar{\gamma}_1 \pi i}, & \bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1 &= \bar{n}_1 e^{\bar{\gamma}_2 \pi i}. \end{aligned}$$

Wenn nun (12) erfüllt ist und wir uns wieder  $e'e''$  vorübergehend in 0 und  $\infty$  denken, sind  $a'a''$  und  $b'b''$  parallel, also ist:

$$(21) \quad \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \equiv \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \pmod{2}$$

oder

$$(22) \quad \sin \left( \frac{(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)\pi}{2} \right) = 0.$$

Sollen nun alle drei Achsen sich in einem Punkte schneiden, muß also sein:

$$(23) \quad \sin \left( \frac{(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2)\pi}{2} \right) = 0.$$

Für (23) schreiben wir allgemein:

$$(23a) \quad \Re \left( \sin \left( \frac{1}{2i} \lg \frac{(\bar{\mu}_1 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\mu}_2 - \bar{\sigma}_1)}{|\bar{\mu}_1 - \bar{\sigma}_1|^2} \frac{|\bar{\nu}_1 - \bar{\sigma}_1|^2}{(\bar{\nu}_2 - \bar{\sigma}_1)} \right) \right) = 0,$$

eine Gleichung, die auch in der Tat, wenn (12) erfüllt ist, E eine hyperbolische Substitution ist und (20) gilt, in (22) übergeht. Ist (12) erfüllt und ist E eine parabolische Substitution, für welche die zur Achse konjugierte Gerade durch den Schnittpunkt von  $a'a''$  und  $b'b''$  geht, so haben wir in (23a)  $\bar{\sigma}_1$  in das Unendliche wachsen zu lassen.

Wenn man nun auch allenfalls durch geeignete Normierung erreichen kann, daß, wenn (12) erfüllt ist und  $\bar{\sigma}_1$  unendlich wird, die linke Seite von (19) in die linke Seite von (22) stetig übergeht, so sieht man doch beiden Gleichungen nicht an, daß sie eigentlich eine und dieselbe transzendente Gleichung für  $B_1$  und  $B_2$  unter Voraussetzung von (12) darstellen. Die so sehr in das Auge springende Unsymmetrie rührt daher, daß wir das eine Mal die durch den Schnittpunkt gehende Gerade, das andere Mal die dazu konjugierte Gerade als durch 0 und  $\infty$  gehend wählten.

Es ist nun von größter Wichtigkeit, andere Ausdrücke, die diesen Mißstand nicht haben, aufzustellen. Wir stellen dazu folgende Betrachtung an. Es schneide  $c'c''$  die Gerade  $b'b''$ ; da nun  $c'c''$ , wenn (12) erfüllt ist, auch die durch den Schnitt von  $a'a''$  und  $b'b''$  gehende Gerade  $e'e''$  bez.  $E'E''$  schneidet, so liegen  $b'b''$ ,  $c'c''$  und  $e'e''$  bezw.  $E'E''$  entweder in einer Ebene, oder sie gehen alle drei durch einen Punkt. Es sei nun  $\vartheta$  der in gewöhnlicher Weise gemessene Winkel, den diejenige der beiden Geraden  $e'e''$  bez.  $E'E''$  mit der von  $b'b''$  und  $c'c''$  gebildeten Ebene einschließt, welche durch den Schnittpunkt von  $a'a''$  und  $b'b''$  geht; wenn (12) erfüllt ist und  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = \infty$  ist, dann ist:

$$(24) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \Re \left( \frac{1}{i} \frac{v_1}{v_2} \right) = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Orthogonalkreises.

Um dieses zunächst im Falle, daß  $E$  eine elliptische Substitution ist, auch rechnerisch nachzuweisen, setzen wir:

$$(25) \quad \eta' = C \frac{\bar{\eta}_1 - \mu_1}{\bar{\eta}_1 - \mu_2}.$$

Dann ist nach (16):

$$(26) \quad v_1 = C \frac{\bar{n}_1 - m_1 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}}{\bar{n}_1 - \bar{m}_2 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}}; \quad v_2 = C \frac{\bar{n}_2 - \bar{m}_1 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}}{\bar{n}_2 - \bar{m}_2 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}}.$$

Also ist, wenn:

$$(27) \quad \frac{\bar{n}_1 - \bar{m}_1 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}}{\bar{n}_1 - \bar{m}_2 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}} \cdot \frac{\bar{n}_2 - \bar{m}_2 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}}{\bar{n}_2 - \bar{m}_1 e^{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi i}} = X + iY,$$

$$\frac{Y}{\sin \vartheta} = 0.$$

wenn  $X$  eine reelle Zahl ist. Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles in (27) ergibt sich:

$$(28) \quad \bar{n}_1 \bar{n}_2 (1 - X) - \bar{n}_2 (\bar{m}_1 - X \bar{m}_2) \cos \varphi - \bar{n}_1 (\bar{m}_2 - X \bar{m}_1) \cos \varphi + \bar{m}_1 \bar{m}_2 (1 - X) \cos 2\varphi - [(\bar{n}_2 \bar{m}_2 + \bar{n}_1 \bar{m}_1) \sin \varphi - \bar{m}_1 \bar{m}_2 \sin 2\varphi] Y = 0.$$

$$(29) \quad -\bar{n}_2 (\bar{m}_1 - X \bar{m}_2) \sin \varphi - \bar{n}_1 (\bar{m}_2 - X \bar{m}_1) \sin \varphi + 2 \bar{m}_1 \bar{m}_2 (1 - X) \cos \varphi \sin \varphi = Y [-\bar{n}_1 \bar{n}_2 (\bar{n}_2 \bar{m}_2 + \bar{n}_1 \bar{m}_1) \cos \varphi - \bar{m}_1 \bar{m}_2 \cos 2\varphi],$$

wobei  $\varphi = (\bar{\beta} - \bar{\gamma})\pi$  ist. Da nun  $\sin \vartheta$  und  $\sin \varphi$  gleichzeitig und von gleicher Ordnung verschwinden, und  $\frac{Y}{\sin \vartheta} = 0$  sein soll, so folgt aus (29):

$$-\bar{n}_2 (\bar{m}_1 - X \bar{m}_2) - \bar{n}_1 (\bar{m}_2 - X \bar{m}_1) + 2 \bar{m}_1 \bar{m}_2 (1 - X) \cos \varphi = 0,$$

also ist nach (28):

$$(30) \quad (\bar{n}_1 \bar{n}_2 - \bar{m}_1 \bar{m}_2) (1 - X) = 0.$$

Da wir nun stets  $\nu_1 \neq \nu_2$  verschieden annehmen wollen, d. h. da wir  $\Gamma$  stets als eine wirkliche elliptische Substitution betrachten wollen, so ist für den Fall, daß  $E$  eine elliptische Substitution ist, tatsächlich die Gleichung (18) aus (24) abgeleitet. Umgekehrt folgt natürlich aus (18) die Gleichung (24).

Ist  $E$  eine hyperbolische Substitution, so findet man aus (20):

$$(31) \quad \nu_1 = C \frac{\left( e^{\bar{\gamma}_1 \pi i} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} e^{\bar{\gamma}_1 \pi i} \right)}{\left( e^{\bar{\gamma}_1 \pi i} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} e^{\bar{\gamma}_2 \pi i} \right)}, \quad \nu_2 = C \frac{e^{\bar{\gamma}_2 \pi i} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} e^{\bar{\gamma}_1 \pi i}}{e^{\bar{\gamma}_2 \pi i} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} e^{\bar{\gamma}_2 \pi i}}.$$

Wir setzen wieder  $\frac{\nu_1}{\nu_2} = X + iY$  und deuten die Faktoren von  $Y$  nur durch  $\{ \}$  an. Dann wird:

$$(32) \quad \begin{aligned} & (1 - X) [\cos((\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2) \pi) + \cos((\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \pi)] \\ & - \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} [\cos((\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_2) \pi) + \cos((\bar{\gamma}_1 + \bar{\beta}_2) \pi)] \\ & + \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} X [\cos((\bar{\beta}_2 + \bar{\gamma}_2) \pi) + \cos((\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_1) \pi)] \\ & + \left( \frac{\bar{m}_1^2}{\bar{n}_1^2} - 1 \right) (1 - X) \cos((\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \pi) + Y \{ \} = 0, \end{aligned}$$

$$(33) \quad \begin{aligned} & (1 - X) [\sin((\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2) \pi) + \sin((\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \pi)] \\ & - \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} [\sin((\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_2) \pi) + \sin((\bar{\gamma}_1 + \bar{\beta}_2) \pi)] \\ & + \frac{\bar{m}_1}{\bar{n}_1} X [\sin((\bar{\beta}_2 + \bar{\gamma}_2) \pi) + \sin((\bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_1) \pi)] \\ & + \left( \frac{\bar{m}_1^2}{\bar{n}_1^2} - 1 \right) (1 - X) \sin((\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \pi) + Y \{ \} = 0. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren (32) mit

$$(33) \text{ mit } \begin{aligned} & \sin \left( \frac{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{2} \pi \right), \\ & \cos \left( \frac{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{2} \pi \right), \end{aligned}$$

und subtrahieren. Dann erhalten wir:

$$(34) \quad Y \{ \} = (1 - X) \left( \frac{\bar{m}_1^2}{\bar{n}_1^2} - 1 \right) \left[ \sin((\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \pi) \cos \left( \frac{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{2} \pi \right) - \cos((\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \pi) \sin \left( \frac{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2}{2} \pi \right) \right].$$

Sobald nun  $\sin \vartheta$  verschwindet, verschwindet auch  $\frac{\bar{m}_1^2}{\bar{n}_1^2} - 1$  von gleicher Ordnung und umgekehrt, da also  $\frac{Y}{\sin \vartheta}$  verschwinden soll, so muß

$$(35) \quad \sin \left( \frac{\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2}{2} \pi \right) = 0$$

sein, wenn wieder  $\Gamma$  eine rein elliptische Substitution ist.

Der Fall, daß  $E$  in eine parabolische Substitution übergeht, läßt sich aus den beiden eben behandelten durch Grenzübergang ableiten, ergibt sich aber auch ohne weiteres aus der obigen geometrischen Interpretation des Resultates. Dagegen verliert natürlich die Methode ihren Sinn, wenn  $E$  die identische Substitution ist, da dann von einer Achse  $E$  natürlich nicht mehr die Rede sein kann. Damit dieses eintritt, müssen  $a'a''$  und  $b'b''$ , sowie auch  $c'c''$  und  $d'd''$  zusammenfallen. Natürlich existiert dann ein Orthogonalkreis, wenn  $c'c''$  die Gerade  $a'a''$  schneidet. Auf alle Fälle muß aber dabei  $\alpha = \beta$  und  $\gamma = \delta$  sein, wir können aber immer einen solchen Fall, in dem  $E$  die identische Substitution werden kann, im Rahmen des Folgenden als Grenzfall betrachten.

An Stelle von (24) kann man natürlich noch eine große Anzahl analoger Ausdrücke aufstellen, für manche Zwecke ist es auch bequem, Ausdrücke zu haben, deren Verschwinden zwar neben (12) notwendig, aber nicht hinreichend ist für die Existenz eines Orthogonalkreises, so daß man noch durch geeignete Funktionen die linke Seite eigentlich zu dividieren hätte. Als solche Gleichungen seien erwähnt:

$$(36) \quad \left| \frac{\lambda_1 \lambda_2}{v_1 v_2} \right| - 1 = 0$$

und die etwas schärfere Bedingungsgleichung:

$$(37) \quad \Re \left( \frac{\lambda_1 |\lambda_2|^2}{\lambda_2} - \frac{v_1 |v_2|^2}{v_2} \right) = 0.$$

## § 2.

### Vollständige Behandlung eines Spezialfalles.

Um uns nun über den Fall zu orientieren, in welchem für den akzessorischen Parameter, für welchen ein Orthogonalkreis existieren soll, allgemein komplexe Werte zugelassen werden, behandeln wir den Fall, daß in (1):

$$A = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

ist. Da dann:

$$\delta' + \delta'' = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad \delta' \delta'' = 0$$

ist, so ist auch

$$\delta = \frac{1}{2}.$$

Wir wollen nun auch zunächst noch für  $a, b, c$  reelle Werte annehmen,  $d$  sei  $\infty$ . Wir führen dann in:

$$(38) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{B}{(x-a)(x-b)(x-c)} y = 0.$$

mit leichter Modifikation von I (22) die Veränderliche:

$$(39) \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

ein, wodurch (38) übergeht in:

$$(40) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + B y = 0.$$

Wir denken uns nun die  $x$ -Ebene längs der geraden Verbindungslinie von  $a, b; b, c$  und  $c, d$  aufgeschnitten. Diese Ebene wird dann auf die  $t$ -Ebene als Rechteck abgebildet, welches die Seite  $2\omega_1$  und  $\omega_2 i$  besetzt.

Die Werte von  $t$  in  $a, b, c$  und  $d$  bezeichnen wir mit  $t_a, t_b, t_c$  und  $t_d$ . Es sei:

$$(41) \quad t_b = 0, \quad t_a = \omega_1, \quad t_c = \omega_2 i.$$

Die beiden zu  $t_b$  gehörigen Fundamentallösungen sind:

$$(42) \quad Y_{\rho}^b(t) = \frac{\sin(\sqrt{B}t)}{\sqrt{B}}, \quad Y_0^b(t) = \cos(\sqrt{B}t).$$

Die zum Punkte  $a$  und  $c$  gehörigen Fundamentallösungen sind:

$$(43) \quad \begin{aligned} \bar{Y}_a^a(t) &= \sin(\sqrt{B}(t-t_a)), & \bar{Y}_0^a(t) &= \cos(\sqrt{B}(t-t_a)), \\ \bar{Y}_c^c(t) &= \sin(\sqrt{B}(t-t_c)), & \bar{Y}_0^c(t) &= \cos(\sqrt{B}(t-t_c)), \end{aligned}$$

Dabei sind die letzten vier Fundamentallösungen noch nicht normiert, was wir durch Überstreichen andeuteten. Wir setzen nun:

$$(44) \quad \begin{aligned} Y_a^a(t) &= \frac{\sin(\sqrt{B}(t-\omega_1))}{\sqrt{B} \cos(\sqrt{B}\omega_1)} \\ &= \frac{\sin(\sqrt{B}t)}{\sqrt{B}} - \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{B}\omega_1)}{\sqrt{B}} \cos(\sqrt{B}t) = Y_{\rho}^b(t) - \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{B}\omega_1)}{\sqrt{B}} Y_0^b(t), \\ Y_0^a(t) &= \frac{\cos(\sqrt{B}(t-\omega_1))}{\sqrt{B} \sin(\sqrt{B}\omega_1)} = Y_{\rho}^b(t) + \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_1)}{\sqrt{B}} Y_0^b(t), \\ Y_c^c(t) &= \frac{\sin(\sqrt{B}(t-\omega_2 i))}{\sqrt{B} \sin(\sqrt{B}\omega_2 i)} = Y_{\rho}^b(t) - \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{B}\omega_2 i)}{\sqrt{B}} Y_0^b(t), \\ Y_0^c(t) &= \frac{\cos(\sqrt{B}(t-\omega_2 i))}{\sqrt{B} \sin(\sqrt{B}\omega_2 i)} = Y_{\rho}^b(t) + \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_2 i)}{\sqrt{B}} Y_0^b(t), \end{aligned}$$



Ferner sei:

$$\eta = \frac{Y_p^b(t)}{Y_0^b(t)}.$$

Dann schneiden wir die  $x$ -Ebene von einem oberhalb der Achse des Reellen gelegenen Punkt  $O$  aus auf.

Es hat  $\eta$  in  $a', a'', b', b'', c', c''$  bezüglich die Werte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{B}\omega_1)}{\sqrt{B}}, & \lambda_2 &= -\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_1)}{\sqrt{B}}, \\ (45) \quad \mu_1 &= 0, & \mu_2 &= \infty, \\ \nu_1 &= +\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{B}\omega_2 i)}{\sqrt{B}}, & \nu_2 &= -\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_2 i)}{\sqrt{B}}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun die in der komplexen Größe:

$$(46) \quad B = B_1 + iB_2$$

vorkommenden beiden reellen Größen so bestimmen, daß zu den vier Drehungen  $A, B, \Gamma$  und  $\Delta$  ein Orthogonalkreis existiert. Es müssen dazu entsprechend (12) und (24) die Gleichungen erfüllt sein:

$$(47) \quad \Re(i \operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_1)) = 0.$$

$$(48) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \Re(i \operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i)) = 0.$$

Neben (47) ist daher jedenfalls als notwendige Bedingungsgleichung  $\Re(i \operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i)) = 0$ . Ebenso erhält man aus (37) als eine notwendige Bedingungsgleichung:

$$(49) \quad \Re\left(\frac{-\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_1) - \operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_1)^2}{|\sqrt{B}|^2} - \frac{\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i) \operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_2 i)^2}{|\sqrt{B}|^2}\right) = 0.$$

Diskutieren wir zunächst (49). Aus (47) folgt, daß  $\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_1)$  reell ist, also ist:

$$\Re(-\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i) \operatorname{ctg}(\sqrt{B}\omega_2 i)^2) = \pm 1.$$

Daher ist  $\Re\left(\frac{-\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i)}{|\operatorname{tg}(\sqrt{B}\omega_2 i)|^2}\right) = \pm 1$ , d. h. es ist  $\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i)$  reell und positiv oder negativ, je nachdem  $\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_1)$  positiv oder negativ ist. Daraus folgt aber dann auch umgekehrt, daß die drei Achsen  $a'a'', b'b''$  und  $c'c''$  sich in einem Punkte schneiden; denn wenn die Geraden  $a'a''$  und  $c'c''$  die Gerade  $b'b''$  schneiden, wie es ja jetzt der Fall ist, geht (37) in die Orthogonalitätsbedingung (I, 14) über. Wir haben daher:

Satz 2. *Damit der zu der Differentialgleichung (12) gehörige Kern einen Orthogonalkreis besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß  $\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_1)$  und  $\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_2 i)$  beide reell und gleichzeitig positiv oder negativ sind.*

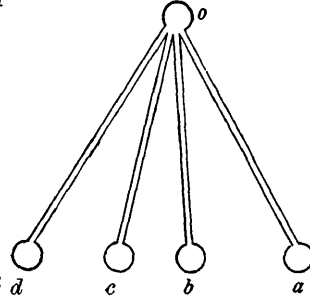


Fig. 1.

Um nun die Gesamtheit der Werte  $z$  zu bestimmen, für welche  $\operatorname{tg}^2 z$  reell ist, skizzieren wir am besten die durch

$$(50) \quad Z = X + iY = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy)$$

vermittelte konforme Abbildung, die wir auch später brauchen. Da

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{tg}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} z}$$

ist, so folgt, daß die ganze  $Z$ -Ebene das Bild eines von  $x=0$  und  $x=\pi$  eingeschlossenen Streifens ist, und daß die Werte von  $\operatorname{tg}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$  aus denen von  $\operatorname{tg} z$  durch Spiegelung am Einheitskreise und an der imaginären Achse, hervorgehen.

Geht nun  $z$  von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$ , so geht  $Z$  von 0 bis  $\infty$ , geht  $z$  von  $\frac{\pi}{2}$  bis  $\pi$ , so geht  $Z$  von  $-\infty$  nach 0. Allgemein entsprechen den Linien:

$$y = \pm g$$

Kreise der Kreisschar:

$$\frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2} = \frac{\operatorname{tg}(2gi)}{i},$$

den Geraden  $x = h \pm k\pi$  Kreise der zu der vorigen orthogonalen Kreisschar:

$$\frac{2X}{1 - (X^2 + Y^2)} = \operatorname{tg} 2h.$$

Die Kreise der zweiten Schar gehen alle durch  $Z = \pm i$ . Durchläuft  $z$  die Werte  $yi$  von 0 bis  $+\infty i$  bzw. bis  $-\infty i$ , so geht  $Z$  von 0 bis  $+i$  bzw. bis  $-i$ ; durchläuft  $z$  die Werte  $\frac{\pi}{2} + yi$  von  $y=0$  bis  $y = \pm \infty$ , so durchläuft  $Z$  die rein imaginären Werte von  $\infty i$  bis  $+i$  bzw. von  $-\infty i$  bis  $-i$ .

Diese Angaben orientieren uns völlig über die wechselseitige Zuordnung von  $z$  und  $Z$ . Speziell entnehmen wir daraus daß  $Z$  nur dann reell ist, wenn  $z$  reell ist, daß  $Z$  dann und nur dann rein imaginär ist, wenn

$$z = \frac{k\pi}{2} + \psi i \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wir setzen jetzt:

$$(51) \quad \sqrt{B} = \beta_1 + i\beta_2; \quad B = \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 i = B_1 + B_2 i.$$

Dann muß also  $(\beta_1 + i\beta_2)\omega_1$  entweder reell oder von der Form  $\frac{k_1\pi}{2} + y_1 i$  sein, ebenso muß  $(\beta_1 + i\beta_2)\omega_2 i$  entweder reell sein oder die Form  $\frac{k_2\pi}{2} + y_2 i$  besitzen. Und zwar müssen die beiden Ausdrücke gleichzeitig die erste oder gleichzeitig die zweite Form besitzen. Wenn nun beide Ausdrücke reell sein sollen, so muß gleichzeitig  $\beta_2 = 0$  und  $\beta_1 = 0$  sein, also:

$$(52) \quad B = 0$$

sein. Allgemein folgt aus der Gleichung:

$$\omega_1(\beta_1 + i\beta_2) = \frac{k_1\pi}{2} + y_1 i$$

$$B_1 = \frac{k_1^2\pi^2}{4\omega_1^2} - \frac{y_1^2}{\omega_1^2}, \quad B_2 = \frac{k_1\pi y_1}{\omega_1^2},$$

also:

$$(53) \quad B_1 + \left(\frac{B_2\omega_1}{k_1\pi}\right)^2 = \left(\frac{k_1\pi}{2\omega_1}\right)^2 \quad \text{für } k_1 = \pm 1, 2, \dots,$$

und entsprechend  $k_1 = 0$

$$(54) \quad B_2 = 0,$$

da  $\beta_1 = 0$ .

Ebenso folgt aus:

$$\omega_2 i(\beta_1 + i\beta_2) = \frac{k_2\pi}{2} + y_2 i$$

$$B_1 = \frac{y_2^2}{\omega_2^2} - \frac{k_2^2\pi^2}{4\omega_2^2}, \quad B_2 = -\frac{2y_2 k_2\pi}{2\omega_2^2},$$

also:

$$(55) \quad B_1 - \left(\frac{B_2\omega_2}{k_2\pi}\right)^2 = -\frac{k_2^2\pi^2}{4\omega_2^2},$$

und für  $k = 0$

$$(56) \quad B_2 = 0,$$

da  $\beta_2 = 0$  ist.

Sind (56) und (54) gleichzeitig erfüllt, so kommen wir wieder auf  $B = 0$ . Die Werte  $B_1$  und  $B_2$ , für welche (47) erfüllt ist, werden also durch die Punkte der Gerade  $B_2 = 0$  und die Punkte des Parabelbüschels (53) dargestellt. Die Punkte, für welche auch gleichzeitig (49) erfüllt ist, werden auf der Geraden  $B_2 = 0$  und dem Parabelbüschel (53) durch das Parabelbüschel (55) ausgeschnitten, dazu kommen noch die von  $B_2 = 0$  auf dem Büschel (53) ausgeschnittenen Punkte. Für alle Schnittpunkte läßt sich  $B$  in der Form

$$(57) \quad B = \left(\frac{k_1\pi}{2\omega_1} + \frac{ik_2\pi}{2\omega_2}\right)^2$$

darstellen, wo  $k_1$  und  $k_2$  irgendwelche positive oder negative ganze Zahlen sind, die auch verschwinden können. Wir haben also in Ergänzung zu Satz 2:

*Satz 3. Der zu der Differentialgleichung (12) gehörige Kern besitzt dann und nur dann einen Orthogonalkreis, wenn der akzessorische Parameter  $B = \left(\frac{k_1\pi}{2\omega_1} + \frac{ik_2\pi}{2\omega_2}\right)^2$  ist, wobei  $k_1$  irgendeine ganze positive Zahl oder 0 ist,  $k_2$  irgendeine ganze positive oder negative Zahl oder 0 ist.*

Während wir also in I nur die beiden Scharen von Parameterwerten  $B = \left(\frac{k_1\pi}{2\omega_1}\right)^2$  und  $\left(\frac{k_2\pi i}{2\omega_2}\right)^2$  gefunden hatten, stoßen wir jetzt auf  $\infty^2$  Ober-

theoreme, so daß sich an jedes der Obertheoreme von I einfach unendlich viele neue Obertheoreme anschließen. Dieses läßt uns erwarten, daß wir neben der in I eingeführten Oszillationszahl, welche wir durch die Zahl der Schnitte einer Seite mit dem Orthogonalkreis einführen, noch eine neue Oszillationszahl zur Verfügung haben, sobald  $B$  auch in den in I behandelten Fällen komplexe Werte annehmen darf. Dabei ist aber zunächst zu bemerken, daß wir von jetzt ab nicht mehr die Schnitte einer Begrenzungslinie mit dem Orthogonalkreise als Oszillationszahl annehmen dürfen, da die Begrenzungskurven bei komplexen Parametern im allgemeinen nicht mehr Kreise sind und die Zahl ihrer Schnitte mit dem Orthogonalkreise durch erlaubte Abänderung des Systems der Schnittlinien in der  $x$ -Ebene beliebig modifiziert werden kann.

Unser Beispiel wird uns aber gerade über den Charakter der Obertheoreme aufklären.

Zu diesem Zwecke denken wir uns wieder die  $x$ -Ebene zunächst längs der Achse des Reellen von  $a$  über  $b$  bis  $d$  aufgeschnitten, so daß wir in der  $t$ -Ebene ein Rechteck mit den Seiten  $2\omega_1$  und  $\omega_2 i$  als Fundamentalbereich haben, und diesen Fundamentalbereich bilden wir durch:

$$\eta = \operatorname{tg} \left( \frac{k_1 \pi}{2 \omega_1} + \frac{i k_2 \pi}{2 \omega_2} \right) t$$

auf die  $\eta$ -Kugel ab. Geht nun  $t$  auf der Achse des Reellen von 0 bis  $\omega_1$ , so beschreibt die Größe:

$$(58) \quad \tau = \left( \frac{k_1 \pi}{2 \omega_1} + \frac{i k_2 \pi}{2 \omega_2} \right) t$$

in der komplexen  $\tau$ -Ebene eine Gerade, welche dort durch den Koordinatenanfangspunkt geht, und zwar bewegt sich, wenn wir ein für allemal  $k_1$  als positiv voraussetzen, bei wachsendem  $t$  die Größe  $\tau$  so, daß ihr reeller Teil wächst. Ist dann  $t = \frac{\omega_1}{k_1}$ , so liegt der entsprechende Punkt  $\eta$  auf dem Kreise der rein imaginären Zahlen und zwar zwischen  $+i$  und  $+\infty i$ , wenn  $k_2$  positiv ist, zwischen  $-i$  und  $-\infty i$ , wenn  $k_2$  negativ ist; für  $t = \frac{2\omega_1}{k_1}$  liegt  $\eta$  auf demselben Kreise zwischen 0 und  $+i$  bzw. zwischen 0 und  $-i$ ; rückt daher  $t$  von 0 bis  $\omega_1$ , so windet sich  $\eta$  von 0 ausgehend spiralförmig nach innen, d. h. gegen  $+i$  bzw.  $-i$  rückend durch  $\left[ \frac{k_1}{2} \right]$  Blätter derjenigen Riemannschen Fläche, auf welche die  $t$ -Ebene durch  $\operatorname{tg} \tau$  abgebildet wird.  $\left[ \frac{k_1}{2} \right]$  bedeutet dabei die größte ganze in  $\frac{k_1}{2}$  enthaltene Zahl. Sobald nun  $k_1$  und  $k_2$  von 0 verschieden sind, ist der Orthogonalkreis reell und geht durch die Punkte  $+i$  und  $-i$ , das sind aber gerade die Windungspunkte der Riemannschen Fläche. Wir wollen nun eben die Zahl der Blätter, die zwischen  $b'$  und  $a'$  liegen, zur

Definition der Oszillationszahl wählen. Wir denken uns dabei die Blätter übereinander gelegen, dann zählen wir den Übergang zu einem höher gelegenen Blatte als positiv, den zu einem niedriger gelegenen Blatte als negativ. Zwei Gerade, von denen die eine so in die andere übergeführt werden kann, daß sie, ohne daß dabei ein Endpunkt auf den Orthogonalkreis fällt, derart zur Deckung kommen, daß die eingestrichenen Endpunkte zusammenfallen, wollen wir als im gleichen Blatte gelegen bezeichnen.

Zwei Achsen, deren eingestrichene Endpunkte auf derselben Seite des Orthogonalkreises liegen, die aber selbst in zwei aufeinanderfolgenden Blättern liegen, sind dann solche Gerade, welche die Eigenschaft haben, daß die eine derselben in diejenige Gerade, welche geometrisch mit der anderen Achse zusammenfällt, aber im nächsten Blatte liegt, übergeführt werden kann, ohne daß beim Übergang ein Endpunkt auf den Orthogonalkreis fällt. Wir wollen dann, wenn zunächst  $a'$  und  $b'$  auf derselben Seite des Orthogonalkreises liegen, die doppelte Zahl der zwischen  $b'b''$  und  $a'a''$  liegenden im obigen Sinne gezählten Blätter als *charakteristische Oszillationszahl* des Intervalles  $ba$  einführen, wobei aber im allgemeinen bei den anderen Achsen auch das Vorzeichen zu berücksichtigen ist; wir wollen durch Definition festlegen, daß die zu  $ba$  gehörige Oszillationszahl stets positiv ist.

Fällt  $a'$  auf dieselbe Seite wie  $b''$ , so wollen wir folgende Festsetzung treffen. Wenn  $b'b''$  mit  $a''a'$  zusammenfällt, erteilen wir dem Intervalle  $ba$  die charakteristische Oszillationszahl  $+1$  und von hieraus zählen wir analog wie vorher um  $\pm 2$  weiter. Diese Definition der charakteristischen Oszillationszahl des Intervalles  $ba$  bleibt nun erhalten, wenn wir statt der speziellen Zerschneidung die allgemeinere Zerschneidung der Fig. 1 wählen. \*)

Wir lassen jetzt  $t$  von 0 nach  $\omega_2 i$  gehen. Wir setzen dann:

$$(59) \quad \tau = \left( \frac{-k_2 \pi}{2 \omega_2} + \frac{k_1 \pi}{2 \omega_1} i \right) t_1,$$

wobei  $t_1$  von 0 bis  $\omega_2$  geht. Es sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $k_2$  positiv oder negativ ist,  $k_1$  ist nach wie vor als positiv festgelegt.

Ist  $k_2$  positiv, so geht  $\tau$  von  $\tau = 0$  in dem Sinne, daß der reelle Teil immer stärker negativ wird, wenn  $t_1$  von 0 nach  $\omega_1$  geht.  $\eta$  beschreibt dann eine Kurve, welche sich durch die *unterhalb* des Ausgangsblattes gelegenen Blätter hindurchzieht, während die  $ba$  entsprechende Kurve sich durch die oberhalb gelegenen Blätter hindurchzog. Es ist also die zu dem Intervall  $bc$  gehörige charakteristische Oszillationszahl  $-k_2$ .

\*) Vergl. auch die Anmerkung S. 48.

Ist  $k_2$  dagegen eine negative Zahl, so windet sich die Kurve durch die Blätter *oberhalb* des Ausgangsblattes. Die dazugehörige charakteristische Oszillationszahl ist also wieder  $-k_2$ .

Wir haben daher in Ergänzung zu Satz 3:

**Satz 4.** *Man kann in der Differentialgleichung (38) den komplexen Parameter  $B$  auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen, daß der dazugehörige Kern einen Orthogonalkreis besitzt, daß ferner zu dem Intervalle  $ba$  eine positive ganzzahlige vorgegebene charakteristische Oszillationszahl und zu dem Intervalle  $bc$  eine positive oder negative ganzzahlige vorgegebene charakteristische Oszillationszahl gehört.*

Es erübrigt uns noch, der Vollständigkeit halber, die Beschreibung des Fundamentalbereiches in der  $\eta$ -Ebene zu Ende zu führen. Wir lassen daher  $t$  von  $\omega_2 i$  nach  $\omega_2 i + 2\omega_1$  gehen, wofür:

$$(60) \quad \eta = \operatorname{tg} \left[ \left( k_1 - \frac{k_2}{2} \right) \pi + i\pi \left( \frac{k_2 \omega_1}{\omega_2} + \frac{k_1 \omega_2}{2\omega_1} \right) \right]$$

wird. Die Kurve zieht sich daher von  $c'$  um  $k_1$  Blätter hinauf. Geht dann  $t$  von  $\omega_2 i + 2\omega_1$  nach  $2\omega_1$ , so kommen wir zu demselben Punkte, wie wenn wir  $t$  von 0 auf der Achse des Reellen bis  $2\omega_1$  wachsen ließen, also kommen wir in das  $k_1$ te Blatt über dem Ausgangsblatte, die Kurve  $d'a'$  windet sich also um  $\left[ \frac{k_2}{2} \right]$  Blätter hinauf oder hinab, je nachdem  $k_2$  positiv oder negativ ist. Die zum Intervalle  $dc$  gehörige charakteristische Oszillationszahl ist also gleich der zum Intervalle  $ab$  gehörigen, die zum Intervalle  $ad$  gehörige Oszillationszahl ist gleich der zum Intervalle  $ba$  gehörigen.

### § 3.

#### Integration der Differentialgleichung (1) bei sehr großen Parameterwerten. Allgemeine Betrachtungen über die charakteristischen Oszillationszahlen.

Wir gehen also jetzt wieder zu der Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)} y = 0$$

über, in der jetzt  $a, b, c$  und  $d$  irgendwelche komplexe Zahlen sein mögen. Wir untersuchen dann das Verhalten der Lösungen, wenn  $|B|$  sehr groß ist. Es sei:

$$(61) \quad dt = \frac{dx}{(x-a)^{1-\alpha}(x-b)^{1-\beta}(x-c)^{1-\gamma}},$$

dann erhalten wir:

$$(62) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + (x-a)^{1-2\alpha}(x-b)^{1-2\beta}(x-c)^{1-2\gamma}(Ax+B)y = 0.$$

Um den Faktor von  $By$  zu entfernen, setzen wir:

$$(63) \quad dz = \frac{dx \sqrt{(x-a)^{1-2\alpha}(x-b)^{1-2\beta}(x-c)^{1-2\gamma}}}{(x-a)^{1-\alpha}(x-b)^{1-\beta}(x-c)^{1-\gamma}} = \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

$$(64) \quad Y = y \sqrt[4]{(x-a)^{1-2\alpha}(x-b)^{1-2\beta}(x-c)^{1-2\gamma}}.$$

Dann erhält man:

$$(65) \quad \frac{d^2 Y}{dz^2} + BY + NY = 0,$$

wobei:

$$(66) \quad N = Ax + \frac{1}{\left(\frac{d^2}{dz^2} \sqrt[4]{(x-a)^{1-2\alpha}(x-b)^{1-2\beta}(x-c)^{1-2\gamma}}\right)} \cdot \frac{1}{((x-a)^{1-2\alpha}(x-b)^{1-2\beta}(x-c)^{1-2\gamma})^{\frac{3}{4}}}.$$

Es sei:

$$(67) \quad B = r^2 e^{\varphi i}.$$

Wir legen dann durch irgendeinen Punkt  $z_0$  die Gerade:

$$(68) \quad z - z_0 = \varrho e^{-\frac{i\varphi}{2}},$$

wobei  $z_0$  im ersten Fundamentalbereiche liegt, auf welchen die zerschnittene  $x$ -Ebene durch  $z$  abgebildet wird, und so gewählt sein mag, daß die Gerade (68) durch keinen der Unendlichkeitspunkte von  $N$ , also durch keinen Bildpunkt, der  $a, b, c$  oder  $d$  entspricht, geht, und daß innerhalb einer vorgegebenen Anzahl von Fundamentalbereichen der Abstand der zu diesen gehörigen Bildpunkte der Punkte  $a, b, c, d$  von dieser Geraden oberhalb einer festen Grenze bleibt.

Dann können wir nach einer von Liouville\*) herrührenden Methode die Differentialgleichung (1) längs (68) asymptotisch integrieren. Wir zerlegen dazu die Integration von (65) in die Integration von:

$$(69) \quad \frac{d^2 Y}{d\varrho^2} + r^2 Y = 0$$

und

$$(70) \quad \frac{d^2 Y}{d\varrho^2} + r^2 Y = \varphi(\varrho) = -NYe^{-i\varphi}.$$

Seien nun  $Y_1$  und  $Y_2$  zwei Integrale von (69), so daß

$$(71) \quad Y_1 \frac{dY_2}{d\varrho} - Y_2 \frac{dY_1}{d\varrho} = -C,$$

dann ist das allgemeine Integral von (70):

$$(72) \quad Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \frac{1}{C} \int_0^{\varrho} (Y_1(\varrho) Y_2(\varrho_1) - Y_1(\varrho_1) Y_2(\varrho)) \varphi(\varrho_1) d\varrho_1.$$

\*) Journal de Liouville, Bd. 2, S. 119.

Setzen wir nun  $Y_1 = \sin(r\varrho)$ ,  $Y_2 = \cos(r\varrho)$ , dann ist:

$$(73) \quad Y(\varrho) = C_1 \sin(r\varrho) + C_2 \cos(r\varrho) - \frac{1}{r} \int_0^{\varrho} \sin(r(\varrho - \varrho_1)) \varphi(\varrho_1) d\varrho_1.$$

Es sei dann  $M$  das Maximum des absoluten Betrages von  $Y$  in dem Intervalle 0 bis  $\varrho$ ,  $M_0$  dasjenige von  $|C_1 \sin(r\varrho) + C_2 \cos(r\varrho)|$ ,  $M_1$  dasjenige von  $|N|$ , dann folgt aus (73):

$$M < M_0 + \frac{1}{r} M M_1 \varrho,$$

also ist:

$$(74) \quad M < \frac{M_0}{1 - \frac{\varrho}{r} M_1}.$$

Wir betrachten jetzt speziell die beiden Fälle  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$  und  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ , also:

$$(75a) \quad Y^I(\varrho) = \sin(r\varrho) + \frac{1}{r e^{i\varphi}} \int_0^{\varrho} \sin(r(\varrho - \varrho_1)) N(\varrho_1 e^{i\varphi}) Y^I(\varrho_1) d\varrho_1,$$

$$(75b) \quad Y^{II}(\varrho) = \cos(r\varrho) + \frac{1}{r e^{i\varphi}} \int_0^{\varrho} \sin(r(\varrho - \varrho_1)) N(\varrho_1 e^{i\varphi}) Y^{II}(\varrho_1) d\varrho_1.$$

Setzen wir  $\frac{Y^I(\varrho e^{-\varphi i})}{Y^{II}(\varrho e^{-\varphi i})} = \eta$ , so entspricht, wenn  $r$  eine genügend große Zahl übersteigt, einem vorgegebenen Stücke der Geraden (68) eine Kurve auf der Kugel, welche sich immer in der Umgebung des Kreises der reellen Zahlen öfter als eine beliebig groß vorgegebene Anzahl mal herumwindet.

Wir legen dann durch  $z_0$  eine Gerade, welche auf der Geraden (68) senkrecht steht, und deren Abstand von den Unendlichkeitspunkten innerhalb der vorgegebenen Anzahl von Fundamentalbereichen oberhalb einer festen Grenze liegt. Wir behandeln diesen Fall analog wie den eben erledigten. Wir setzen:

$$(76) \quad z - z_0 = \bar{\varrho} i e^{-\frac{i\varphi}{2}}$$

und erhalten:

$$(76a) \quad Y^I = \frac{e^{-r\bar{\varrho}} - e^{r\bar{\varrho}}}{2i} - \frac{i}{r e^{i\varphi}} \int_0^{\bar{\varrho}} \frac{e^{(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}_1)r} - e^{-(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}_1)r}}{2} N\left(e^{-\frac{\varphi}{2} i \varrho_1}\right) Y^I(\bar{\varrho}_1 i) d\bar{\varrho}_1,$$

$$(76b) \quad Y^{II} = \frac{e^{-r\bar{\varrho}} + e^{r\bar{\varrho}}}{2} - \frac{i}{r e^{i\varphi}} \int_0^{\bar{\varrho}} \frac{e^{(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}_1)r} - e^{-(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}_1)r}}{2} N\left(e^{-\frac{\varphi}{2} i \varrho_1}\right) Y^{II}(\bar{\varrho}_1 i) d\bar{\varrho}_1.$$



Setzen wir beidemale  $e^{r\bar{\eta}}$  als Faktor heraus, so finden wir wie oben, daß die Integrale nach Division durch  $e^{r\bar{\eta}}$  unterhalb einer bestimmten Grenze bleiben. Bewegen wir daher  $z$  auf der Senkrechten in der Richtung der wachsenden  $\bar{\eta}$  um ein gegebenes Stück, so rückt der entsprechende Wert von  $\eta$ , wenn  $r$  groß genug ist, beliebig nahe an  $i$ , bewegen wir  $\eta$  in entgegengesetzter Richtung, so rückt  $\eta$  beliebig nahe an  $-i$ .

Errichten wir jetzt in irgend einem anderen Punkte  $z_1$  der Geraden, für den  $\varrho = \sigma$  sei, das Lot, so können wir ganz analoge Formeln zu (76a) und (76b) aufstellen. Es ist nämlich nach (75a):

$$(77a) \quad \frac{dY^I}{dz} = r \left[ \cos(r\varrho) + \frac{1}{re^{i\varphi}} \int_0^{\varrho} \cos r(\varrho - \varrho_1) N(\varrho_1 e^{i\varphi}) Y^I(\varrho_1) d\varrho_1 \right] e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

$$(77b) \quad \frac{dY^{II}}{dz} = r \left[ -\sin(r\varrho) + \frac{1}{re^{i\varphi}} \int_0^{\varrho} \cos r(\varrho - \varrho_1) N(\varrho_1 e^{i\varphi}) Y^{II}(\varrho_1) d\varrho_1 \right] e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Also ist:

$$Y^I(\sigma) = \sin(r\sigma) + \frac{1}{r} J_1, \quad Y^{II}(\sigma) = \cos(r\sigma) + \frac{1}{r} J_2,$$

$$\left( \frac{dY^I}{dz} \right)_{\varrho=\sigma} = r \left[ \cos(r\sigma) + \frac{1}{r} J_3 \right] e^{\frac{i\varphi}{2}}, \quad \left( \frac{dY^{II}}{dz} \right) = r \left[ -\sin(r\sigma) + \frac{1}{r} J_4 \right] e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

wobei  $J_1, J_2, J_3, J_4$  Größen sind, deren absoluter Betrag unterhalb einer festen Grenze liegt. Wir haben also längs der Senkrechten:

$$(78) \quad z - z_1 = \bar{\eta} i e^{-\frac{i\varphi}{2}},$$

welche in bezug auf die Unendlichkeitsstellen denselben Charakter haben soll wie die Geraden (68) und (76)

$$(78a) \quad Y^I = \frac{\left[ -e^{-r\sigma i} + \frac{1}{r} (J_1 i - J_3) \right] e^{r\bar{\eta}} + \left[ e^{+r\sigma i} + \frac{1}{r} (J_1 i + J_3) \right] e^{-r\bar{\eta}}}{2i} - \frac{i}{re^{i\varphi}} \int_0^{\bar{\eta}} \frac{e^{(\bar{\eta}-\bar{\eta}_1)r} - e^{-(\bar{\eta}-\bar{\eta}_1)r}}{2} N\left(e^{-\frac{\varphi i}{2}} i \bar{\eta}_1\right) Y^I(\bar{\eta}_1 i) d\bar{\eta}_1,$$

$$(78b) \quad Y^{II} = \frac{\left[ e^{-r\sigma i} + \frac{1}{r} (J_2 + iJ_4) \right] e^{r\bar{\eta}} + \left[ e^{+r\sigma i} + \frac{1}{r} (J_2 - iJ_4) \right] e^{-r\bar{\eta}}}{2} - \frac{i}{re^{i\varphi}} \int_0^{\bar{\eta}} \frac{e^{(\bar{\eta}-\bar{\eta}_1)r} - e^{-(\bar{\eta}-\bar{\eta}_1)r}}{2} N\left(e^{-\frac{\varphi i}{2}} i \bar{\eta}_1\right) Y^{II}(\bar{\eta}_1 i) d\bar{\eta}_1,$$

Daraus folgt, daß, wenn wir nur  $r$  groß genug wählen,  $\eta$  beliebig

nahe an  $i$  heranrückt, wenn sich  $z$  auf der Geraden (78) im Sinne der wachsenden  $\bar{\varrho}$  um ein gegebenes Stück verschiebt, ferner daß  $\eta$  beliebig nahe an  $-i$  heranrückt, wenn sich  $\eta$  auf der Geraden in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Wenn also  $r$  genügend groß ist, bedeckt der Fundamentalbereich die  $\eta$ -Kugel mit Ausnahme der Umgebung von  $+i$  und  $-i$  beliebig oft, da wir dann auf jeden Punkt  $z_1$  der Geraden (68), der innerhalb einer endlichen vorgegebenen Anzahl von Fundamentalbereichen liegt, denselben Schluß aufbauen können, wenn wir nur eine endliche, ebenfalls unter einer angebbaren Grenze liegende Anzahl von Punkten durch beliebig kleine Intervalle ausschneiden. Ferner ergibt sich aus dem Gesagten, daß die zum Ausgangsfundamentalbereich benachbarten Bereiche sich immer mehr an  $+i$  bzw.  $-i$  heranschieben, so daß also folgt, daß der Fundamentalbereich sich beliebig oft bei wachsendem  $r$  über den Orthogonalkreis hinüberzieht. Dieses würde nämlich nur dann nicht eintreten, wenn der Orthogonalkreis mit wachsendem  $r$  immer kleiner werdend um  $+i$  oder  $-i$  allein sich herumziehen würde. Dieses ist aber nicht möglich, da dann die Bereiche, die sich immer mehr an  $+i$  heranziehen, nicht in die Bereiche, die sich an  $-i$  heranziehen, durch eine Substitution übergeführt werden könnten, die einen solchen Orthogonalkreis in sich überführt.

Wir wollen nun zeigen, daß nie zwei zu verschiedenen charakteristischen Oszillationszahlen gehörige Fundamentalbereiche zusammenfallen können, wenn wir, vom Spezialfalle ausgehend, die in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter derart stetig ändern, daß der dazugehörige Kern stets einen reellen Orthogonalkreis besitzt, auf den weder  $a'$ , noch  $b'$ , noch  $c'$ , noch  $d'$  fallen können, da wir parabolische Substitutionen ausschließen.\*) Wir denken uns dabei die  $x$ -Ebene durch gerade Linien zwischen den singulären Punkten aufgeschnitten und die singulären Punkte nur so verschoben, daß nie ein singulärer Punkt mit einem anderen singulären Punkte zusammenfällt, und daß die singulären Punkte nur Endpunkte der Schnittlinien sein können. In dem im vorigen Paragraphen behandelten Spezialfall hatte sich nun der Fundamentalbereich bandförmig auf der Kugel hingezogen. Eine charakteristische Oszillationszahl könnte nun nur dadurch sich ändern, daß eine Seite des Bandes in einem Blatte ganz auf die eine Seite des Orthogonalkreises sich zusammenzieht, während es früher diesen zum mindesten zweimal schnitt; damit aber dieses eintreten kann, muß bei der

---

\*) Nach einer nachträglichen mündlichen Mitteilung von Herrn Klein läßt sich die charakteristische Oszillationszahl z. B. des Intervalles  $ab$  als diejenige ganze Zahl definieren, welche um  $2\alpha$  vermehrt die Amplitude derjenigen Drehung gibt, welche  $b'$  erfährt, wenn  $x$  von  $b$  ausgehend nach einem einfachen Umlauf um  $a$  nach  $b$  zurückkehrt. Durch diese Definition wird unsere Behauptung evident.

stetigen Abänderung ein Moment eintreten, in welchem die Seite gerade den Orthogonalkreis berührt, sonst aber in dem ganzen Blatte auf der einen Seite des Orthogonalkreises liegt; diesen kritischen Moment wollen wir fixieren. Vor Eintreffen desselben lag die betreffende Kurve noch zum Teile auf der anderen Seite des Orthogonalkreises, und es lagerten sich daran nach innen neue Fundamentalbänder, deren Randkurven in dem betreffenden Blatte auch noch zum Teile unterhalb des Orthogonalkreises lagen, da ja ein kritischer Moment noch nicht eingetreten sein soll. Beim Eintreten des kritischen Momentes würden dann die Kurven sich berühren müssen. Ein solcher Berührungspunkt auf dem Orthogonalkreis, welcher mehreren Fundamentalbereichen angehört und in demselben Blatte liegt, ist aber bei unserer Zerschneidung unmöglich, da die Punkte  $a', b', c', d'$  nicht auf dem Orthogonalkreis liegen. Wir haben daher:

*Satz 5: Ändert man die Parameter der Differentialgleichung (1), d. h. die singulären Stellen, die Exponenten (innerhalb der erlaubten Grenzen) und den akzessorischen Parameter von einem Falle des Satzes 4 ausgehend derart ab, daß der Kern stets einen regulären Orthogonalkreis besitzt, und daß jeder singuläre Punkt stets nur Endpunkt der dieselben in ganz bestimmter Reihenfolge verbindenden geraden Linien ist und mit keinem anderen zusammenfällt, so ändern sich die charakteristischen Oszillationszahlen nicht, und der absolute Betrag des akzessorischen Parameters bleibt unterhalb einer endlichen Grenze.*

#### § 4.

#### Behandlung des allgemeinen Falles bei vier komplexen singulären Stellen.

Wir steigen nun von dem im § 2 behandelten Falle aus allmählich zu dem allgemeinen Falle auf, der neben der Einschränkung, daß die Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  kleiner sind als 1, nur mehr die hat, daß die Größen  $A_a, A_b, A_c$  und  $A_d$  wesentlich positiv sind. Wir wollen dabei zunächst nur diejenigen Obertheoreme behandeln, welche sich nicht an die in I untersuchten anschließen.

Wir betrachten die in § 2 aus (12) gewonnene Kurvenschar (53) in der Ebene mit den Koordinatenachsen  $B_1$  und  $B_2$ . Man sieht nun zunächst, daß die linke Seite von (12), also  $\Re\left(\frac{1}{i} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$ , beim Überschreiten der Kurven jedesmal ihr Zeichen wechselt. Wir betrachten dann auf denjenigen Kurven (53), für welche  $k_1$  positiv und von 0 verschieden ist, das Vorzeichen des Ausdruckes  $\frac{1}{\sin(\vartheta)} \Re\left(\frac{1}{i} \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)$ , also der linken Seite von

(24). Dieser Ausdruck verschwindet, so oft  $B$  einen Wert von (57) hat, und zwar von erster Ordnung. Da nun in diesen Fällen immer ein Orthogonalkreis existiert, so kann dabei nicht  $\sin \vartheta$  verschwinden, es sei denn  $k_2 = 0$ , in welchem Falle die Substitutionen  $A$  und  $B$  dieselben Achsen besitzen und  $E$  die identische Substitution ist. Daher haben wir diese Fälle am Anfange dieses Paragraphen zunächst ausgeschlossen.

Wir ändern nun die Exponentendifferenzen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  und die singulären Stellen stetig ab, dann wollen wir durch Zählen der Vorzeichenwechsel der linken Seite von (24) auf den Kurven (12) zeigen, daß stets eine ungerade Anzahl und also sicher ein Punkt vorhanden ist, für den (12) und (24) verschwinden und die Intervalle zu den vorgegebenen charakteristischen Oszillationszahlen gehören. Bezeichnen wir zwei solche Schnittpunkte der Kurven (12) und (24), welche dieselben charakteristischen Oszillationszahlen haben, als zum gleichen Typus gehörig, so können nie zwei Schnittpunkte der Kurvenscharen (12) und (24), die zu verschiedenem Typus gehören, zusammenfallen, dagegen kann stets eine gerade Anzahl von Verschwindungspunkten, die zu demselben Typus von (24) und (12) gehören, entstehen oder auch wieder verschwinden. Wenn nun, was bei der Abänderung eintreten kann, ein Kurvenzweig von (12) aus dem Unendlichen hereinwächst, so wird er nach Satz 5 zunächst keinen zu den festen charakteristischen Oszillationszahlen  $k_1$  und  $k_2$  gehörigen Schnittpunkt von (24) aufweisen können, also wenn er später überhaupt welche hat, wird er sie nur in gerader Anzahl besitzen. Dabei bleibt also die Zahl der zu zwei für die beiden Intervalle vorgegebenen charakteristischen Oszillationszahlen gehörigen Schnittpunkte ungerade. Es wird nun auf einem der Zweige von (12) nie eine im Endlichen geschlossene Kurve entstehen können, welche eine ungerade Zahl von Schnittpunkten, die zu demselben Typus gehören, enthält und keinen anderen Schnittpunkt trägt, da man beim Durchlaufen derselben zu demselben Vorzeichen der linken Seite von (24) kommen muß. Nun sind die zu festen charakteristischen Oszillationszahlen gehörigen  $B_1$  und  $B_2$  stets unterhalb einer festen Grenze gelegen, es können daher die zu demselben Typus gehörigen Oszillationszahlen nicht in unendlicher Anzahl vorhanden sein, es sei denn, daß ein Kurvenzug von (12) mit einem solchen von (24) zusammenfällt. Auf einem solchen Kurvenzuge können aber nur solche Punkte liegen, die zu demselben Typus gehören, also muß er ganz im Endlichen liegen und geschlossen sein; ob nun dieser Zweig wegfällt, oder nicht, die Zahl der übrigen zum Typus gehörigen Schnittpunkte ist stets ungerade und kann also nie 0 werden. Es bleibt daher, was auch sonst eintreten mag, stets für jeden Typus ein Wertepaar  $B_1$  und  $B_2$  vorhanden, wie wir

auch innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen die Exponentendifferenzen abändern, wenn wir jedesmal den Fall, daß zwei Exponentendifferenzen einander gleich werden, nur als Grenzfall zulassen, da ja nur dabei  $E$  die identische Substitution werden kann.

Um nun auch das Grundtheorem und die an I sich anschließenden Obertheoreme zu behandeln, bezeichnen wir, allenfalls unter Abänderung der Bezeichnung, mit  $a\ b$  bez.  $c\ d$  je ein zu der charakteristischen Oszillationszahl 0 gehöriges Intervall und gehen wieder von dem Spezialfalle des § 2 aus, in dem auch  $a, b, c$  reell sein sollen, während  $d$  im Unendlichen liege. Wir setzen jetzt, abweichend von früher,  $t_a = 0$ ,  $t_b = \omega_1$ ,  $t_c = \omega_1 + i\omega_2$  und bringen  $a'$  nach 0,  $a''$  nach  $\infty$ . Um nicht neue Indizes einführen zu müssen, bezeichnen wir auch nach der Transformation den Wert von  $\eta$  in  $b', b'', c', c''$  mit  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$  und nehmen dann als Orthogonalitätsbedingung:

$$(79) \quad \Re \left( i \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = 0,$$

$$(80) \quad \frac{1}{\sin(\vartheta)} \Re \left( i \frac{\nu_1}{\nu_2} \right) = 0,$$

wobei  $\vartheta$  der Winkel ist, den die Achse  $c'c''$  mit der von  $a'a''$  und  $e'e''$  bez.  $E'E''$  unter Voraussetzung von (79) gebildeten Ebene einschließt. Es ist dabei im Spezialfalle:

$$(81) \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = -\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}\omega_1), \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = -\operatorname{tg}^2(\sqrt{B}(\omega_1 + i\omega_2)).$$

Da das Intervall  $ab$  die charakteristische Oszillationszahl 0 besitzen soll, so folgt unter Berücksichtigung von Satz 3 aus (79) die Gleichung:

$$(82) \quad B_2 = 0,$$

und zwar wechselt die linke Seite von (79) ihr Vorzeichen, wenn  $B_2$  von einem positiven zu einem negativen Werte übergeht. Wir haben nun zunächst einen der in I behandelten Fälle, in dem also, wenn  $B_2 = 0$  ist, die Gerade  $c'c''$  die Gerade  $b'b''$  schneidet. Ferner schneidet  $b'b''$  sowie  $c'c''$  die Gerade  $e'e''$  bez.  $E'E''$ , also liegt, wenn sich die drei Geraden nicht in einem Punkte schneiden, was ja im allgemeinen eintritt, wenn

$$B \neq -\frac{k_2^2 \pi^2}{4\omega_2^2},$$

$e'e''$  bez.  $E'E''$  mit  $b'b''$  und  $c'c''$  in einer Ebene, also in derjenigen Ebene, die durch  $b'b''$  geht und in gewöhnlichem Sinne senkrecht auf der von  $a'a''$  und  $b'b''$  gebildeten Ebene steht. Nun kann überhaupt nie  $E'E''$  mit  $b'b''$  oder  $c'c''$  zusammenfallen, da ja  $E'E''$  die Kugel nicht schneidet oder höchstens berührt, ebensowenig kann  $b'b''$  oder  $c'c''$  mit

$e' e''$  zusammenfallen, da dann  $a' a''$  mit  $b' b''$  bez.  $c' c''$  mit  $d' d''$  zusammenfallen würde, was unmöglich ist, da die Intervalle  $ab$  und  $cd$  nicht-oszillatorisch sind. Aus demselben Grunde kann  $E$  nicht die identische Substitution sein. Daraus folgt aber, daß für die in Betracht kommenden Fälle jetzt  $\sin \vartheta$  in bestimmter Form existiert und stets von 0 verschieden ist.

Wird nun  $B = \left(\frac{k_2 \pi i}{2 \omega_2}\right)^2$ , so hat (80) eine einfache Nullstelle, an der  $\sin \vartheta$  von 0 verschieden ist. Desgleichen findet, wenn  $B_2 = 0$  ist, beim Durchgange von  $B_1$  durch 0 ein Vorzeichenwechsel der linken Seite von (80) statt.

Nur wenn  $B = 0$  ist, also beim Grundtheorem, geht der reelle Orthogonalkreis in einen Punkt über. Verändern wir jedoch  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  zunächst beliebig wenig derartig, daß  $A_a, A_b, A_c, A_d$  wesentlich positiv werden, so folgt aus I, daß der Kreis in einen wirklichen reellen Orthogonalkreis übergeht.

Wir haben jetzt nur den obigen Schluß zu wiederholen, indem wir die Zahl der zu den charakteristischen Oszillationszahlen 0,  $k_2$  gehörigen Verschwindungspunkte der linken Seite von (80) auf den durch (79) bestimmten Kurvenzügen zählen, wenn wir Exponenten und singuläre Stellen stetig verschieben, derart, daß stets  $A_a, A_b, A_c, A_d$  positiv sind und höchstens in einem Grenzfall, d. h. in einem Falle, in dem wir den Prozeß schließen, zwei Exponentendifferenzen einander gleich werden. Wir haben also zusammenfassend:

**Satz 6.** *Wenn die zu der Differentialgleichung (1) gehörigen Größen  $A_a, A_b, A_c$  und  $A_d$  positiv sind, so kann man stets den akzessorischen Parameter  $B$  als komplexe Größe so bestimmen, daß der zugehörige Kern einen reellen Orthogonalkreis besitzt und daß zu dem Intervalle  $ba$  irgend eine vorgegebene ganzzahlige, als positiv angenommene oder verschwindende, charakteristische Oszillationszahl  $k_1$ , und zu dem Intervalle  $bc$  irgend eine vorgegebene ganzzahlige, positive, verschwindende oder (wenn  $k_1 \neq 0$ ) negative charakteristische Oszillationszahl gehört. Als Spezialfall ergibt sich daraus das Grundtheorem der automorphen Funktionen im Falle von vier reellen oder vier komplexen singulären Stellen. Über die Eindeutigkeitsfragen müßten noch Spezialuntersuchungen durchgeführt werden, deren allgemeine Erledigung mir bis jetzt noch nicht gelungen ist.*

## Kapitel III.

**Fall beliebig vieler reeller singulärer Punkte bei reellen Parametern. \*)**

## § 1.

**Aufstellung der Differentialgleichung.  
Zusammenhang mit dem Kreisbogenpolygon.**

Es seien der Größe nach geordnet  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , gegebene reelle Größen, ferner seien  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  irgend welche zwischen 0 und 1 liegende positive reelle Zahlen, welche von 0 und 1 verschieden sind. Wir betrachten dann die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha_1}{x-a_1} + \frac{1-\alpha_2}{x-a_2} + \dots + \frac{1-\alpha_n}{x-a_n} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{A x^{n-2} + A_0 x^{n-3} + \dots + A_{n-2}}{(x-a_1)(x-a_2) + \dots + (x-a_n)} y = 0,$$

welche die  $n+1$  singulären Stellen  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$  besitzt, zu denen die Exponentenpaare:

$$\alpha_1, 0; \alpha_2, 0; \dots; \alpha_n, 0; \alpha'_{n+1}, \alpha''_{n+1}$$

gehören. Dabei ist:

$$(2a) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha'_{n+1} + \alpha''_{n+1} = n - 2,$$

$$(2b) \quad \alpha'_{n+1} \alpha''_{n+1} = A,$$

$$(2c) \quad \alpha'_{n+1} - \alpha''_{n+1} = \alpha_{n+1}.$$

Wir definieren jetzt analog zu I § 2 die zu der singulären Stelle  $a_i$  gehörigen Fundamentallösungen durch:

$$Y_{\alpha_i}^{a_i} = |x - a_i|^{\alpha_i} \mathfrak{P}_{\alpha_i}^{a_i}(x - a_i), \quad Y_0^{a_i} = \mathfrak{P}_0^{a_i}(x - a_i),$$

wobei  $\mathfrak{P}$  immer eine Potenzreihe repräsentiert. Die Fundamentallösungen werden noch jeweils zweckmäßig normiert. Wollen wir beispielshalber die Kantenlänge auf der Kante  $a'_i a''_i$  berechnen, so führen wir die in I § 3 durch (25) gegebenen Normierungen ein, wobei für  $a, b, c$  jetzt  $a_{i+1}, a_i, a_{i-1}$  zu setzen ist; statt  $l_1, l_2, n_1, n_2$  führen wir jetzt die Größen  $l_1^{(i, i+1)}, l_2^{(i, i+1)}, l_1^{(i, i-1)}, l_2^{(i, i-1)}$  ein, wobei also der obere erste Index die mittlere der drei in Betracht kommenden singulären Stellen an-

\*) Der Fall von fünf reellen singulären Punkten wurde auf meine Anregung von Herrn Gerstenmeier in einer voraussichtlich als Erlanger Doktordissertation erscheinenden Arbeit behandelt.

deutet. Wenn wir diese Bezeichnung einführen, erhalten wir ohne weiteres aus I (10) und (12) die Länge der Seite  $a'_{i+1}a'_i$  und die Kantenlänge auf der Kante  $a'_ia''_i$ , also auf der Achse derjenigen Substitution, welche einem Umlaufe um  $a_i$  entspricht. Wie jedoch schon in II bemerkt wurde, wollen wir abweichend von I in I (13):

$$C = \frac{i}{2}$$

setzen. Es sei jetzt:

$$(3) \quad dt = \frac{dx}{(x-a_1)^{1-\alpha_1}(x-a_2)^{1-\alpha_2} \dots (x-a_n)^{1-\alpha_n}};$$

dann geht (1) über in:

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{|x-a_1|^{2-2\alpha_1}|x-a_2|^{2-2\alpha_2} \dots |x-a_n|^{2-2\alpha_n}}{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)} (Ax^{n-2} + A_0x^{n-3} + \dots + A_{n-3})y = 0.$$

Zunächst wiederholen wir nun die Diskussion des Vorzeichens von  $A$ , wobei wir wieder den in das Unendliche geworfenen Punkt als Index anfügen. Dann haben wir wieder drei Fälle.

(A) Es sei

$$A_{a_{n+1}} > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < n - 1.$$

Dann sind alle  $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_n}, A_{a_{n+1}}$  positiv. Umgekehrt, sind alle Größen  $A_{a_1} \dots A_{a_{n+1}}$  positiv, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < n - 1.$$

(B) Es sei

$$A_{a_{n+1}} > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > n - 1.$$

Dann sind die Größen  $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_n}$  negativ. Umgekehrt, ist  $A_{a_{n+1}}$  positiv, sind dagegen die anderen  $A_{a_i}$  negativ, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > n - 1.$$

(C) Es sei  $A_{a_{n+1}} < 0$ , dann sind entweder alle  $A_{a_i}$  negativ oder zum wenigsten alle mit Ausnahme eines einzigen. Die Ableitungen dieser Tatsachen ergeben sich genau wie in I § 3.

Es sollen jetzt noch die Bedingungen für die Existenz eines Orthogonalkreises angegeben werden. Diese sind

$$(5) \quad l_1^{(2,3)} l_2^{(2,3)} = l_1^{(2,1)} l_2^{(2,1)}, \quad l_1^{(3,4)} l_2^{(3,4)} = l_1^{(3,2)} l_2^{(3,2)}, \dots, \\ l_1^{(n-1,n)} l_2^{(n-1,n)} = l_1^{(n-1,n-2)} l_2^{(n-1,n-2)}.$$

Denn dann schneiden sich die Achsen  $a'_1a''_1, a'_2a''_2, a'_3a''_3, \dots, a'_na''_n$  in einem Punkte. Multiplizieren wir dagegen die rechten Seiten der Gleichungen je mit einer geeigneten reellen Größe, so erhalten wir Gleichungen



chungen, welche für  $n-2$  Kanten vorgegebene rein imaginäre Kantenlängen postulieren.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, durch Vorgabe von  $n-2$  rein imaginären Kantenlängen und gewissen Oszillationszahlen, oder durch Vorgabe von  $n-2$  reellen Seitenlängen oder durch Vorgabe einer Anzahl  $m$  rein imaginärer Kantenlängen nebst gewissen Oszillationszahlen und  $n-m-2$  reellen Seitenlängen die  $n-2$  akzessorischen Parameter zu bestimmen.

## § 2.

### Eindeutige Bestimmung der akzessorischen Parameter durch $n-3$ reelle Seitenlängen.

Dieser Fall erledigt sich wieder am leichtesten, und wir haben die Ausführungen von I § 5 nur in wenigen Punkten zu ergänzen. Es seien die vorgegebenen Seitenlängen von der Form  $\frac{p_i}{q_i} \pi$ ; dabei seien  $p_i$  und  $q_i$  teilerfremde ganze Zahlen und  $q_i$  nicht 1. Durchlaufen wir nun das Intervall, zu welchem die Seitenlänge  $\frac{p_i}{q_i} \pi$  gehören soll,  $q_i$  mal unter Festhaltung des in § 5 angegebenen Fortsetzungsprinzips, so muß eine Lösung existieren, die am Anfang und am Ende verschwindet und im Inneren  $p_i-1$  Nullstellen besitzt. Wir kommen daher jetzt auf ein  $n-2$  parametriges gewöhnliches Oszillationstheorem, welches fordert, daß in  $n-2$  Intervallen Lösungen existieren, von denen die zum  $i^{\text{ten}}$  Intervalle gehörige am Anfang und am Ende des  $q_i$ -fach durchlaufenen Intervalles verschwindet und im Inneren  $p_i-1$  Nullstellen hat. Um den Beweis dieses Oszillationstheorems zu erbringen, hat man unter Berücksichtigung der Ableitung in I § 5 nur den von Herrn Bôcher für das  $m$ -parametriges Oszillationstheorem gegebenen Beweis wörtlich zu wiederholen\*), um den folgenden Satz zu gewinnen.

**Satz 1.** *Man kann stets auf eine und nur eine Weise die akzessorischen Parameter als reelle Größen so bestimmen, daß  $n-2$  Seiten vorgeschriebene reelle Längen besitzen, die aber nicht ganze Vielfache von  $\pi$  sind. Sind die Werte der Seitenlängen ganze Vielfache von  $\pi$ , so hört die eindeutige Bestimmtheit der Parameterwerte auf.*

In der Tat schließt man von den Seitenlängen  $\frac{p_i}{q_i} \pi$  stets auf beliebige Seitenlängen  $P_i \pi$ , wenn  $P_i$  auch eine Irrationalzahl ist, da die Parameter sich nach I § 4 stetig mit den reellen Seitenlängen ändern,

---

\*) Bôcher, American Bulletin, Oktober 1898 und April 1900.

sofern diese nicht gleich ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  sind; bei stetiger Abänderung schließen sich jedoch an die ganzen Vielfachen von  $\pi$  komplexe Seitenlängen an.

## § 3.

## Hilfssätze.

Wir setzen:

$$Ax^{n-2} + A_0x^{n-3} + \dots + A_{n-3} = P(x),$$

$$\frac{|x - a_1|^{2-2a_1} |x - a_2|^{2-2a_2} \dots |x - a_n|^{2-2a_n}}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = S(x).$$

$S(x)$  ändert also bei den singulären Punkten und nur bei diesen sein Vorzeichen, wir nennen nun das Vorzeichen des Wertes von  $S(x)$  in einem Intervalle die *Signatur* des Intervalles, die also positiv oder negativ ist. Zwei benachbarte Intervalle haben stets verschiedene Signatur, die des Intervalles  $a_n \infty$  ist stets positiv, die des Intervalles  $-\infty a_1$  ist positiv oder negativ, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist. Wir machen dann folgende Hilfsbetrachtungen.

Es sei

$$(6) \quad P(x) = P_1(x)$$

so gelegen, daß keine der vier Fundamentallösungen

$$Y_{\alpha_i}^{\alpha_i}, \quad Y_0^{\alpha_i}, \quad Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_{i+1}}, \quad Y_0^{\alpha_{i+1}}$$

im Inneren des Intervalles  $a_i a_{i+1}$  verschwindet und daß die Größen

$$l_1^{(i, i+1)}, \quad l_2^{(i, i+1)}, \quad l_1^{(i+1, i)}, \quad l_2^{(i+1, i)}$$

alle positiv sind. Ein solches Intervall nennen wir „*nichtoszillatorisch*.“ Ebenso sei das Intervall  $a_{i+1} a_{i+2}$  nichtoszillatorisch. Wir setzen dann

$$(7a) \quad Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} = \bar{Y}_{\alpha_i}^{\alpha_i} - l_1^{(i, i+1)} \bar{Y}_0^{\alpha_i}; \quad Y_0^{\alpha_{i+1}} = \bar{Y}_{\alpha_i}^{\alpha_i} - l_2^{(i, i+1)} \bar{Y}_0^{\alpha_i};$$

$$Y_{\alpha_i-1}^{\alpha_i-1} = \bar{Y}_{\alpha_i}^{\alpha_i} - l_1^{(i, i-1)} \bar{Y}_0^{\alpha_i}; \quad Y_0^{\alpha_i-1} = \bar{Y}_{\alpha_i}^{\alpha_i} - l_2^{(i, i-1)} \bar{Y}_0^{\alpha_i}.$$

$$(7b) \quad Y_{\alpha_i}^{\alpha_i} = \bar{Y}_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} - l_1^{(i+1, i)} \bar{Y}_0^{\alpha_{i+1}}; \quad Y_0^{\alpha_i} = \bar{Y}_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} - l_2^{(i+1, i)} \bar{Y}_0^{\alpha_{i+1}};$$

$$Y_{\alpha_{i+2}}^{\alpha_{i+2}} = \bar{Y}_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} - l_1^{(i+1, i+2)} \bar{Y}_0^{\alpha_{i+1}}; \quad Y_0^{\alpha_{i+2}} = \bar{Y}_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} - l_2^{(i+1, i+2)} \bar{Y}_0^{\alpha_{i+1}}.$$

Dabei sind die überstrichenen  $Y$  stets analog zu I (25) normiert, die Normierung der anderen  $Y$  ist eben durch (7a) und (7b) festgelegt. Es sei nun bei einer anderen Verteilung der Parameterwerte

$$(8) \quad P(x) = P_1(x) + Q(x) = P_2(x),$$

wobei  $Q(x)$  vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade ist und ebenfalls so gewählt sein möge,

daß, wenn (8) erfüllt ist, die Intervalle  $a_i a_{i+1}$  und  $a_{i+1} a_{i+2}$  „nichtoszillatorisch“ sind. Die zu  $P_2(x)$  gehörigen Größen zeichnen wir durch Hinzufügen des Index  $q$  aus. Es möge nun je eine der beiden folgenden Gleichungen von (9) und von (10) bestehen,

$$(9a) \quad l_{1,q}^{(i+1,i)} > l_1^{(i+1,i)}; \quad (9b) \quad l_{2,q}^{(i+1,i)} > l_2^{(i+1,i)},$$

$$(10a) \quad l_{1,q}^{(i+1,i+2)} > l_1^{(i+1,i+2)}; \quad (10b) \quad l_{2,q}^{(i+1,i+2)} > l_2^{(i+1,i+2)}.$$

Dann schneiden sich die Kurven  $z = P_1(x)$  und  $z = P_2(x)$  entweder im Intervalle  $a_{i+1} a_{i+2}$  oder im Intervalle  $a_i a_{i+1}$  mindestens einmal. Denn nehmen wir, um einen Fall zu fixieren, an, die Signatur des Intervalles  $a_i a_{i+1}$  sei positiv. Wäre nun  $P_1(x)$  durchaus in beiden Intervallen  $a_i a_{i+1}$ ,  $a_{i+1} a_{i+2}$  größer als  $P_2(x)$ , so wäre der Koeffizient von  $y$  in der Differentialgleichung (4) unter Voraussetzung von (6) im Intervalle  $a_i a_{i+1}$  durchaus größer, als derselbe Koeffizient unter Voraussetzung von (8); im Intervalle  $a_{i+1} a_{i+2}$  wäre dagegen der aus (6) entstehende Koeffizient durchaus kleiner als der aus (8) entstehende, da die Signatur des Intervalles  $a_{i+1} a_{i+2}$  ja entgegengesetzt der von  $a_i a_{i+1}$  ist. Dann folgt genau wie in I S. 237 und 238, daß zwar sogar (10a) und (10b) gleichzeitig erfüllt wären, daß aber an Stelle von (9a) und (9b) gerade die entgegengesetzten Ungleichungen träten. Wäre aber  $P_1(x)$  durchaus kleiner als  $P_2(x)$  in beiden Intervallen, so wären zwar die Ungleichungen (9), aber die zu (10) entgegengesetzten Ungleichungen erfüllt. Die beiden Schlußweisen vertauschen sich, wenn die Signatur des Intervalles  $a_i a_{i+1}$  negativ ist. Man hat also ganz allgemein:

**Satz 2.** *Sobald zum mindesten eine der Ungleichungen (9) gleichzeitig mit einer der Ungleichungen (10) gilt, müssen sich die Kurven  $z = P_1(x)$  und  $z = P_2(x)$  zum mindesten einmal entweder im Intervalle  $a_i a_{i+1}$  oder im Intervalle  $a_{i+1} a_{i+2}$  schneiden.*

Daran schließt sich der etwas tieferliegende:

**Satz 3.** *Wenn gleichzeitig eine der Gleichungen (9) und eine der Gleichungen (10) erfüllt ist, und die Kurven  $z = P_1(x)$  und  $z = P_2(x)$  zwischen  $a_i$  und  $a_{i+2}$  nur einen Schnittpunkt gemeinsam haben, so ist:*

$$(11) \quad l_{1,q}^{(i,i+1)} > l_1^{(i,i+1)}; \quad l_{2,q}^{(i,i+1)} > l_2^{(i,i+1)}.$$

Liegt der Schnittpunkt der beiden Kurven im Intervalle  $a_{i+1} a_{i+2}$ , so folgt aus einer der Gleichungen (9) allein, daß  $P_2(x)S(x)$  im Intervalle  $a_i a_{i+1}$  durchaus größer ist als  $P_1(x)S(x)$ , und daraus folgen dann die beiden Gleichungen (11). Schwieriger ist der Beweis, wenn der Schnittpunkt im Intervalle  $a_i a_{i+1}$  liegt. Es verschwindet in diesem Falle das in (8) definierte  $Q(x)$  in einem Punkte  $X$  des Intervalles  $a_i a_{i+1}$ .

Da nun  $Q(x)$  im Intervalle  $a_{i+1} a_{i+2}$  nicht verschwindet und eine der Ungleichungen (10) erfüllt sein soll, so ist im ganzen Intervalle  $a_{i+1} a_{i+2}$

$$S(x) P_2(x) > S(x) P_1(x),$$

also ist

$$(12a) \quad S(x) P_2(x) < S(x) P_1(x), \quad \text{d. h.} \quad Q(x) S(x) < 0, \\ \text{wenn} \quad X < x < a_{i+1},$$

$$(12b) \quad S(x) P_2(x) > S(x) P_1(x), \quad \text{d. h.} \quad Q(x) S(x) > 0, \\ \text{wenn} \quad X > x > a_i.$$

Nun findet man aus der Formel I (34) wie dort\*) durch geeignete Spezialisierung

$$(13a) \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} Y_{a_{i+1}}^{a_{i+1}} Y_{a_{i+1}, q}^{a_{i+1}} Q(x) S(x) dt = l_{1, q}^{(i, i+1)} - l_1^{(i, i+1)},$$

$$(13b) \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} Y_0^{a_{i+1}} Y_{0, q}^{a_{i+1}} Q(x) S(x) dt = l_{2, q}^{(i, i+1)} - l_2^{(i, i+1)},$$

$$(14a) \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} Y_{a_i}^{a_i} Y_{a_i, q}^{a_i} Q(x) S(x) dt = l_{1, q}^{(i+1, i)} - l_1^{(i+1, i)},$$

$$(14b) \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} Y_0^{a_i} Y_{0, q}^{a_i} Q(x) S(x) dt = l_{2, q}^{(i+1, i)} - l_2^{(i+1, i)}.$$

Da nun die Größen

$$l_1^{(i, i+1)}, \quad l_{2, q}^{(i, i+1)}, \quad l_1^{(i+1, i)}, \quad l_{2, q}^{(i+1, i)}$$

nach Voraussetzung positiv sind, so sind die Funktionen

$$Y_{a_{i+1}}^{a_{i+1}}, \quad Y_0^{a_{i+1}}, \quad Y_{a_i}^{a_i}, \quad Y_0^{a_i},$$

welche im Inneren des Intervalles nicht verschwinden, gemäß den Formeln (7a) und (7b) so normiert, daß sie zwischen  $a_i$  und  $a_{i+1}$  durchaus negativ sind. Wir bilden jetzt die Ausdrücke:

---

\*) Bei der Formel ist l. c. ein Druckfehler. Sie muß natürlich heißen:

$$\int_{t_1}^{t_2} (v L(u) - u L(v)) dt = \left[ v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(x) - \frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(X)}{Y_{\alpha_i}^{\alpha_i}(X)} Y_{\alpha_i}^{\alpha_i}(x); \\
J_2 &= Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(x) - \frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(X)}{Y_0^{\alpha_i}(X)} Y_0^{\alpha_i}(x); \\
J_3 &= Y_0^{\alpha_i+1}(x) - \frac{Y_0^{\alpha_i+1}(X)}{Y_{\alpha_i}^{\alpha_i}(X)} Y_{\alpha_i}^{\alpha_i}(x); \\
J_4 &= Y_0^{\alpha_i+1}(x) - \frac{Y_0^{\alpha_i+1}(X)}{Y_0^{\alpha_i}(X)} Y_0^{\alpha_i}(x).
\end{aligned}
\tag{15}$$

Diese verschwinden für  $x=X$  und haben als Lösungen von (4) unter Voraussetzung von (6) zwischen  $\alpha_i$  und  $\alpha_{i+1}$  keine Nullstelle mehr, da nach einem Sturmschen Satze\*) zwischen zwei Nullstellen einer Lösung von (4) stets eine Nullstelle einer jeden anderen Lösung von (4) liegen muß. Wir wollen nun zeigen, daß jeder der Ausdrücke für  $\alpha_i < x < X$  negativ, für  $X < x < \alpha_{i+1}$  positiv ist. Für  $x = \alpha_i$  ist nämlich:

$$J_1 = Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(\alpha_i) < 0, \quad J_3 = Y_0^{\alpha_i+1}(\alpha_i) < 0;$$

für  $x = \alpha_{i+1}$  ist

$$J_2 = - \frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(X)}{Y_0^{\alpha_i}(X)} Y_0^{\alpha_i}(\alpha_{i+1}) > 0,$$

da

$$Y_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i+1}(X), \quad Y_0^{\alpha_i}(X), \quad Y_0^{\alpha_i}(\alpha_{i+1})$$

negativ sind. Wir haben also nunmehr unsere Behauptung betreffs  $J_4$  zu beweisen. Für  $x = \alpha_i$  ist nun  $\frac{dJ_4}{dt} = +1$ , also positiv. Wäre nun  $J_4$  für  $x = \alpha_i$  positiv, so könnten wir  $J_4$  mit einer positiven Größe  $\vartheta$  so multiplizieren, daß  $\vartheta \cdot J_4 = 1$  für  $x = \alpha_i$  ist, während  $\frac{d}{dt}(\vartheta J_4)$  für  $x = \alpha_i$  positiv bleibt. Es hat daher  $\vartheta J_4(x)$  in  $\alpha_i$  denselben Wert wie  $\bar{Y}_0^{\alpha_i}$ , aber eine größere positive Ableitung, ist also in der nächsten Umgebung von  $x = \alpha_i$  für größere  $x$  größer als  $\bar{Y}_0^{\alpha_i}$  und bleibt es im ganzen Intervalle  $\alpha_i \alpha_{i+1}$ , da  $\vartheta J_4(x) - \bar{Y}_0^{\alpha_i}$  für  $x = \alpha_i$  verschwindet, also im Intervalle  $\alpha_i \alpha_{i+1}$  nicht mehr verschwinden kann. Da nun  $J_4$  in  $X$  verschwindet, müßte  $\bar{Y}_0^{\alpha_i}$  zwischen  $\alpha_i$  und  $X$  verschwinden, was gegen die Voraus-

\*) Vergl. I, S. 245.

setzung verstößt. Damit ist die Behauptung für alle Funktionen  $J_1, J_2, J_3, J_4$  bewiesen und sie gilt natürlich genau so für  $J_{1,q}, J_{2,q}, J_{3,q}, J_{4,q}$ , welche analog aus den mit dem Index  $q$  versehenen Größen gebildet sind. Nun ist nach Voraussetzung die rechte Seite entweder von (14a) oder von (14b) positiv, also entweder:

$$(16a) \quad \int_{a_i}^{t_X} Y_{\alpha_i}^{a_i} Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i} Q(x) S(x) dt - \int_{t_X}^{a_{i+1}} Y_{\alpha_i}^{a_i} Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i} |Q(x) S(x)| dt > 0$$

oder

$$(16b) \quad \int_{a_i}^{t_X} Y_0^{a_i} Y_{0,q}^{a_i} Q(x) S(x) dt - \int_{t_X}^{a_{i+1}} Y_0^{a_i} Y_{0,q}^{a_i} |Q(x) S(x)| dt > 0.$$

Wir bilden jetzt, wenn (16a) erfüllt ist, die Gleichung:

$$(17) \quad \frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_i}^{a_i}(X)} \cdot \frac{Y_{\alpha_{i+1,q}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i}(X)} \int_{a_i}^{t_X} Y_{\alpha_i}^{a_i} Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i} Q(x) S(x) dt \\ - \frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_i}^{a_i}(X)} \cdot \frac{Y_{\alpha_{i+1,q}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i}(X)} \int_{t_X}^{a_{i+1}} Y_{\alpha_i}^{a_i} Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i} |Q(x) S(x)| dt \\ = \frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_i}^{a_i}(X)} \cdot \frac{Y_{\alpha_{i+1,q}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i}(X)} [l_{1,q}^{(i+1,i)} - l_1^{(i+1,i)}] > 0.$$

Auf der linken Seite von (17) ist nun der Minuend sowie auch der Subtrahend positiv, dieselbe wird daher stärker positiv, wenn wir den Minuenden vergrößern, den Subtrahenden verkleinern. Dies geschieht,

wenn wir statt  $\frac{Y_{\alpha_{i+1}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_i}^{a_i}(X)} Y_{\alpha_i}^{a_i}(x)$ , welches eine negative Größe ist,  $Y_{\alpha_{i+1}}^{a_{i+1}}(x)$ ,

für  $\frac{Y_{\alpha_{i+1,q}}^{a_{i+1}}(X)}{Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i}(X)} Y_{\alpha_{i,q}}^{a_i}(x)$ , das auch negativ ist,  $Y_{\alpha_{i+1,q}}^{a_{i+1}}(x)$  einführen. Denn

da  $J_1$  für  $a_i < x < X$  negativ, für  $X < x < a_{i+1}$  positiv ist, so ist das Produkt  $Y_{\alpha_{i+1}}^{a_{i+1}}(x) Y_{\alpha_{i+1,q}}^{a_{i+1}}(x)$  für  $a_i < x < X$  positiv und größer als das Glied, das wir ersetzen, für  $X < x < a_{i+1}$  auch positiv, aber kleiner als das ersetzte Glied. Durch diese Substitution geht aber die linke Seite von (19) in die linke Seite von (13a) über, also ist tatsächlich  $l_{1,q}^{(i,i+1)} - l_1^{(i,i+1)} > 0$ .

Führt man  $Y_0^{a_i+1}(x)$  und  $Y_{0,q}^{a_i+1}$  in (17) ein, so folgt unter Benützung von  $J_3$  aus einem zu (17) analog gebildeten Ausdrucke:  $l_{2,q}^{(i,i+1)} - l_2^{(i,i+1)} > 0$ . Geht man von (16b) aus, so erhält man unter Benützung der Eigenschaften von  $J_2$  und  $J_4$  den vollständigen Beweis der Formeln (11).

Wir können nun Satz 3 umkehren und erhalten als eine andere Ausdrucksform desselben:

**Satz 4.** *Wenn gleichzeitig eine der Gleichungen (9) und eine der Gleichungen (10) erfüllt ist, aber eine der Gleichungen (11) nicht erfüllt ist, haben die Kurven  $z = P_1(x)$  und  $z = P_2(x)$  zwischen  $a_i$  und  $a_{i+2}$  mindestens zwei Schnittpunkte.*

#### § 4.

**Existenz eines reellen Orthogonalkreises beim Grundtheorem, wenn mindestens ein  $A$  positiv ist.**

**Entsprechende Vorgabe rein imaginärer Kantenlängen.**

Wir wenden uns jetzt zum Beweis des Grundtheorems, wobei wir

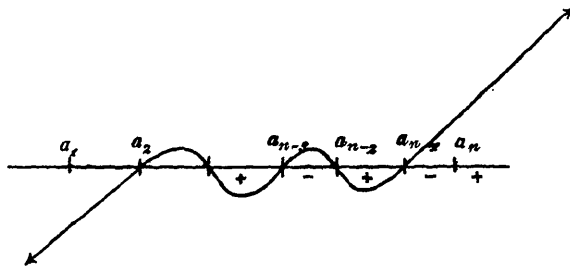


Fig. 2.

wieder von den Kurven  $z = P(x)$  ausgehen. Wir legen zunächst die Kurve durch die Punkte  $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ , so daß

$$(18) \quad P(x) = (x - a_2)(x - a_3) \cdots (x - a_{n-1}).$$

Dann ist in allen Intervallen  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n$  der Koeffizient von  $y$  in (4) durchaus negativ; wir bezeichnen in diesem Falle die Intervalle als „*durchaus nichtoszillatorisch*“ und diese Intervalle sind a fortiori *nichtoszillatorisch* im Sinne von Seite 56. Wir betrachten jetzt speziell die Intervalle  $a_{n-2} a_{n-1}$  und  $a_{n-1} a_n$ . Ist nun:

$$(19) \quad l_1^{(n-1,n)} l_2^{(n-1,n)} \geq l_1^{(n-1,n-2)} l_2^{(n-1,n-2)},$$

so verschieben wir den Schnittpunkt der Kurve mit der  $x$ -Achse, welcher nach  $a_{n-1}$  fiel, nach links bezüglich rechts, je nachdem  $>$  oder  $<$  in (19) galt, die anderen Schnittpunkte lassen wir fest. Dann bleiben die Intervalle zwischen  $a_1$  und  $a_{n-2}$  zunächst durchaus nichtoszillatorisch, während  $l_1^{(n-1,n)}$  und  $l_2^{(n-1,n)}$  bei einer Bewegung des Schnittpunktes nach rechts

kontinuierlich wachsen,  $l_1^{(n-1, n-2)}$  und  $l_2^{(n-1, n-2)}$  kontinuierlich abnehmen; bei einer Bewegung nach links nehmen  $l_1^{(n-1, n-2)}$ ,  $l_2^{(n-1, n-2)}$  zu,  $l_1^{(n-1, n)}$  und  $l_2^{(n-1, n)}$  ab. Wenn nun der Schnittpunkt nach  $a_n$  fällt, so ist der Koeffizient von  $y$  im ganzen Intervalle  $a_{n-1} a_n$  positiv, daraus folgt durch denselben Schluß wie in I, § 8, daß, während wir den Schnittpunkt von  $a_{n-1}$  nach  $a_n$  bewegten,  $l_2^{(n-1, n)}$  durch  $\infty$  gegangen ist; sobald dieses eingetreten ist, nennen wir das Intervall  $a_{n-1} a_n$  „wirklich oszillatorisch“.

Wenn aber der Schnittpunkt, sich in entgegengesetzter Richtung bewegend, nach  $a_{n-2}$  gekommen ist, ist aus demselben Grunde  $l_2^{(n-1, n-2)}$  durch  $\infty$  gegangen, also das Intervall  $a_{n-2} a_{n-1}$  „wirklich oszillatorisch“ geworden. Zwischen der Lage des Schnittpunktes, für welche  $l_2^{(n-1, n)}$  den Wert  $\infty$  hat, und der Lage, für welche  $l_2^{(n-1, n-2)}$  den Wert  $\infty$  annimmt, gibt es also stets eine und nur eine Lage des Schnittpunktes, für welche

$$(20) \quad l_1^{(n-1, n)} l_2^{(n-1, n)} - c_{n-1} l_1^{(n-1, n-2)} l_2^{(n-1, n-2)} = 0$$

erfüllt ist, wenn  $c_{n-1}$  irgend eine reelle feste positive Größe ist, der wir speziell den Wert 1 geben können.

Wir führen nun den Wert von  $z = P(x)$  für  $x = a_{n-1}$  als neue Variable  $z_{n-1}$  ein. Bei der Lage der Kurve, für welche (20) erfüllt war, sei  $z_{n-1} = z_{n-1}^{(1)}$ , wir nennen die Kurve I. Ebenso führen wir jetzt den Wert von  $z$  in dem Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden  $x = a_{n-2}$  als neue Variable  $z_{n-2}$  ein, wobei also  $z_{n-2}^{(1)} = 0$  ist.

Um nun zu erreichen, daß neben (20) auch:

$$(21) \quad l_1^{(n-2, n-1)} l_2^{(n-2, n-1)} - c_{n-2} l_1^{(n-2, n-3)} l_2^{(n-2, n-3)} = 0$$

erfüllt sei, wobei  $c_{n-2}$  eine positive reelle Konstante ist, verfahren wir folgendermaßen: Wir verschieben  $z_{n-2}$  um ein kleines Stück und bestimmen  $z_{n-1}$  so, daß zunächst (20) erfüllt ist. Es wechselt nämlich für  $z_{n-2} = 0$  die linke Seite der Gleichung (20) ihr Vorzeichen, wenn  $z_{n-1}$  durch  $z_{n-1}^{(1)}$  hindurchgeht, wie aus den obigen Betrachtungen direkt folgt, da dabei der noch bewegliche Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse sich in einer festen Richtung verschiebt. Liegt also  $z_{n-2}$  genügend nahe an 0, so hat die Gleichung (20) sicher eine ungerade Anzahl von Nullstellen in der Umgebung von  $z_{n-1} = z_{n-1}^{(1)}$ . Es kann aber bei festem  $z_{n-2}$  nur eine einzige solche Wurzel von (20) existieren. Denn würden zwei Kurven II und III existieren, welche zu demselben  $z_{n-2}$  gehören, dann hätte Kurve II mit Kurve III keinen Schnittpunkt mehr gemeinschaftlich und wenn wir die Kurven so bezeichnen, daß

$$(22a) \quad l_{1, II}^{(n-1, n-2)} > l_{1, III}^{(n-1, n-2)},$$

also auch

$$(22b) \quad l_{2, II}^{(n-1, n-2)} > l_{2, III}^{(n-1, n-2)}$$



ist, so wäre

$$(23a) \quad l_{1,II}^{(n-1,n)} < l_{1,III}^{(n-1,n)},$$

$$(23b) \quad l_{2,II}^{(n-1,n)} < l_{2,III}^{(n-1,n)},$$

wenn wir die zu den Kurven II und III gehörigen Größen durch Hinzufügen des Index II bez. III auszeichnen. Dann ist aber ein gleichzeitiges Bestehen der Gleichung (20) für die mit II versehenen Größen und die mit III versehenen Größen ausgeschlossen; q. e. d.

Wir wollen künftighin unter Annahme der Lagenverhältnisse in Fig. 3 sagen, das Intervall  $a_{n-2} a_{n-1}$  sei für II *stärker oszillatorisch* als für III, das Intervall  $a_{n-1} a_n$  sei für II *schwächer oszillatorisch* als für III, was Gleichungen von der Art (22) und (23) zur Folge hat. Man kann also, wenn man  $z_{n-2}$  auf der Geraden  $x = a_{n-2}$  hinauf- oder hinunterschiebt, bei einer festen Lage dieses Punktes stets einen und nur einen Wert  $z_{n-1}$  angeben, so daß (20) erfüllt ist, solange nur keine der Größen  $l$ , die in (20) vorkommen, unendlich wird. Ferner

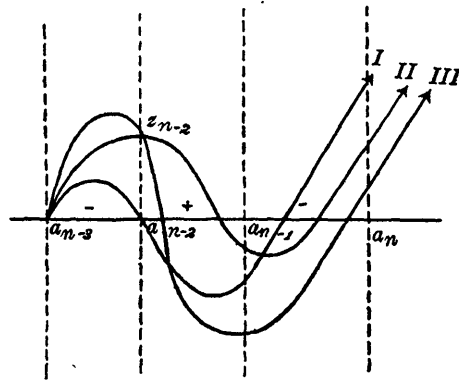


Fig. 3.

bemerkten wir noch, daß jeweils die Kurve II zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_n$  die  $x$ -Achse schneiden muß, da ja sonst eines der Intervalle  $a_{n-2} a_{n-1}$  oder  $a_{n-1} a_n$  sicher „wirklich oszillatorisch“ wäre. Vergleichen wir jetzt die Kurve I mit Kurve II, wobei wir nicht benutzen wollen, daß  $z_{n-2}^{(I)} = 0$  ist, so haben diese Kurven zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_n$  einen Schnittpunkt gemeinschaftlich, da für beide (20) erfüllt ist. Jetzt können wir also Satz 3 anwenden. Denn es sei zunächst

$$(24) \quad z_{n-2}^{(II)} > z_{n-2}^{(I)}.$$

Dann behaupten wir, daß:

$$(25) \quad l_{1,II}^{(n-2,n-1)} > l_{1,I}^{(n-2,n-1)}, \quad l_{2,II}^{(n-2,n-1)} > l_{2,I}^{(n-2,n-1)}.$$

Denn liegt der einzige zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_n$  mögliche Schnittpunkt zwischen  $a_{n-1}$  und  $a_n$ , so macht II das Intervall  $a_{n-2} a_{n-1}$ , das eine positive Signatur hat, durchaus stärker oszillatorisch als I. Liegt aber der Schnittpunkt zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_{n-1}$ , wie in Fig. 3 für die Kurve III angenommen wurde, die wir also im jetzigen Zusammenhange mit II bezeichnen müssen, so ist das Intervall  $a_{n-1} a_n$ , das eine negative Signatur hat, für das jetzige II stärker oszillatorisch als für I; es ist also:

$$(26a) \quad l_{1, II}^{(n-1, n)} > l_{1, I}^{(n-1, n)},$$

$$(26b) \quad l_{2, II}^{(n-1, n)} > l_{2, I}^{(n-1, n)}.$$

Da aber für beide Indizes die Gleichung (20) gilt, ist sicher entweder

$$(27a) \quad l_{1, II}^{(n-1, n-2)} > l_{1, I}^{(n-1, n-2)}$$

oder

$$(27b) \quad l_{2, II}^{(n-1, n-2)} > l_{2, I}^{(n-1, n-2)}$$

erfüllt.

Es sind daher alle Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, woraus (25) folgt. Vergrößern wir daher  $z_{n-2}$  und verändern wir  $z_{n-1}$  so, daß (20) stets erfüllt ist, so nehmen die Größen  $l_1^{(n-1, n-2)}$  und  $l_2^{(n-1, n-2)}$  kontinuierlich zu, verkleinern wir  $z_{n-2}$  und verändern wir  $z_{n-1}$  so, daß (20) stets erfüllt ist, so nehmen  $l_1^{(n-1, n-2)}$  und  $l_2^{(n-1, n-2)}$  ab. Denn bei der Ableitung von (27a) und (27b) wurde ja nur benützt, daß das zu II gehörige  $z_{n-2}$  größer ist als das zu I gehörige. Das Intervall  $a_{n-3} a_{n-2}$ , das eine negative Signatur hat, wird aber bei wachsendem  $z_{n-2}$  und entsprechender Verschiebung von  $z_{n-1}$  stets schwächer oszillatorisch, so daß  $l_1^{(n-2, n-3)}$  und  $l_2^{(n-2, n-3)}$  mit wachsendem  $z_{n-2}$  abnehmen, mit steigendem  $z_{n-2}$  wachsen. Nun folgt aus den Gleichungen (7), daß  $l_2^{(n-2, n-1)}$  und  $l_2^{(n-1, n-2)}$  stets gleichzeitig unendlich werden; solange also  $l_2^{(n-2, n-1)}$  endlich ist, gilt dieses von allen in (20) vorkommenden Größen, da immer zuerst  $l_2$  durch  $\infty$  gehen muß, und beim ersten Durchgang von  $l_2$  durch  $\infty$  das zugehörige  $l_1$  nicht 0 sein kann. (Vergl. I, S. 223 u. f.)

Nun kann man stets  $z_{n-1}$  unter der durch (20) vorgeschriebenen Verrückung von  $z_{n-2}$  so vergrößern bez. verkleinern, daß  $l_2^{(n-2, n-1)}$  bez.  $l_2^{(n-2, n-3)}$  unendlich wird. Diese Tatsache ist sicher dann erwiesen, wenn wir zeigen, daß durch genügendes Verschieben von  $z_{n-2}$  bei zugeordneter Verrückung von  $z_{n-1}$  stets mindestens eines der Intervalle zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_n$  „wirklich oszillatorisch“ wird.

Es kann nun  $|z_{n-1}|$  nur dadurch über alle Grenzen wachsen, daß mindestens einer der akzessorischen Parameter über alle Grenzen wächst. Wir setzen nun den betreffenden Parameter als Faktor von  $P(x)$  heraus und erhalten den zweiten Faktor als Summe von zwei Polynomen, von denen das eine höchstens vom Grade  $n-3$  ist, das andere aber einen beliebig kleinen absoluten Betrag im ganzen inneren Intervall zwischen  $a_1$  und  $a_n$  besitzt, wenn der herausgesetzte Faktor groß genug ist. Damit nun von den Intervallen keines „wirklich oszillatorisch“ ist, müßte das erste Polynom vom  $n-3^{\text{ten}}$  Grade in jedem der  $n-1$  Intervalle ein zu dessen Signatur entgegengesetztes Zeichen besitzen, also mindestens  $n-2$

Nullstellen besitzen, was unmöglich ist. Daher muß mindestens ein Intervall zwischen  $a_1$  und  $a_n$  wirklich oszillatorisch sein. Wären nun aber die drei Intervalle zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_n$  alle nichtoszillatorisch, so würden notwendigerweise zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_n$  mindestens zwei Nullstellen von  $P(x)$  liegen, und es wären daher die Intervalle zwischen  $a_1$  und  $a_{n-3}$ , also alle Intervalle zwischen  $a_1$  und  $a_n$ , durchaus nichtoszillatorisch, wie Fig. 4 zeigt. Dieses steht mit dem eben Gesagten in Widerspruch.

Bewegen wir daher  $z_{n-2}$  fortwährend nach abwärts und entsprechend  $z_{n-1}$ , so daß (20) erfüllt bleibt, von dem Werte an, für den  $l_2^{(n-2, n-1)}$

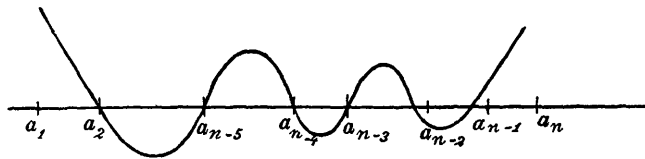


Fig. 4.

das erste Mal unendlich wurde, bis zu dem Werte, in dem  $l_2^{(n-2, n-3)}$  das erste Mal unendlich wird, so durchläuft die linke Seite von (21), alle dazwischenliegenden Werte einmal und nur einmal annehmend, die Werte zwischen  $+\infty$  und  $-\infty$ . Die linke Seite von (21) nimmt also dabei einmal und nur einmal den Wert 0 an und zwar geschehe dieses für  $z_{n-1} = z_{n-1}^{(2)}$ ,  $z_{n-2} = z_{n-2}^{(2)}$ , für welche also (20) und (21) gleichzeitig erfüllt sind.

Wir beginnen jetzt mit der Verschiebung des Schnittpunktes der Kurve mit  $x = a_{n-3}$ , indem wir  $z_{n-3}$  von 0 an wachsen oder abnehmen lassen, bis die Gleichungen (20), (21) und

$$(28) \quad l_1^{(n-3, n-2)} l_2^{(n-3, n-2)} - c_{n-3} l_1^{(n-3, n-4)} l_2^{(n-3, n-4)} = 0$$

erfüllt sind, während die vier Intervalle  $a_{n-4} a_{n-3}$ ,  $a_{n-3} a_{n-2}$ ,  $a_{n-2} a_{n-1}$ ,  $a_{n-1} a_n$  „nichtoszillatorisch“ sind, die anderen Intervalle zwischen  $a_1$  und  $a_{n-4}$  sind dann von selbst „durchaus nichtoszillatorisch“. Wir verrücken zunächst  $z_{n-3}$  von 0 aus, während wir alle anderen Größen festhalten. Hierauf halten wir  $z_{n-3}$  und  $z_{n-2}$  fest und verschieben  $z_{n-1}$  um so viel, daß (20) erfüllt wird. Dann folgt, daß nur eine einzige Wurzel  $z_{n-1}$  in der Umgebung von  $z_{n-1}^{(2)}$  liegt. Wir verschieben hierauf  $z_{n-2}$  und gleichzeitig  $z_{n-1}$  so, daß (20) erhalten bleibt, (21) wieder erfüllt wird, was wieder, wie oben, nur für ein Wertepaar  $z_{n-2}$  und  $z_{n-1}$  eintritt. Wenn sich also  $z_{n-3}$  stetig ändert, ändern sich die Werte von  $z_{n-2}$  und  $z_{n-1}$ , für welche (20) und (21) erfüllt sind, stetig, da wir bei der Ableitung nirgends benutzten, daß wir von  $z_{n-3} = 0$  ausgingen.

Wir bezeichnen nun wieder zwei Lagen der Kurve, für welche (20) und (21) erfüllt sind, mit I und II. Dann müssen sich wegen (20) I und

II zunächst zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_n$  mindestens einmal schneiden; liegt dieser Schnittpunkt zwischen  $a_{n-1}$  und  $a_n$ , so muß ein zweiter Schnittpunkt wegen (21) zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_{n-1}$  liegen. Dasselbe gilt aber auch, wenn der erste Schnittpunkt zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_{n-1}$  liegt, denn ist dieser Schnittpunkt der einzige in diesem Intervalle, so folgt aus (25), für welches dann die einen der beiden äquivalenten bei seiner Ableitung

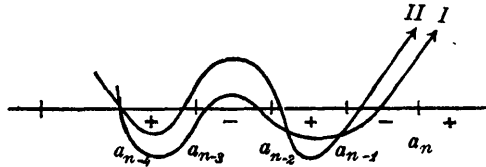


Fig. 5.

gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, daß die Größenbeziehung zwischen

$$l_{1, II}^{(n-2, n-1)} \cdot l_{2, II}^{(n-2, n-1)} \quad \text{und} \quad l_{1, I}^{(n-2, n-1)} \cdot l_{2, I}^{(n-2, n-1)}$$

dieselbe ist, wie wenn der Schnittpunkt der Kurven I und II statt zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_{n-1}$  zwischen  $a_{n-1}$  und  $a_n$  liegen würde. Liegt also nur ein einziger Schnittpunkt zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_n$ , so muß, wenn (21) erfüllt sein soll, ein weiterer Schnittpunkt zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_{n-2}$  liegen. Dann aber haben wir genau wieder dieselbe Sachlage, wie beim Intervalle  $a_{n-2}a_{n-1}$ , und wir können genau wie früher aus Satz 3 schließen, daß das Größenverhältnis der Produkte

$$l_{1, II}^{(n-3, n-2)} \cdot l_{2, II}^{(n-3, n-2)} \quad \text{und} \quad l_{1, I}^{(n-3, n-2)} \cdot l_{2, I}^{(n-3, n-2)}$$

dasselbe ist, wie wenn dieser zweite Schnittpunkt im Intervalle  $a_{n-2}a_{n-1}$  liegen würde, dieses war aber gerade die andere Alternative. Liegt nun  $z_{n-3}^{II}$  höher als  $z_{n-3}^I$ , so liegt II im Intervalle  $a_{n-4}a_{n-3}$ , das eine positive Signatur hat, höher als I, ebenso ist nach den eben erledigten Ausführungen die Wirkung auf die Produkte

$$l_{1, II}^{(n-3, n-2)} \cdot l_{2, II}^{(n-3, n-2)} \quad \text{und} \quad l_{1, I}^{(n-3, n-2)} \cdot l_{2, I}^{(n-3, n-2)}$$

so, als ob II auch im Intervalle  $a_{n-3}a_{n-2}$  ganz oberhalb I liegen würde; da nun die Signatur von  $a_{n-3}a_{n-2}$  negativ ist, so folgt, daß

$$l_1^{(n-3, n-2)} \cdot l_2^{(n-3, n-2)}$$

mit wachsendem  $z_{n-3}$  bei zugeordneter Bewegung von  $z_{n-2}$  und  $z_{n-1}$ , so daß (20) und (21) erfüllt bleiben, sinkt,

$$l_1^{(n-3, n-4)} \cdot l_2^{(n-3, n-4)}$$

dagegen wächst. Es gibt daher eine und nur eine Lage der als allein beweglich angenommenen Werte  $z_{n-1}$ ,  $z_{n-2}$ ,  $z_{n-3}$ , für welche (20), (21) und (28) erfüllt sind, während alle Intervalle zwischen  $a_1$  und  $a_n$  nicht-oszillatorisch sind.

Um nun allgemein den Beweis zu erbringen, nehmen wir an, es gebe zwei Kurven I und II, welche die Geraden

$$(29) \quad x = a_2, \quad x = a_3, \quad \dots, \quad x = a_{n-m-1}$$

in denselben Punkten schneiden, und für welche die Gleichungen:

$$(30) \quad l_1^{(i,i+1)} l_2^{(i,i+1)} - c_i l_1^{(i,i-1)} l_2^{(i,i-1)} = 0$$

für  $i = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n - 1$  erfüllt sind, wobei die  $c_i$  vorgegebene reelle positive Größen, und die inneren Intervalle zwischen  $a_{n-m}$  und  $a_n$  nichtoszillatorisch sind. Dann haben I und II außer den  $n - m - 2$  Schnittpunkten für  $x = a_2, a_3, \dots, a_{n-m-1}$  noch  $m - 1$  Schnittpunkte. Schreiben wir nun statt: „(30) für  $i = k$ “ die Abkürzung  $(30, k)$ , so müssen, wie oben ausgeführt, wegen  $(30, n - 1)$  und  $(30, n - 2)$  zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_n$  zwei Schnittpunkte liegen, die, wenn sie allein in diesen Intervallen liegen, auf die Größenbeziehung zwischen den Produkten

$$l_{1, II}^{(n-3, n-2)} \cdot l_{2, II}^{(n-3, n-2)} \quad \text{und} \quad l_{1, I}^{(n-3, n-2)} \cdot l_{2, I}^{(n-3, n-2)}$$

so wirken, wie wenn sie beide zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_n$  liegen würden. Im anderen Falle liegen aber zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_n$  mehr als zwei Punkte. Im ersteren Falle muß nun zwischen  $a_{n-4}$  und  $a_{n-3}$  mindestens ein Schnittpunkt liegen, der, wenn er allein vorhanden ist, infolge Satz 3 auf die Größenbeziehung zwischen den Produkten

$$l_{1, II}^{(n-4, n-3)} \cdot l_{2, II}^{(n-4, n-3)} \quad \text{und} \quad l_{1, I}^{(n-4, n-3)} \cdot l_{2, I}^{(n-4, n-3)}$$

so einwirkt, wie wenn er zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_{n-2}$  liegen würde. Im zweiten Falle liegt nun entweder wirklich zwischen  $a_{n-3}$  und  $a_{n-4}$  kein Schnittpunkt, oder die Zahl der Schnittpunkte zwischen  $a_{n-4}$  und  $a_n$  ist mindestens vier. Diesen Schluß kann man beliebig fortsetzen. Es folgt daher aus  $(30, n - m + 1)$ , wenn alle vorhergehenden Gleichungen (30) erfüllt sind, daß entweder die Kurven I und II zwischen  $a_{n-m+1}$  und  $a_n$  mehr als  $m - 2$  Schnittpunkte, also gerade  $m - 1$  Schnittpunkte haben, oder daß zwischen  $a_{n-m+1}$  und  $a_n$  gerade  $m - 2$  Schnittpunkte liegen, zwischen  $a_{n-m}$  und  $a_{n-m+1}$  aber ein einziger Schnittpunkt liegt, der auf die Größenbeziehung zwischen den Produkten

$$l_{1, II}^{(n-m, n-m+1)} l_{2, II}^{(n-m, n-m+1)} \quad \text{und} \quad l_{1, I}^{(n-m, n-m+1)} l_{2, I}^{(n-m, n-m+1)}$$

gerade so einwirkt, wie wenn er zwischen  $a_{n-m+1}$  und  $a_{n-m+2}$  liegen würde. Die Größenbeziehung zwischen diesen beiden Produkten ist also bei beiden Alternativen dieselbe, wie wenn zwischen  $a_{n-m}$  und  $a_{n-m+1}$  kein Schnittpunkt liegen würde; zwischen  $a_{n-m-1}$  und  $a_{n-m}$  kann überhaupt kein Schnittpunkt liegen.

Wir nehmen nun an, wir hätten gezeigt, daß man auf eine und nur eine Weise eine Kurve  $z = P(x)$ , welche die  $x$ -Achse in  $a_2, a_3, \dots, a_{n-m}$

schneidet, derart bestimmen kann, daß die Intervalle  $a_1$  bis  $a_n$  nicht-oszillatorisch sind, während die Gleichungen (30) bestehen. Dann verschieben wir  $z_{n-m}$  und gleichzeitig  $z_{n-m+1}, \dots, z_{n-1}$  so, daß (30) erfüllt bleibt. Dabei ändern sich  $z_{n-m+1}, \dots, z_{n-1}$  stetig mit  $z_{n-m}$  und das Produkt  $l_1^{(n-m, n-m+1)} \cdot l_2^{(n-m, n-m+1)}$  ändert sich gerade in entgegengesetztem Sinne, wie das Produkt  $l_1^{(n-m, n-m-1)} \cdot l_2^{(n-m, n-m-1)}$ , so daß es eine und nur eine Wertekombination der Größen  $z_{n-m}, \dots, z_{n-1}$  gibt, sodaß neben den Gleichungen (30) die Gleichung:

$$l_1^{(n-m, n-m+1)} l_2^{(n-m, n-m+1)} - c_{n-m} l_1^{(n-m, n-m-1)} l_2^{(n-m, n-m-1)} = 0$$

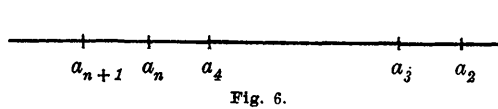
besteht. Denn wir können genau wie oben zeigen, daß man  $|z_{n-m}|$  so weit vergrößern kann, daß  $l_2^{(n-m, n-m+1)}$  bzw.  $l_2^{(n-m, n-m-1)}$  durch Unendlich geht. Setzen wir  $m = n - 2$ , so folgt, daß man die akzessorischen Parameter auf eine und nur eine Weise so bestimmen kann, daß die inneren Intervalle zwischen  $a_1$  und  $a_n$  nichtoszillatorisch sind und die  $n - 2$  Gleichungen:

$$(31) \quad l_1^{(i, i+1)} l_2^{(i, i+1)} - c_i l_1^{(i, i-1)} l_2^{(i, i-1)} = 0$$

für  $i = n - 1, n - 2, \dots, 2$  bestehen.

Setzen wir alle  $c_i = 1$ , so hat das Kreisbogenpolygon einen Orthogonalkreis.

Sind nun alle Größen  $A_{a_i}$  positiv, so behaupten wir, daß in diesem Falle ein reeller Orthogonalkreis existiert, den keine der Seiten des Polygons schneidet. In der Tat wäre dieses nur dann nicht der Fall, wenn die Intervalle  $a_n a_{n+1}$  und  $a_{n+1} a_1$  „wirklich oszillatorisch“ wären. Um dieses als unmöglich nachzuweisen, werfen wir  $a_1$  in das Unendliche, dann



können wir die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß ein reeller Orthogonalkreis existiert und die Intervalle

$a_2 a_3, \dots, a_n a_{n+1}$  nichtoszillatorisch sind. Es gibt also eine zweite Werteverteilung der Parameter, zu der die Kurve II gehören möge, bei welcher die Intervalle  $a_2 a_3, \dots, a_n a_{n+1}$  „nichtoszillatorisch“ sind, während die Gleichungen (31) gelten, in denen  $c_i = 1$  ist. Wir bezeichnen wiederum die Kurve, für welche die Intervalle  $a_1 a_2, \dots, a_{n-1} a_n$  nichtoszillatorisch sind und die Gleichungen (31) bestehen, mit I. Dann müßte II das Intervall  $a_1 a_2$  „wirklich oszillatorisch“ machen, da sonst, wenn wir in (30)  $m = n - 1$  setzen, alle sich daran anschließenden Schlußfolgerungen erfüllt wären und I und II  $m - 1$ , also  $n - 2$ , Schnittpunkte gemeinschaftlich hätten, also zusammenfielen. Aber auch, wenn für II das Intervall  $a_1 a_2$  „wirklich oszillatorisch“ ist, können wir für  $m = n - 2$  die an (30) an-

schließenden Schlußfolgerungen benützen, aus denen folgt, daß die  $n - 3$  Schnittpunkte von I und II rechts von  $a_2$  und links von  $a_n$  liegen. Es macht nun II das Intervall  $a_1 a_2$  stärker oszillatorisch als I. Da aber zwischen  $a_1$  und irgendeinem Punkte des Intervalles  $a_n a_{n+1}$   $n - 1$  Punkte mit Vorzeichenwechsel von  $S(x)$ , nämlich  $a_2, a_3, \dots, a_n$ , ferner  $n - 3$  Schnittpunkte von I und II liegen, so ändert die Differenz  $(P_{II}(x) - P_I(x))S(x)$ , welche im Intervalle  $a_1 a_2$  positiv war,  $n - 1 + n - 3$ , also  $2n - 4$  mal ihr Vorzeichen, also macht II das Intervall  $a_n a_{n+1}$  stärker oszillatorisch als I. Da aber  $a_n a_{n+1}$  für II nichtoszillatorisch ist, so ist dieses also a fortiori für I der Fall. Wir haben also:

**Satz 4.** *Ist  $A$  positiv, so kann man auf eine und nur eine Weise die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß die Längen der Kanten  $a_2' a_2'', a_3' a_3'', \dots, a_n' a_n''$  vorgeschriebene rein imaginäre Größen besitzen, während die Seiten  $a_1' a_2', a_2' a_3', \dots, a_{n-1}' a_n'$  rein imaginäre Längen besitzen. Sind alle Größen  $A_{a_i}$  positiv, so kann man auf eine und nur eine Weise die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß das Kreisbogenpolygon einen Orthogonalkreis besitzt, der reell ist, und den keine Seite schneidet.*

Es sei nun  $A_{a_{n+1}}$  positiv, aber  $A_{a_1}$  also auch alle übrigen  $A_{a_i}$ , negativ. Dann werfen wir  $a_1$  in das Unendliche und zeichnen die Kurve, für welche ein Orthogonalkreis existiert und die Intervalle  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n$  nichtoszillatorisch sind. Da  $A_{a_1}$  negativ ist, so ist jetzt  $x$  für sehr große positive  $x$  negativ, und die Kurve muß die  $x$ -Achse zwischen  $a_3$  und  $a_1$  schneiden, da sonst  $P(x)S(x)$  im zweiten Intervalle  $a_3 a_3$  durchaus positiv, also dieses Intervall „wirklich oszillatorisch“ wäre.

Aus demselben Grunde müssen zwischen  $a_4$  und  $a_1$  zwei Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse, zwischen  $a_n$  und  $a_1$   $n - 2$  Schnittpunkte liegen, sodaß also zwischen  $a_{n+1}$  und  $a_n$  kein solcher Schnittpunkt mehr liegen kann und also das Intervall  $a_n a_{n+1}$  „wirklich oszillatorisch“ ist. Wirft man  $a_n$  in das Unendliche, so folgt für das Intervall  $a_{n+1} a_1$  dieselbe Eigenschaft. Wir haben also in Ergänzung von Satz 4:

**Satz 5:** *Ist  $A_{a_{n+1}}$  positiv, sind dagegen alle anderen Größen  $A_{a_i}$  negativ, so kann man die akzessorischen Parameter auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß das Kreisbogenpolygon einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den die reellen Seiten  $a_n' a_{n+1}'$  und  $a_{n+1}' a_1'$  und nur diese schneiden.*

## § 5.

### Obertheoreme.

Es sei wieder  $A_{a_{n+1}}$  positiv. Wir stellen uns dann die Aufgabe, die akzessorischen Parameter so zu bestimmen, daß die Kantenlängen auf  $a_2' a_2'', a_3' a_3'', \dots, a_{n-1}' a_n''$  vorgegebene rein imaginäre Werte besitzen,

während die Seitenlängen von  $a_2'a_3'$ ,  $a_3'a_4'$ , ...,  $a_{n-1}'a_n'$  die Form  $k_r\pi + \psi_r i$  für  $r = 2, \dots, n-1$  haben, wobei die  $k_r$  von 0 verschiedene, positive ganze vorgegebene Zahlen sind. Der Kürze des Ausdruckes wegen wählen wir wieder die Kantenlängen 0, also den Fall, in welchem ein Orthogonalkreis existiert. Zunächst orientieren wir uns über den Verlauf der

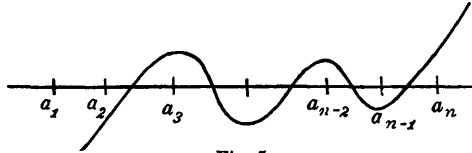


Fig. 7.

Kurve  $z = P(x)$ . Da  $A$  positiv ist, so ist  $z$  für große Werte von  $x$  positiv. Soll also das Intervall  $a_{n-1}a_n$  „wirklich oszillatorisch“ sein, so muß  $P(x)$  zwischen  $a_{n-1}$  und  $a_{n+1}$  eine Nullstelle besitzen. Geradeso

schließen wir, daß es zwischen  $a_{n-2}$  und  $a_{n+1}$  zwei Nullstellen, zwischen  $a_2$  und  $a_{n+1}$   $n-2$  Nullstellen besitzen muß, und da damit  $P(x)$  seine Maximalzahl von Nullstellen erreicht hat, so folgt, daß das Intervall  $a_1a_2$  nichtoszillatorisch ist. Die Nullstellen von  $P(x)$  bezeichnen wir jetzt mit  $X_2, \dots, X_{n-1}$  und legen  $X_2, \dots, X_{n-2}$  zunächst nach  $a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$ ,  $X_{n-1}$  dagegen so weit nach rechts, daß, wenn  $X_2$  rechts von der Mitte des Intervalles  $a_2a_3$  und links von  $a_3$  liegt, während  $X_3$  bzw.  $X_4, \dots, X_{n-2}$  irgendwo in den Intervallen  $a_3a_4$  bzw.  $a_4a_5, \dots, a_{n-2}a_{n-1}$  liegen, die Seite  $a_2'a_3'$  eine Länge besitzen möge, deren reeller Teil größer ist als  $k_2\pi$ . Analoges gelte von den anderen Punkten  $X_3, \dots, X_{n-2}$  in bezug auf ihre Intervalle.

Wir bewegen jetzt  $X_2$  von  $a_2$  aus nach rechts. Dann existiert eine ungerade Anzahl von Werten für  $X_2$ , für welche

$$(32) \quad l_1^{(2,1)} l_2^{(2,1)} - l_1^{(2,3)} l_2^{(2,3)} = 0$$

ist, während die Länge von  $a_1'a_2'$  rein imaginär ist, die Länge von  $a_2'a_3'$  die Form  $k_2\pi + \psi_2 i$  besitzt, und zwar liegen diese Wurzeln links von der Mitte des Intervalles  $a_2a_3$ . Denn der Minuend in (32) ist positiv und nimmt stets ab, wenn wir  $X_2$  nach rechts verschieben, der Subtrahend ändert sich dadurch, daß  $l_1^{(2,3)}$  und  $l_2^{(2,3)}$  den Kreis der reellen Zahlen dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt durchlaufen, so daß er, wenn die Seitenlänge die Form  $k_2\pi + \psi_2 i$  erhält, nach I Satz 1 entweder ständig wachsend die positiven Werte zwischen 0 und  $\infty$  oder ständig abnehmend die Werte von  $+\infty$  bis 0 durchläuft. Im ersten Falle existiert ein und nur ein zu  $k_2$  gehöriger Wurzelwert  $X_2$  der Gleichung (32), im zweiten Falle eine ungerade Anzahl solcher Wurzeln, da die linke Seite von  $-\infty$  durch die negativen Werte zu dem positiven Werte  $l_1^{(2,1)} l_2^{(2,1)}$  gelangt, was eine ungerade Anzahl von Wurzeln anzeigt.

Wir verschieben jetzt  $X_3$  nach rechts und ändern gleichzeitig  $X_2$  so ab, daß (32) erhalten bleibt. Die Zahl der Wurzeln  $X_2$  wird dann bei



festem  $X_3$  immer eine ungerade bleiben und zwar verändern sich die Wurzelwerte  $X_2$  stetig mit  $X_3$ . Es kann dabei jederzeit eine gerade Anzahl von Wurzelwerten  $X_2$  verloren oder gewonnen werden, doch bleibt die Gesamtzahl immer unterhalb einer endlichen Grenze, wenn der absolute Betrag aller  $X$  unterhalb einer festen Grenze bleibt. Daraus folgt nun, daß immer eine der Wurzeln  $X_2$  zum mindesten existiert, die, stets reell bleibend, stetig aus einer der Wurzeln  $X_2$  abgeleitet werden kann, welche, als  $X_3 = a_3$  war, eine zu  $k_2$  gehörige Wurzel von (32) war. Es empfiehlt sich nun, (32) als Gleichung einer Kurve in der Ebene mit den Koordinatenachsen  $X_1 X_2$  zu deuten. Dann erhalten wir also zu  $k_2$  gehörig Kurvenzüge, die von jeder der Geraden  $X_3 = c$  in dem überhaupt in Betracht kommenden Intervalle für  $X_3$  in einer ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten werden. Da nun, wenn (32) erfüllt ist, die Achsen  $a_2' a_2''$  und  $a_3' a_3''$  sich außerhalb der Kugel schneiden, so ist stets  $l_1^{(3,2)} l_2^{(3,2)} > 0$ . Bei der Wanderung von  $X_3$  nach rechts unter zweckmäßiger Abänderung von  $X_2$ , so daß (32) erfüllt bleibt, durchlaufen die Größen  $l_1^{(3,4)}$  und  $l_2^{(3,4)}$  den Kreis der reellen Zahlen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne, wobei aber jetzt teilweise rückläufige Bewegungen dieser Größen nicht ausgeschlossen sind. Es soll nun die Gleichung:

$$(33) \quad l_1^{(3,2)} l_2^{(3,2)} - l_1^{(3,4)} l_2^{(3,4)} = 0$$

gleichzeitig mit (32) erfüllt sein, während  $a_2' a_3'$  bez.  $a_3' a_4'$  Längen von der Form  $k_2 \pi + \psi_2 i$ ,  $k_3 \pi + \psi_3 i$  haben, oder wie wir sagen wollen, zu den Zahlen  $k_2$  und  $k_3$  gehören. Wenn  $X_3$  die Mitte des Intervalles  $a_3 a_4$  überschritten hat, gehört  $a_3' a_4'$  zu einer Zahl, die größer ist als  $k_3$ , wenn  $X_3$  gleich  $a_3$  ist, gehört es zur Zahl 0. Nun ist der Minuend in (33) immer positiv, der Subtrahend kann nur dadurch positiv werden, daß der eine der beiden Punkte  $a_4'$  oder  $a_4''$  durch 0 oder  $\infty$  gehend auf denselben Halbkreis kommt, auf dem der andere, zweite Punkt schon lag. Verläßt der erstere Punkt nun zuerst den Halbkreis, so liegt zwischen dem Eintritt und dem Austritt des ersten Punktes auf dem Halbkreis eine gerade Anzahl von Wurzelpaaren  $X_2$  und  $X_3$  der Gleichungen (32) und (33), wobei wir 0 auch als gerade Zahl rechnen wollen, verläßt aber der andere Punkt den Halbkreis zuerst, so liegt dazwischen eine ungerade Anzahl von Wurzelpaaren. Da aber schließlich  $a_3' a_4'$  zu einer Zahl gehört, die größer ist als  $k_3$ , so tritt die zweite Möglichkeit stets einmal oder eine ungerade Anzahl mal bezüglich der Zahl  $k_3$  ein. Besonderer Erwähnung bedarf dabei nunmehr der Fall, daß  $l_1^{(3,4)} \cdot l_2^{(3,4)}$  etwa die Form  $0 \cdot \infty$  annimmt. Durch  $k_3$  ist nun festgelegt, ob  $l_1^{(3,4)}$  oder  $l_2^{(3,4)}$  unendlich wird; um einen Fall zu fixieren, nehmen wir an, es sei  $l_1^{(3,4)}$  positiv und  $l_2^{(3,4)}$  werde positiv, indem es durch  $\infty$  geht, wobei der Wert der linken Seite von (33), welche wir uns durch  $l_2^{(3,4)}$  dividiert denken, negativ ist.

Von dem Moment des Durchganges an gehört  $a_3' a_4'$  zu  $k_3$ . Es werde jetzt  $l_1^{(3,4)}$  gleich 0,  $l_2^{(3,4)}$  gleich  $\infty$ . Dann wird der Ausdruck einen positiven Wert besitzen; geht dann  $l_2^{(3,4)}$  wieder durch  $\infty$  zurück, so erhalten wir dieselbe Sachlage, wie wenn  $l_1^{(3,4)}$  allein durch 0 gegangen wäre und dementsprechend eine ungerade Anzahl von Wurzeln. Geht dagegen  $l_1^{(3,4)}$  zuerst durch 0, so ist der Ausdruck negativ, weshalb wir eine gerade Anzahl von Wurzeln haben, was wiederum mit dem Obigen übereinstimmt, da der Gesamteffekt derselbe ist, wie wenn  $l_2^{(3,4)}$ , das in den Halbkreis durch  $\infty$  am Anfang gekommen war, diesen als erstes wieder verlassen hätte.

Kehren wir nun zu den Kurvenzügen (32) zurück und betrachten wir davon zunächst diejenigen, welche sich, stets reell bleibend, von Punkten, zu denen für  $a_3' a_4'$  Zahlen kleiner als  $k_3$  gehören, zu Punkten ziehen, zu

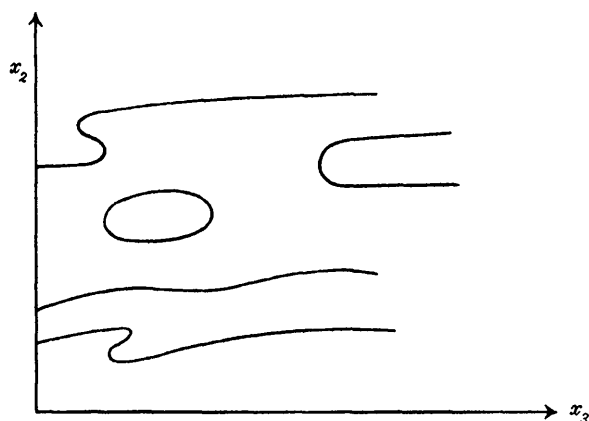


Fig. 8.

denen für  $a_3' a_4'$  Zahlen größer als  $k_3$  gehören. Solche Kurvenzüge sind stets in ungerader Anzahl vorhanden und auf jedem erhalten wir eine ungerade Anzahl von Punkten, für welche (33) so erfüllt ist, daß  $a_3' a_4'$  zur Zahl  $k_3$  gehört. Die Gesamtzahl dieser Punkte ist also ungerade. Dazu kommen dann noch als einzige Möglichkeit Kurven-

züge, deren Punkte für  $a_3' a_4'$  nur Seitenlängen vom reellen Teile  $k_3 \pi$  liefern, die also geschlossen sind, und Kurvenzüge, zu denen Seitenlängen gehören, deren reeller Teil entweder durchaus größer und gleich  $k_3 \pi$  bez. kleiner und gleich  $k_3 \pi$  sind, die also das betreffende Gebiet auf derselben Seite wieder verlassen. Jedesmal erhält man aber auf diesen Kurven nach den vorigen Ausführungen eine gerade Anzahl von Punkten, für welche (33) erfüllt ist und  $a_3' a_4'$  zu  $k_3$  gehört. Nur auf geschlossenen Kurvenzügen, die ganz zu  $k_3$  gehören, kann für Spezialfälle die Gleichung (33) identisch erfüllt sein. Die Gesamtzahl aller dieser Punkte ist also *ungerade*, da wie in II § 4 das identische Erfülltsein ebenso wie eine gerade Anzahl von Wurzeln gilt, da die dazugehörigen Wertepaare in dem dort angegebenen Sinne isoliert von den anderen sind. Wir setzen nun dieses Verfahren fort. Wir verschieben  $X_4$  um ein kleines Stück

und bestimmen  $X_2$  und  $X_3$  aus (32) und (33), so daß  $a_2' a_3'$  zu  $k_2$ ,  $a_3' a_4'$  zu  $k_3$  gehört. Dann haben wir zunächst eine ungerade Zahl von Werten  $X_3$ , wenn wir jedes  $X_3$  als so oft vorhanden zählen, als Punkte  $X_2$ , in der richtigen Vielfachheit gezählt, dazu gehören. Wir erhalten dann für die Gleichungen (32), (33) und

$$(34) \quad l_1^{(4,8)} l_2^{(4,3)} - l_1^{(4,5)} l_2^{(4,5)} = 0$$

im ganzen wieder durch dieselbe Schlußweise eine ungerade Anzahl von Wertetripeln, so daß (32) zu  $k_2$ , (33) zu  $k_3$ , (34) zu  $k_4$  gehört. Dieses Verfahren können wir dann auf alle Intervalle bis  $a_{2n-2} a_{2n-1}$  ausdehnen. Wir nehmen jetzt an, daß wir von Anfang an den Punkt  $X_{n-1}$ , den wir ja nur weit genug nach rechts legen mußten, so weit hinausgelegt haben, daß, wo sich auch  $X_2$  im Intervalle  $a_2 a_3$ ,  $X_3$  im Intervalle  $a_3 a_4$  u. s. f. bis  $X_{n-2}$  im Intervalle  $a_{n-2} a_{n-1}$  befinden möge,  $a_{n-1}' a_n'$  zu einer Zahl gehört, die größer ist als  $k_{n-1}$ . Wir verschieben dann  $X_{n-1}$  nach links, lassen es also abnehmen, dann haben wir immer eine im obigen Sinne ungerade Anzahl von Wertekomplexen  $X_2, X_3, \dots, X_{n-2}$ , für welche die Gleichungen:

$$(35) \quad l_1^{(i,i-1)} l_2^{(i,i-1)} - l_1^{(i,i+1)} l_2^{(i,i+1)} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n-2)$$

so erfüllt sind, daß  $a_2' a_3', a_3' a_4', \dots, a_{n-2}' a_{n-1}'$  zu den Zahlen  $k_2, k_3, \dots, k_{n-2}$  gehören. Dabei kann nun jedes der  $X_i$  das zugehörige Intervall  $a_i a_{i+1}$  verlassen, aber weder mit  $X_{i+1}$  noch mit  $X_{i-1}$  zusammenstoßen, was unmittelbar aus dem vorher durchgeführten Beweise der Realität der  $X_i$  unter den gemachten Voraussetzungen folgt. Es kann also, während die Gleichungen (35) in dem angegebenen Sinne erfüllt sind, z. B.  $X_{n-2}$  in das Intervall  $a_{n-1} a_n$  eindringen und bis  $a_n$  rücken, während aber unter unseren Voraussetzungen  $X_{n-3}$  in das Intervall  $a_{n-1} a_n$  nicht einrücken kann. Sobald aber  $X_{n-2}$  nach  $a_n$  fällt oder  $X_{n-1}$  mit  $X_{n-2}$  zusammenfällt, oder ohne daß dieses eingetreten ist, nach  $a_{n-1}$  fällt, ist das Intervall  $a_{n-1} a_n$  durchaus nichtoszillatorisch geworden. Wir haben also ganz äquivalente Voraussetzungen wie diejenigen, welche uns vorher schließen ließen, daß wir den  $n-3$  Gleichungen (35) durch eine ungerade Anzahl von Wertekomplexen genügen können, daher folgt auch jetzt, daß es stets eine ungerade Anzahl von Wertekomplexen  $X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$  gibt, für welche nicht nur die Gleichungen (34) im obigen Sinne erfüllt sind, sondern auch:

$$(36) \quad l_1^{(n-1,n-2)} l_2^{(n-1,n-2)} - l_1^{(n-1,n)} l_2^{(n-1,n)} = 0$$

ist und  $a_{n-1}' a_n'$  zur Zahl  $k_{n-1}$  gehört. Wir haben also:

**Satz 6:** Sind alle  $A$  positiv, so kann man stets die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß das Kreisbogenpolygon einen reellen Orthogonal-

*kreis besitzt, den  $n - 2$  benachbarte Seiten je in einer vorgegebenen Anzahl schneiden, während die  $n - 1^{\text{te}}$  und  $n + 1^{\text{te}}$  Seite ihn nicht schneidet.*

Eine große Anzahl neuer Theoreme würde sich nun ergeben, wenn man neben Kantenlängen auch gleichzeitig für einen Teil der Intervalle Seitenlängen vorschreibt, doch wollen wir darauf hier nicht näher eingehen.

Augsburg, den 8. April 1909.

---