Zur Topologie der für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung geltenden Obertheoreme.

Mit vier Figuren.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 3. Februar 1917.

Es seien in der Differentialgleichung

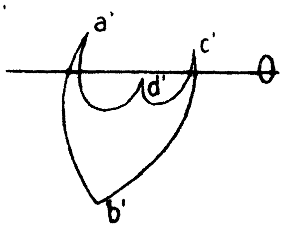
$$\text{(1)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha}{x-a}+\frac{1-\beta}{x-b}+\frac{1-\gamma}{x-c}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)}y = 0$$

zunächst die Größen a, b, c und A reell. Die zu den singulären Stellen a, b, c und $d = \infty$ gehörigen Exponenten sind $0, \alpha$; $0, \beta$; $0, \gamma$; δ' und δ'', wobei $\delta'\delta'' = A$ ist. α, β, γ und $\delta'-\delta''$ seien positive reelle Größen, von denen jede kleiner ist als 1, deren Summe kleiner ist als 2. Dann kann man, wie Klein als erster behauptet hat, stets B als reelle Größe so bestimmen [1]), daß das Kreisbogenviereck, auf welches der Quotient η zweier Partikularlösungen von (1) die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene abbildet, einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den eine Seite des Kreisbogenvierecks, etwa $a'b'$, eine vorgegebene Anzahl m mal schneidet. Dabei entsprechen die Seiten $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ des Kreisbogenvierecks den Intervallen ab, bc, cd, da der reellen x-Achse; $b'c'$ und $d'a'$ schneiden den Orthogonalkreis gar nicht, $c'd'$ dagegen m mal. Wir spiegeln jetzt das Kreisbogenviereck an $c'd'$ und erhalten so auf der η-Kugel einen Fundamentalbereich, der m getrennt liegende Stücke des Orthogonalkreises enthält;

1) E. Hilb, Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. 66, S. 215 f., 68, S. 24 f. (1909, 1910).

diesen m Stücken entsprechen in der x-Ebene m geschlossene sich nicht selbst überschneidende Kurven, von denen jede die vorhergehenden ganz im Innern enthält und die Achse des Reellen je in einem Punkte zwischen a und b sowie zwischen c und d schneidet.

Läßt man für B auch komplexe Werte zu, wobei man dann auch a, b, c und d von vornherein als komplex annehmen kann, so erhält man[1]) entsprechend der Forderung, daß die Substitutionen, welche η bei Umläufen von x um die singulären Punkte a, b, c und d erfährt, einen reellen Kreis der η-Kugel, den „Orthogonalkreis", in sich überführen, unendlich viele neue Obertheoreme, zu deren Charakterisierung wir uns jetzt wenden. Wir denken uns zu diesem Zwecke die singulären Punkte a, b, c, d und a so durch einen Kurvenzug verbunden, daß jede der Linien $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, welche auf der η-Kugel den zwischen ab u. s. w. liegenden Stücken des Kurvenzuges entsprechen, eine möglichst kleine Anzahl von Schnittpunkten mit dem Orthogonalkreis hat. Die Anzahlen m, n, p, q der Schnittpunkte von $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ mit dem Orthogonalkreis nennen wir die charakteristischen Oscillationszahlen der Intervalle ab, bc, cd und da. Schneidet nun, wenn wir m, n, p, q im folgenden als von Null verschieden annehmen, in dem Abbilde $a'b'c'd'$ desjenigen Gebietes der x-Ebene, welches beim Durchlaufen des Kurvenzuges a, b, c, d, a links liegt, $a'd'$ den Orthogonalkreis das erste Mal derart, daß das Stück des Orthogonalkreises zwischen diesem Schnittpunkt und dem ersten Schnittpunkt von $a'b'$ ganz innerhalb des Kurvenvierecks $a'b'c'd'$ liegt, so wollen wir a' eine H a u p t e c k e des Vierecks $a'b'c'd'$, im andern Falle eine N e b e n e c k e nennen. Es sind also in der schematischen Fig. 1, in der die Gerade 0 den Orthogonalkreis darstellt, a' und c' Hauptecken, b' und d' Nebenecken. Unter Zugrundelegung dieser neuen Bezeichnung kann man den Satz aussprechen: M a n k a n n s t e t s z w e i W e r t e v o n B s o b e s t i m m e n, d a ß e i n r e e l l e r O r t h o g o n a l k r e i s e x i s t i e r t, d i e I n t e r v a l l e ab u n d bc v o r g e g e b e n e c h a r a k t e r i s t i s c h e O s c i l l a t i o n s z a h l e n b e s i t z e n u n d f ü r d e n e i n e n W e r t a' H a u p t e c k e, f ü r d e n a n d e r e n N e b e n e k e i n d e m o b e n d e f i n i e r t e n V i e r e c k $a'b'c'd'$ i s t. Sind a, b, c und d reell, so sind diese beiden Werte von B konjugiert komplex. Ferner ergab sich



Figur 1.

1) l. c. Math. Ann. 68, p. 37 f.

für diese Obertheoreme allgemein, daß a' und c', bezw. b' und d' gleichzeitig Hauptecken oder Nebenecken sind; daß aber, wenn a' eine Hauptecke ist, b' eine Nebenecke ist und umgekehrt. Außerdem gehörten zu den Intervallen ab und cd bezw. bc und da die gleichen charakteristischen Oscillationszahlen.

Wir wollen nun unter der speziellen Annahme, daß α, β, γ und $\delta' - \delta''$ gleich den reziproken Werten ganzer Zahlen sind, zeigen, daß diese so charakterisierten Obertheoreme topologisch die einzig möglichen sind, und dann in der x-Ebene den Verlauf der Kurven näher untersuchen, welche dem Orthogonalkreis entsprechen. Der behauptete Satz wird sich aus einer Beziehung zwischen den charakteristischen Oscillationszahlen ergeben, die in gewisser Beziehung als ein Analogon zu den Ergänzungsrelationen aus der Theorie der Kreisbogenpolygone betrachtet werden kann. Aus den Festsetzungen über die Verbindungslinie der singulären Punkte a, b, c, d und a folgt unmittelbar, daß keine der Seiten des Kurvenvierecks a', b', c', d' den Orthogonalkreis in zwei Punkten derart schneiden kann, daß das zwischen diesen Punkten liegende Stück des Orthogonalkreises ganz innerhalb des Kurvenvierecks $a'b'c'd'$ liegt, wobei wir uns das Kurvenviereck auf einer über der η-Kugel gelagerten Riemannschen Fläche schlicht ausgebreitet denken. Bei einem vollen Umlauf um die Seiten des Kurvenvierecks a', b', c', d' muß nun jedem Überschreiten des Orthogonalkreises in bestimmter Richtung ein Überschreiten in entgegengesetzter Richtung entsprechen. Dabei wird beim Durchlaufen einer Seite diese Richtung nicht geändert, ebensowenig beim Durchlaufen zweier Seiten, die in einer Nebenecke zusammenstoßen; dagegen lassen sich die Richtungen zweier Seiten, die in einer Hauptecke zusammenstoßen, nicht allgemein miteinander vergleichen, nur sind sie in der unmittelbaren Nachbarschaft der Ecke als entgegengesetzt anzusehen. Sind in dem Kurvenvierecke a', b', c', d' etwa a' und c' Hauptecken, b' und d' Nebenecken (vgl. Fig. 1), so besteht zwischen den charakteristischen Oscillationszahlen m, n, p, q die Relation

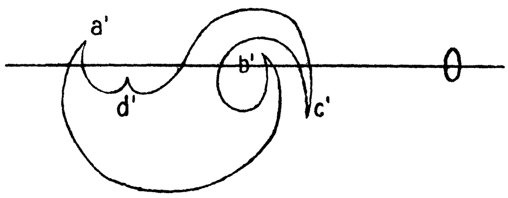
$$m + n = p + q. \tag{2}$$

Wären dagegen für ein Kurvenviereck $a'b'c'd'$ die Ecken a', b' und c' Hauptecken, d' eine Nebenecke, so könnte man nur auf eine Relation der Form

$$(m-k) + (n-k) = p + q \tag{3}$$

schließen, wobei k eine unbekannte ganze Zahl ist und in der auf der folgenden Seite stehenden schematischen Figur, in der wieder die Gerade 0 den Orthogonalkreis darstellt, den Wert 1 besitzt.

Die Einführung des Begriffes der Haupt- und Nebenecken hat natürlich nur Bedeutung, wenn die in einer Ecke zusammenstoßenden Viereckseiten beide den Orthogonalkreis mindestens einmal schneiden; wir machen daher für das Folgende zunächst die Voraussetzung, daß alle vier charakteristischen Oscillationszahlen von Null verschieden sind. Sind alle vier charakteristischen Oscillationszahlen eins, so ist der zu beweisende Satz unmittelbar evident; wir können daher im folgenden die weitere Voraussetzung machen, daß mindestens eine charakteristische Oscillationszahl größer ist als eins. Nun ergibt sich aus den obigen Ausführungen unmittelbar, daß das Kurvenviereck mindestens 2 Hauptecken haben muß. Wir zeigen, daß die aus dem hier behandelten Probleme der linearen Differentialgleichungen entstandenen Kurvenvierecke auch nur zwei Hauptecken besitzen können, die außerdem nicht auf derselben Viereckseite liegen. Es seien nämlich etwa a' und b' Hauptecken. Nun betrachten wir den aus den beiden Kurvenvierecken $a'b'c'd'$ und $a'b'c''d''$ gebildeten Fundamentalbereich, welcher der längs der Linie $bcda$ aufgeschnittenen x-Ebene entspricht. Dann müssen a' und b' im Vier-



Figur 2.

ecke $a'b'c''d''$ Nebenecken sein. Wäre nämlich etwa a' Hauptecke von $a'b'c''d''$, so würde das ganze Stück des Orthogonalkreises zwischen dem ersten Schnittpunkte von $a'd'$ und dem von $a'd''$ innerhalb des Fundamentalbereiches liegen und man könnte die ganze von dem Orthogonalkreis begrenzte Kugelkalotte und damit die ganze Kugel schlicht mit im Sinne der nicht-euklidischen Geometrie kongruenten Fundamentalbereichen überdecken, da nach unserer Voraussetzung über die Größen α, β, γ und $\delta'-\delta''$ Verzweigungspunkte nur auf dem Orthogonalkreis liegen können. Eine solche schlichte Überdeckung der ganzen Kugel mit Fundamentalbereichen ist aber offenbar unmöglich, sobald eine der charakteristischen Oscillationszahlen größer als eins ist. Es sind also in $a' b' c'' d''$ die Ecken a' und b' Nebenecken, c'' und d'' daher Hauptecken, da es mindestens zwei Hauptecken geben muß. Daraus folgt aber

$$p = q + m + n. \tag{4}$$

Gehen wir nun von dem Viereck $a' b' c'' d''$ zu einem neuen Viereck $a'' b'' c'' d''$ über, so daß der von diesen beiden Vierecken gebildete Fundamentalbereich der längs $dabc$ aufgeschnittenen x-Ebene entspricht, so sind jetzt c'' und d'' in $a'' b'' c'' d''$ Nebenecken und also a'' und b'' Hauptecken, also ist

$$m = n + p + q, \tag{5}$$

was aber in Widerspruch mit (4) steht, da m, n, p, q positive von Null verschiedene Zahlen waren. Es sind also im Viereck $a' b' c' d'$ stets zwei gegenüberliegende Ecken Hauptecken, die beiden anderen Nebenecken. Seien nun a' und c' Hauptecken. Dann sind in dem Sechseck $c' d' c'' b'' a' b'$, das der längs $abcd$ aufgeschnittenen x-Ebene entspricht, die Ecken d', c'', a' und b' Nebenecken, b'' und c' Hauptecken und es folgt

$$2p + n = 2m + n, \tag{6}$$

also ist

$$p = m \tag{7}$$

und entsprechend

$$q = n. \tag{8}$$

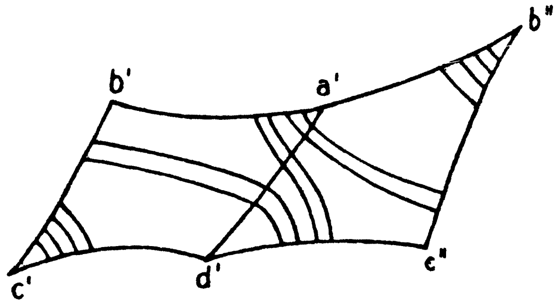
Damit ist aber für den Fall, daß alle charakteristischen Oscillationszahlen von Null verschieden sind, der aufgestellte Satz bewiesen. Mit ganz analogen Schlüssen zeigt man, daß unter den gemachten Voraussetzungen auch in den Fällen, in denen einige charakteristische Oscillationszahlen verschwinden, stets zwei gegenüberliegende Seiten zu denselben charakteristischen Oscillationszahlen gehören. Dieses steht nicht im Widerspruch mit der Tatsache, daß im Falle II in der oben zitierten Annalenarbeit[1]) beim Grundtheorem zwei benachbarte Seiten des Kreisbogenvierecks den Orthogonalkreis einmal schneiden, während die andern beiden dieses nicht tun. In der Tat treten in diesem Falle in den Ecken des Kreisbogenviereckes Verzweigungspunkte auf, so daß die gemachten Schlüsse nicht mehr anwendbar sind[2]).

---

1) l. c. Math. Ann. 66, S. 256.

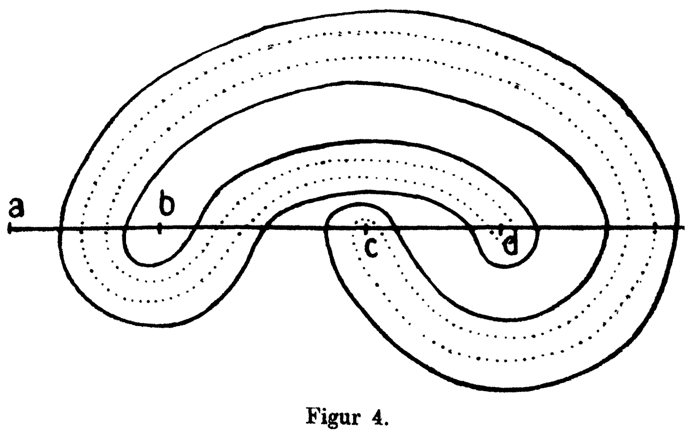
2) Die Voraussetzung, daß die Größen α, β, γ und $\delta' - \delta''$ reziproke ganze Zahlen sind, scheint aber nur für den Fall, daß, wie hier, einige der charakteristischen Oszillationszahlen verschwinden, wesentlich zu sein.

Der Satz, daß in dem Kurvenviereck $a'b'c'd'$ stets zwei gegenüberliegende Ecken Hauptecken, die beiden anderen Ecken Nebenecken sind, sofern die vier charakteristischen Oscillationszahlen von Null verschieden sind, gestattet nun eine Anwendung auf die Untersuchung des Verlaufs derjenigen Kurven in der x-Ebene, welche Stücken des Orthogonalkreises entsprechen. Wir denken uns zu diesem Zwecke die Kurvenvierecke $a'b'c'd'$ und $a'b''c''d'$, welche sich bandförmig über die Kugel hinziehen, so unter Wahrung der Zusammenhangsverhältnisse verzerrt, daß wir sie schematisch als ebene schlichte Vierecke darstellen können in welche wir die Stücke des Orthogonalkreises eingetragen denken. Dann erhalten wir untenstehende Figur, in welcher a' und c' bezw. d' und b'' Hauptecken in den Vierecken $a'b'c'd'$ bezw. $a'b''c''d'$ sind, während die anderen Ecken Nebenecken sind.



Figur 3.

Verfolgt man dann allgemein an Hand einer solchen schematischen Figur, in der zu diesem Zwecke $b'a'$ und $b''a'$, $b'c'$ und $b''c''$, $c'd'$ und $c''d'$ aneinander geheftet zu denken sind, die in



Figur 4.

einem Kurvenzug liegenden Teile des Orthogonalkreises, so folgt, daß man in der x-Ebene als Abbild des Orthogonalkreises so viele geschlossene Kurvenzüge erhält, als der größte gemeinschaftliche Teiler t von m und n angibt. Ist $m = rt$, $n = st$, so schneidet jeder dieser Kurvenzüge die Intervalle ab und cd je r-mal, die Intervalle bc und ad je s-mal.

In Figur 3 und 4 ist $m = 4$, $n = 6$, man erhält also zwei geschlossene Kurven, welche dem Orthogonalkreise entsprechen; die zweite Kurve ist in Figur 4 punktiert gezeichnet. Aus diesen Untersuchungen ergeben sich weiter durch elementare Betrachtungen noch eine große Zahl von Resultaten, die es gestatten, die Aufeinanderfolge der Schnittpunkte allgemein arithmetisch bei gegegebenen m und n anzugeben. Es soll jedoch der Kürze wegen nicht näher darauf eingegangen werden.