

Article

Bemerkungen zur Theorie der linearen
Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Mit 14
Figuren im Tex...)

Klein, F.

in: Periodical issue | Mathematische Annalen -
64 | Periodical
22 page(s) (175 - 196)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.
Papendiek 14
37073 Goettingen
Email: info@digizeitschriften.de



Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen
zweiter Ordnung.

(Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und den Existenztheoremen
der automorphen Funktionen.)

Von

F. KLEIN in Göttingen.

**I. Festlegung der Differentialgleichung. Das Oszillationstheorem.
Das Polygon auf der η -Kugel.**

1. Die folgenden Betrachtungen sollen der Bequemlichkeit halber an das Beispiel einer möglichst einfach gewählten Differentialgleichung geknüpft werden. Wir verstehen unter $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Werte, die folgenden Ungleichungen unterworfen sein sollen:

$$\alpha > b > c; \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq \delta < 1.$$

Die Differentialgleichung, die wir betrachten wollen, sei dann folgende:

$$(1) \quad y'' + y' \left(\frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c} \right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)} (Ax + B) = 0.$$

Wir haben hier vier singuläre Punkte:

$$a, \quad b, \quad c, \quad \infty$$

und a, b, c entsprechend die Exponentenpaare:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ 0 \end{array};$$

die Exponenten δ', δ'' , die zum singulären Punkte ∞ gehören, berechnen sich aus den Formeln:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2, \quad \delta' \delta'' = A,$$

und ihre Differenz $\delta' - \delta''$ soll gleich der Größe δ sein, für welche wir bereits eine Ungleichung aufstellten. Die beiden zum einzelnen singulären Punktes, z. B. zu a , gehörigen Fundamentallösungen von (1) nenne ich Y_a^a, Y_0^a ; sie sind nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Tritt der Grenzfall ein, daß α zu 0 wird, so fallen diese Lösungen in die eine Y_0^α zusammen und es tritt dann daneben in bekannter Weise eine neue Lösung mit logarithmischem Glied, welche mit Y_{\log}^α bezeichnet sein soll.

2. Ich knüpfe übrigens durchweg an die Bezeichnungsweisen und Auffassungsweisen an, von denen ich in meinen alten Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in diesen Annalen und insbesondere in meinem hierauf bezüglichen, von E. Ritter 1894 publizierten autographierten Vorlesungsheft Gebrauch gemacht habe.*). Die Größe B nenne ich den *akzessorischen Parameter*, und es handelt sich nun im folgenden um diejenigen Fragestellungen, welche ich in dem genannten Heft als „eigentlich transzendente“ bezeichnet habe, nämlich um die Festlegung des akzessorischen Parameters B einerseits durch das *Oszillationstheorem*, andererseits durch die *Existenztheoreme der automorphen Funktionen*.

3. Das Oszillationstheorem legt den Parameter B fest, indem es einer *einzelnen* reellen Lösung von (1) bestimmte Bedingungen auferlegt. In seiner ursprünglichen Fassung setzt dasselbe ein Intervall der x -Achse als gegeben voraus, — es möge \overline{mn} heißen —, das keinerlei singulären Punkt enthält. Wir verlangen, daß eine Lösung y von (1) existieren soll, für welche der Quotient $\frac{y}{y'}$ bei $x = m$ und bei $x = n$ je einen vor-
gegebenen reellen Wert annimmt, und die innerhalb des Intervalls \overline{mn} eine vorgegebene Zahl von Malen (die auch Null sein kann) verschwindet; das Oszillationstheorem behauptet, daß durch diese Forderungen der Parameter B gerade eindeutig bestimmt sei. Das Oszillationstheorem läßt sich aber, wenn die Exponentendifferenzen der in Betracht kommenden singulären Punkte reell sind und zwischen 0 und 1 liegen (NB. mit Ausschluß dieser Grenzen), auch auf solche Intervalle ausdehnen, die sich an singuläre Punkte heranziehen. Ich darf dann nur, z. B. bei $x = a$, nicht den Wert von $\frac{y}{y'}$ vorschreiben, sondern muß angeben, mit welcher linearen Kombination $Y_a^\alpha - \lambda Y_0^\alpha$ das y proportional sein soll. In dem Grenzfalle, den wir hier mit betrachten wollen, daß nämlich $\alpha = 0$ wird, tritt eine wirkliche Beschränkung ein: das y muß, wenn anders die Aussage des Oszillationstheorems bestehen bleiben soll, dem Y_0^α proportional sein (es darf, in der Reihenentwicklung des y bei $x = a$, kein logarithmisches Glied auftreten). Man sehe wegen dieser Einzelheiten und der Beweise die Arbeiten von Böcher im American Bulletin von 1898, 1899, bez. das

*) Im Verlag bei Teubner und neuerdings (1906) dort in unverändertem Abdruck neu ausgegeben. Siehe auch das Referat in Bd. 46 dieser Annalen.

zusammenfassende Referat Bôchers in Bd. II der mathematischen Encyclopädie (Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen).

4. In der Theorie der automorphen Funktionen hinwieder betrachtet man den Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ irgend zweier Partikularlösungen von (1), bez. das Kreisbogenviereck, auf welches dieses η die Halbebene der unabhängigen Variablen x (sagen wir, die „positive“ Halbebene x) abbildet. Die Ecken dieses Vierecks, die den singulären Punkten a, b, c, ∞ entsprechen, sollen mit a', b', c', ∞' bezeichnet sein; sie weisen bez. die Winkel $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi, \delta\pi$ auf. Man vergleiche die schematische Figur:

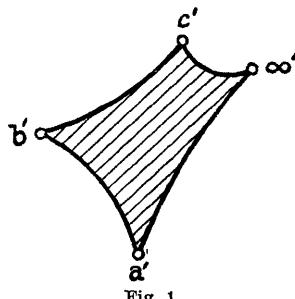


Fig. 1.

Es ist für weitergehende Untersuchungen bekanntlich zweckmäßig, dieses Kreisbogenviereck nicht in der η -Ebene, sondern auf der η -Kugel gelegen zu denken und dann von raumgeometrischen Konstruktionen Gebrauch zu machen. Ich werde mich dabei immer kurzweg der Nicht-euklidischen (projektiven) Maßbestimmung bedienen, deren Fundamentalfläche die η -Kugel ist. So ist, wenn weiterhin in diesem Zusammenhange von der Drehung um eine Achse durch einen bestimmten Winkel die Rede ist, dies immer im zugehörigen Nichteuklidischen Sinne gemeint (Drehung = Kollineation, bei der die η -Kugel in sich übergeht und die Achse Punkt für Punkt festbleibt).

5. Hier mögen, um gewisse spätere Auseinandersetzungen zu erleichtern, gleich folgende Ausführungen Platz finden. Man betrachte die vier Ebenen, in denen die Seiten $\infty'a', a'b', b'c', c'\infty'$ des auf der Kugel gelegenen Kreisbogenvierecks gelegen sind, und folgeweise die vier Raumgeraden, in denen sich zwei aufeinanderfolgende dieser vier Ebenen beziehungsweise schneiden. Ich nenne diese vier Raumgeraden die zu den Eckpunkten a', b', c', ∞' des Vierecks gehörigen Achsen. Jede dieser Achsen schneidet die Kugel noch in einem zweiten Punkte, und dieser mag beziehungsweise a'', b'', c'', ∞'' genannt werden. Was haben die Werte, die η in diesen verschiedenen Punkten annimmt, mit den zu den singulären Punkten a, b, c, ∞ gehörigen Fundamentallösungen von (1) zu tun?

Um hierauf zu antworten, überlege man, daß eine positive Umkreisung der Punkte a, b, c, ∞ der x -Ebene eine Drehung der η -Kugel um die Achsen $a'a'', b'b'', c'c'', \infty'\infty''$ beziehungsweise von der Amplitude $2\alpha\pi, 2\beta\pi, 2\gamma\pi, 2\delta\pi$ liefert (wobei der Sinn der Drehung für einen in a' , bez. b' oder c' oder ∞' befindlichen Beobachter positiv ist). Hiermit halte man zusammen, daß bei den genannten Umkreisungen die Quotienten

$$\frac{Y_\alpha^a}{Y_0^a}, \quad \frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}, \quad \frac{Y_\gamma^c}{Y_0^c}, \quad \frac{Y_{\delta''}^{\infty}}{Y_{\delta''}^{\infty}}$$

die Faktoren

$$e^{2i\pi\alpha}, \quad e^{2i\pi\beta}, \quad e^{2i\pi\gamma}, \quad e^{2i\pi\delta}$$

erhalten. Wir schließen: *in den Punkten a', b', c', ∞' der η -Kugel verschwinden beziehungsweise die Lösungen $Y_\alpha^a, Y_\beta^b, Y_\gamma^c, Y_{\delta''}^{\infty}$, in den Punkten a'', b'', c'', ∞'' aber beziehungsweise die Lösungen $Y_0^a, Y_0^b, Y_0^c, Y_{\delta''}^{\infty}$.* Dabei müssen wir, da unser Viereck die Abbildung der positiven Halbebene x sein soll, alle vieldeutigen Funktionen so verstehen, wie sie bei analytischer Fortsetzung über diese Halbebene hin herauskommen.

6. Um das Gesagte in bestimmte Formeln zu fassen, will ich $Y_{\delta''}^{\infty}$ und Y_0^{∞} bevorzugen. Es sei, bei analytischer Fortsetzung über die positive Halbebene x hin,

$$Y_\alpha^a \text{ mit } Y_{\delta''}^{\infty} = \lambda_1 Y_0^{\infty}, \quad Y_0^a \text{ mit } Y_{\delta''}^{\infty} = \lambda_2 Y_{\delta''}^{\infty}$$

proportional, ebenso

$$\begin{aligned} Y_\beta^b \text{ mit } Y_{\delta''}^{\infty} &= \mu_1 Y_0^{\infty}, & Y_0^b \text{ mit } Y_{\delta''}^{\infty} &= \mu_2 Y_{\delta''}^{\infty}, \\ Y_\gamma^c \text{ mit } Y_{\delta''}^{\infty} &= \nu_1 Y_0^{\infty}, & Y_0^c \text{ mit } Y_{\delta''}^{\infty} &= \nu_2 Y_{\delta''}^{\infty}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\eta = \frac{Y_{\delta''}^{\infty}}{Y_0^{\infty}}$$

und schließen, daß dieses η in den Punkten

$$a', a''; \quad b', b''; \quad c', c''; \quad \infty', \infty''$$

beziehungsweise die Werte annimmt:

$$\lambda_1, \lambda_2; \quad \mu_1, \mu_2; \quad \nu_1, \nu_2; \quad 0, \infty.$$

II. Unsere Fragestellung. Beispiel einer Differentialgleichung mit sechs singulären Punkten.

1. Ich erinnere nunmehr daran, daß ich in verschiedenen früheren Arbeiten die Aufmerksamkeit darauf lenkte (vergl. die obengenannte Autographie), wie sich die Oszillationsbedingungen, denen die einzelne reelle Partikularlösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Intervall \overline{mn} der x -Achse genügt, in der Gestalt des zugehörigen

Kreisbogenpolygons der η -Ebene (oder η -Kugel) widerspiegeln. Man hat vor allem den Satz, daß auf jede Halboszillation des y eine Selbstüberschlagung des dem Intervall \overline{mn} entsprechenden Stücks der korrespondierenden Seite des Kreisbogenpolygons kommt. Diese Überlegungen sollen hier an dem Beispiel der Differentialgleichung (1) in etwas veränderter Fassung wieder aufgenommen werden. Und zwar soll es sich um besondere Fälle der folgenden allgemeinen Fragestellung handeln:

Die Theorie der automorphen Funktionen (im weitesten Sinne genommen, worüber unten nähere Ausführungen) verlangt, über die in den linearen Differentialgleichungen auftretenden akzessorischen Parameter so zu verfügen, daß die entsprechenden Figuren auf der η -Kugel (im vorliegenden Fall unser Kreisbogenviereck) gewisse ausgezeichnete Eigenschaften erhält; wie weit kann man diese Forderungen mit dem Oszillationstheorem in Verbindung bringen, bez. die zugehörigen Existenztheoreme der automorphen Theorie aus dem Oszillationstheorem beweisen?

Es handelt sich also um eine Fortsetzung der Untersuchungen, die den Abschluß der Autographie von 1894 bilden. Wenn ich heute, nach so langer Zeit, auf diese Fragestellungen zurückkomme, so liegt dies daran, daß Hr. Hilbert neuerdings im Verfolg seiner Untersuchungen über Integralgleichungen zu hierher gehörigen Ansätzen gelangt ist (wie so gleich ausgeführt werden soll), und daß wir im Anschlusse daran letztthin in gemeinsamen Seminarübungen, an denen auch Hr. Minkowski teilnahm, die einschlägigen Fragen eben an dem einfachen Beispiel der Differentialgleichung (1) mit unseren fortgeschrittenen Studenten durchgesprochen haben. Ich hoffe sehr, daß hier Ansätze gewonnen sind, deren Verfolg zu einer vollen Aufklärung der bei der vorbezeichneten allgemeinen Fragestellung vorliegenden außerordentlich interessanten Verhältnisse führen kann.

2. Vorab möchte ich noch darauf hinweisen, daß ich den Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und den Existenztheoremen der automorphen Funktionen bereits 1890 in einer Note in den Göttinger Nachrichten („Zur Theorie der Laméschen Funktionen“, p. 90/93 daselbst) an einem anderen einfachen Beispiel kurz berührt habe.

Es handele sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit sechs reellen Verzweigungspunkten:

$$a, \ b, \ c, \ d, \ e, \ \infty,$$

deren jeder die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ aufweist, so daß wir als zugehörige Exponenten die folgenden wählen können:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$(2) \quad y'' + \frac{y'}{2} \left(\frac{1}{x-a} + \cdots + \frac{1}{x-e} \right) + \frac{y}{(x-a) \cdots (x-e)} \left(\frac{x^3}{2} + Bx^2 + B'x + B'' \right) = 0.$$

Die Theorie der automorphen Funktionen behauptet, daß man die drei hier auftretenden akzessorischen Parameter B, B', B'' auf eine und nur eine Weise so festlegen kann, daß die Abbildung der positiven Halbebene x in der η -Ebene folgende Gestalt annimmt:

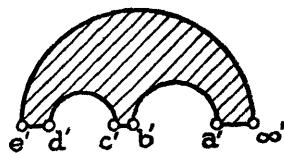


Fig. 2.

Man übersieht sofort, daß die Abbildung der gesamten x -Ebene, wofern man in ihr Einschnitte von a nach b , von c nach d und von e nach ∞ längs der reellen x -Achse anbringt, durch folgende Figur gegeben wird:

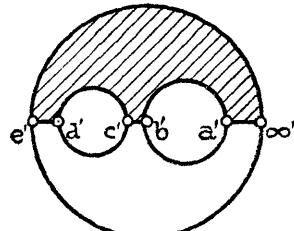


Fig. 3.

in der drei Vollkreise $\widehat{ab}, \widehat{cd}, \widehat{e\infty}$ auftreten. Es heißt dies, daß alle Partikularlösungen von (2), wenn man längs der x -Achse von a nach b und dann von b nach a zurückgeht — oder auch von c nach d und von d nach c zurück, bez. von e nach ∞ und von ∞ nach e zurück — gerade eine Halboszillation ausführen. Solcherweise ist die automorphe Angabe also in mannigfacher Weise von seiten des Oszillationstheorems zu fassen. (Die Ausdehnung des Oszillationstheorems auf Intervalle, die zwischen zwei Verzweigungspunkten, mit den Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0 hindurchgehen, tritt schon in meiner ersten Arbeit über das Oszillationstheorem auf (1881, Math. Ann. Bd. 18; Über Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind).)

III. Über den besonderen Fall der Differentialgleichung (1) mit den Exponentendifferenzen (0, 0, 0, 0). (Hilbertsche Entwickelungen, automorphe Obertheoreme.)

1. Auf die *Beweise*, welche Hilbert für das Oszillationstheorem aus der Theorie der Integralgleichungen gewinnt, kann hier nicht eingegangen werden; man vergl. übrigens einige hierher gehörige Auseinandersetzungen, welche Hr. Hilb neuerdings in Bd. 63 dieser Annalen (p. 38 ff.: Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie) gegeben hat. Es soll hier nur von der besonderen Verbindung zwischen dem Oszillationstheorem und der Theorie der automorphen Funktionen die Rede sein, welche Hilbert für denjenigen Fall der Differentialgleichung (1) aufgefunden hat, wo die Exponentendifferenzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämtlich Null sind (also bei allen singulären Punkten logarithmische Glieder auftreten).

Wir wählen, dieser Annahme entsprechend, bei

$$a, b, c, \infty$$

als Exponenten

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

und haben so die Differentialgleichung:

$$(3) \quad y'' + y' \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)} (x+B) = 0.$$

Das zugehörige Kreisbogenviereck hat vier Spitzen, wie schematisch durch folgende Figur veranschaulicht sei:

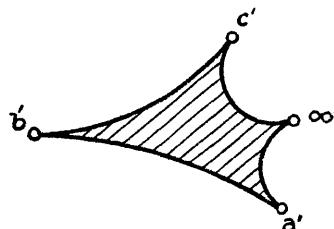


Fig. 4.

und es handelt sich nun, gemäß dem einfachsten Ansatze aus der Theorie der automorphen Funktionen, darum, den akzessorischen Parameter B so zu bestimmen, daß das Viereck von einem durch die vier Ecken gehenden Orthogonalkreis umschlossen wird.

2. Bemerken wir gleich, daß letztere Forderung sich von selbst in folgende zwei spaltet:

a) daß die vier Ecken überhaupt auf einem Orthogonalkreis gelegen sein sollen,

b) daß dieser Orthogonalkreis von keiner Seite des Kreisbogenvierecks durchsetzt werden soll (andernfalls erhält man die von mir so genannten, sogleich zu erläuternden automorphen Obertheoreme).

Ich erinnere ferner daran (cf. Fricke in den Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, p. 412), daß die vier Ecken eines Kreisbogenvierecks mit lauter Nullwinkeln von selbst immer auf einem Kreise liegen; nur ist es im allgemeinen kein Orthogonalkreis.

Wir könnten nun auf die Erörterungen über das Kreisbogenviereck auf der Kugel zurückgreifen, die in I, 5 gegeben worden sind. Wir würden dann bemerken, daß im vorliegenden Falle die Punkte a' und a'' , b' und b'' , c' und c'' , ∞' und ∞'' beziehungsweise zusammenfallen, so daß die vier Achsen des Vierecks in *Kugeltangenten* verwandelt sind. Ich komme hernach hierauf beiläufig zurück, begnüge mich aber übrigens im vorliegenden Falle, wo die geometrischen Verhältnisse so besonders einfach sind, damit, das Kreisbogenviereck in der Ebene zu betrachten.

3. Gemäß den Angaben in I, 3 dürfen wir das Intervall \overline{mn} der x -Achse, auf welches das Oszillationstheorem bezogen werden soll, im vorliegenden Falle nur so bis an singuläre Punkte der Differentialgleichung heranerstrecken, daß wir für die in Betracht kommende Partikularlösung y das Auftreten logarithmischen Verhaltens ausschließen, d. h. (mit Rücksicht auf die Werte der Exponenten) verlangen, daß die Partikularlösung im betreffenden singulären Punkt endlich bleibt.

Das Neue an dem nunmehr zu besprechenden Hilbertschen Ansatz ist nun, daß das Intervall \overline{mn} nicht nur in dem so geschilderten Sinne beiderseits bis an singuläre Punkte herangezogen wird, sondern *daß es zugleich über einen singulären Punkt hinübergezogen wird*. Ich will der bequemeren Zeichnung wegen für diesen im Intervall gelegenen singulären Punkt den Punkt b wählen (an sich könnte ein beliebiger anderer singulärer Punkt genommen werden); wir haben dann nachstehendes Intervall:

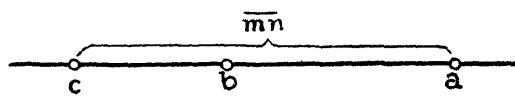


Fig. 5.

Und zwar wird nicht etwa verlangt, daß die in Betracht zu ziehende Partikularlösung y in dem in der Mitte gelegenen singulären Punkt (also in b) endlich ist, vielmehr nur, daß sie über diesen Punkt hinüber in charakteristischer Weise diskontinuierlich fortgesetzt werden soll.

Die Regel hierfür ist einfach folgende: Hat y rechts von b die Darstellung:

$$(4) \quad y = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(x-b) \cdot \mathfrak{P}_2(x-b)$$

(wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen mit reellen Koeffizienten sind), so soll links von b die Darstellung gelten:

$$(4') \quad y = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(b-x) \cdot \mathfrak{P}_2(x-b).$$

Der Verlauf von y wird also schematisch durch folgende Figur gegeben sein:

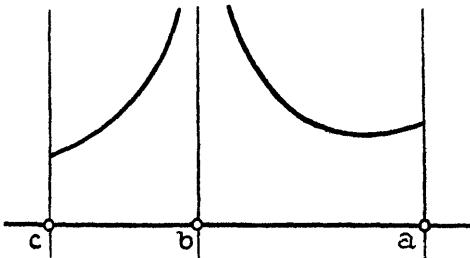


Fig. 6.

(y bei a und c endlich, bei b mit der charakteristischen Unstetigkeit behaftet).

4. Da wir y bei $x = b$ in der vorstehenden Figur positiv unendlich genommen haben, so ist $\mathfrak{P}_2(x-b)$ in der Nähe von $x = b$ negativ (was sogleich zur Geltung kommen wird). Andererseits haben wir die Figur so skizziert, daß weder zwischen a und b , noch zwischen b und c eine Nullstelle von y liegt. Das Oszillationstheorem würde gestatten, in eines dieser beiden Segmente eine beliebige Anzahl von Nullstellen zu verlegen (wobei dann das andere Segment, wie man zeigen kann, von Nullstellen frei bleibt). Aber dies führt, beim Übergange zum η -Viereck, zu den bereits in Aussicht gestellten „Obertheoremen“ und mag hier vorläufig noch ausgeschlossen sein.

Die Hilbertsche Behauptung ist nun, daß dem Auftreten einer solcherweise definierten Partikularlösung y von (3) bei unserem Kreisbogenviereck genau das Vorhandensein eines umschließenden Orthogonalkreises entspricht.

5. Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung auf folgende Weise einsehen. Wir stellen neben das definierte y diejenige Partikularlösung (y), welche in der Nähe von b durch $\mathfrak{P}_2(x-b)$ gegeben ist, also bei $x = b$ endlich ist und sich ohne Diskontinuität über b hinüber fortsetzt. Bei $x = a$ und bei $x = c$ wird dieses (y) — weil es doch von der dort endlich bleibenden Lösung y verschieden ist — notwendig unendlich werden.

Wir setzen nun im Intervalle \overline{ab}

$$(5) \quad \eta = \frac{y}{(y)}$$

und haben für alle anderen Punkte der Halbebene x — weil wir doch

ein zusammenhängendes Abbild dieser Halbebene in der η -Ebene entwerfen wollen — unser η durch analytische Fortsetzung über die genannte Halbebene hin zu erklären. Es kommt dies wegen der charakteristischen Unstetigkeit, die wir in die Definition der reellen Funktion y beim Übergange von \bar{ab} zu \bar{bc} aufgenommen haben, darauf hinaus, daß wir im Intervalle \bar{bc} setzen müssen:

$$(5') \quad \eta = \frac{y + i\pi(y)}{(y)} = \frac{y}{(y)} + i\pi.$$

Unser η ist also im Intervalle \bar{bc} nicht mehr reell, sondern hat den konstanten imaginären Bestandteil $i\pi$.

Jetzt ist es leicht, das Kreisbogenviereck der η -Ebene, welches der positiven Halbebene x entspricht, seiner allgemeinen Gestalt nach festzulegen. Wir überlegen zunächst, daß unser η , wenn x längs der reellen Achse von b bis a geht — nach den Angaben, die wir über das Verhalten von y und (y) an den beiden Enden gemacht haben — auf realem Wege von $-\infty$ bis 0 läuft. Und zwar handelt es sich nur um die einfach durchlaufene Strecke von $-\infty$ bis 0, nicht um eine einfache oder mehrfache Umspannung der ganzen reellen Achse. Denn sonst müßte y im Inneren des Intervales \bar{ab} Nullstellen haben, was wir doch ausdrücklich ausgeschlossen haben. Wir überlegen ferner, daß für die Differenz $\eta - i\pi$, wenn x längs der reellen Achse von b bis c geht, genau dasselbe gesagt werden kann. Damit haben wir für das Kreisbogenviereck der η -Ebene folgende zwei Begrenzungskanten festgelegt:

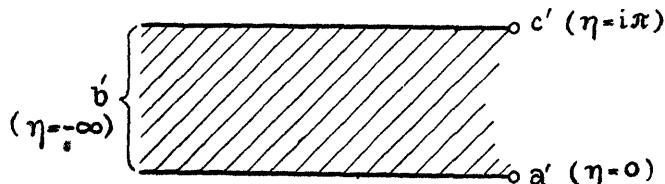


Fig. 7.

und das Viereck hat notwendigerweise eine Gestalt folgender Art:

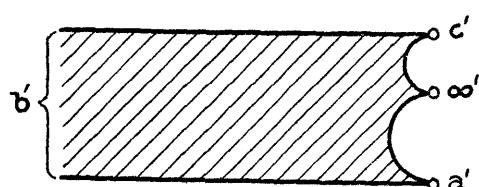


Fig. 8.

Hier sieht man, daß die Ecken a' , b' , c' , ∞' in der Tat auf einem Orthogonalkreise liegen, der das Viereck nirgends durchsetzt, nämlich auf der geraden Linie, welche die Punkte a' , ∞' , c' verbindet, w. z. b. w.

6. Hiermit ist das Grundtheorem der automorphen Funktionen im vorliegenden Falle erledigt. Was aber die in Aussicht gestellten *Obertheoreme* angeht, so entstehen dieselben, wenn man der Partikularlösung y außer ihrem Verhalten an den Stellen a, b, c im Intervalle \bar{ab} bez. \bar{bc} eine beliebige Anzahl von Nullstellen auferlegt. Es handelt sich dann, allgemein zu reden, um Kreisbogenvierecke mit den Winkeln $(0, 0, 0, 0)$, welche ihren Orthogonalkreis ein- oder mehrermal durchsetzen. Die Obertheoreme besagen (wenn ich es zunächst in dieser unbestimmten Form ausdrücken darf), daß man den akzessorischen Parameter B in (3) immer auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß ein sich selbst überschlagendes Viereck von bestimmtem Typus herauskommt. (Daß Obertheoreme dieser Art existieren, habe ich bereits in einer Vorlesung über lineare Differentialgleichungen, die ich 1890/91 hielt, nach verschiedenen Richtungen ausgeführt; diese Vorlesung ist s. Z ebenfalls autographiert worden; ich habe sie aber, da sie vielfach nur vorläufige Ideen enthielt, nie in den Buchhandel gebracht: trotzdem findet man gelegentliche Zitate daraus, z. B. auch in dem bereits genannten Böcherschen Encyklopädieartikel.)

7. Um dies genauer auszuführen, will ich dem y zunächst zwischen b und c eine (und nur eine) Nullstelle auferlegen. Gleichzeitig möge Fig. 8 durch die folgende äquivalente, aber für den vorliegenden Zweck bequemere Figur ersetzt sein:

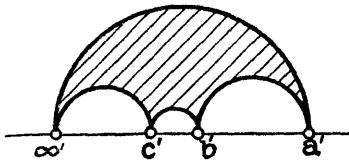


Fig. 9.

Dem neuen y muß ein Viereck entsprechen, das sich von dem so gezeichneten außer durch zweckmäßige Verschiebung der Punkte a', b', c', ∞' dadurch unterscheidet, daß sich die Kreisbogenseite $\bar{b'c'}$ einmal überschlägt. Dies ist nicht anders möglich (aus allgemeinen gestaltlichen Gründen), als wenn sich die gegenüberstehende Seite $a'\infty'$ auch einmal überschlägt. Wir erhalten ein Viereck von folgendem Typus:

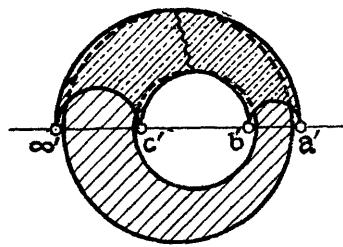


Fig. 10.

von dem wir sagen, daß es aus dem Grundtypus, Fig. 9, durch Einhängung eines Kreisringes quer zu den Seiten $\overline{b'c'}$ und $\overline{a'\infty'}$ entstanden sei (durch Einhängung eines Kreisringes entlang einem Verzweigungsschnitt, der die Seiten $\overline{b'c'}$ und $\overline{a'\infty'}$ quer verbindet). — Vermehrt man jetzt die Zahl der Nullstellen, welche y im Intervalle \overline{bc} besitzen soll, so kommt das darauf hinaus, daß dem Polygon in der geschilderten Weise eine entsprechend größere Zahl von Kreisringen eingehängt werden soll. Hiermit haben wir über eine erste unendliche Serie von Oberpolygonen, und über die Aussage der entsprechenden Obertheoreme, eine volle Übersicht.

Die zweite (ebenso unendliche) Serie kommt hervor, wenn wir dem y im Intervalle \overline{ab} Nullstellen in wachsender Zahl auferlegen. Wieder handelt es sich darum, einem Grundviereck vom Typus der Fig. 9 Kreisringe in beliebiger Zahl einzuhängen, dieses Mal quer zu $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'\infty'}$, also entlang etwa dem in folgender Figur gezeichneten Verzweigungsschnitte:

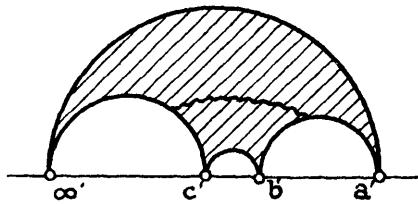


Fig. 11.

Als „Kreisring“ ist hier natürlich ein Ebenenteil bezeichnet, der sich durchs Unendliche zieht und die über $\overline{a'b'}$ bez. $\overline{c'\infty'}$ stehenden Kreise von außen umgibt.

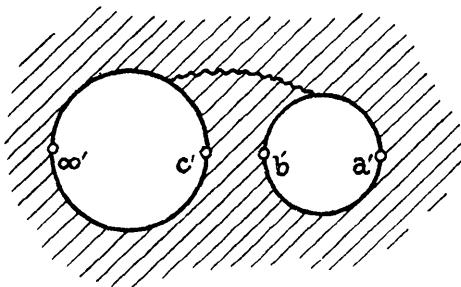


Fig. 12.

8. Es erübrigt noch zu bemerken, daß die Polygone, welche von den Obertheoremen geliefert werden, wenn man sie nach dem Gesetz der Symmetrie unbegrenzt vervielfältigt, unendlich-vielblättrige Überdeckungen ihrer Ebene liefern, so daß man mit ihnen aus der Theorie der eindeutig umkehrbaren und überhaupt der endlich-deutig umkehrbaren automorphen Funktionen heraustritt. Es ist ein Schritt in das allgemeine Gebiet hinein,

das ich überhaupt der Aufmerksamkeit des Mathematikers nachdrücklich empfehlen möchte: man fragt nach den Nichteuklidischen Abmessungen, die das einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entsprechende Kreisbogenpolygon — oder allgemeiner: der ihr entsprechende Fundamentalbereich —, besitzen mag, insbesondere nach der funktionalen Abhängigkeit, die zwischen diesen Abmessungen und den Werten der akzessorischen Parameter der Differentialgleichung besteht.

IV. Inangriffnahme des allgemeinen Falles der Differentialgleichung (1). (Die Involutionsbedingung.)

1. Es soll sich nunmehr darum handeln, für den allgemeinen Fall der Differentialgleichung (1), wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämtlich > 0 (aber < 1) sind, ebenfalls einen Zusammenhang zwischen der Forderung, daß das Kreisbogenviereck einen Orthogonalkreis haben soll, und dem Oszillationstheorem herzustellen. Wir werden eine Regel erhalten, die im Grenzfalle $(0, 0, 0, 0)$ natürlich in den unter III. gegebenen Hilbertschen Ansatz übergeht. Aber die Sache ist doch wesentlich komplizierter als in diesem Grenzfalle und bedarf dementsprechend einiger Vorbereitung.

2. Wir denken uns das Kreisbogenviereck jetzt, wie bereits unter I, 4 erörtert, auf der η -Kugel gelegen. Wir werden einen Orthogonalkreis haben, sobald die vier Seitenebenen des Vierecks in einen Punkt zusammenlaufen (dessen Polarebene hinsichtlich der η -Kugel aus dieser dann den gewünschten Orthogonalkreis ausschneidet). Je nachdem der in Rede stehende Schnittpunkt außerhalb der Kugel, auf der Kugel oder innerhalb derselben liegt, haben wir einen eigentlichen (reellen) Orthogonalkreis, einen Orthogonalkreis, der sich auf einen Punkt zusammenzieht, oder auch einen imaginären Orthogonalkreis. Wir werden im folgenden die Figuren immer für den ersten dieser drei Fälle entwerfen, der für die Theorie der automorphen Funktionen der interessanteste ist und in der Tat bei dem unter III behandelten Spezialfall von selbst vorliegt. Man beachte, daß der Kegel, der sich in diesem Falle vom Schnittpunkte der vier Ebenen an die Kugel legen läßt, reell ist und also die projektive Maßbestimmung, die man für die Ebenen und Strahlen des Punktes auf diesen Kegel gründen kann, hyperbolisch ausfällt.

Statt der vier Seitenebenen betrachten wir jetzt die vier Achsen, die wir oben mit $a'a'', b'b'', c'c'', \infty'\infty''$ bezeichneten, d. h. die Durchschnittsgeraden der aufeinander folgenden Ebenen. Jede dieser Achsen wird gemäß ihrer Definition von der vorangehenden und der nachfolgenden geschnitten, z. B. die Achse $\infty'\infty''$ (die wir fernerhin auszeichnen wollen) einerseits von $c'c''$, andererseits von $a'a''$. Schneiden sich

aber die vier Seitenebenen des Vierecks in einem Punkte, so laufen auch $\infty'\infty''$, $c'c''$ und $a'a''$ in diesem Punkte zusammen (durch den dann natürlich auch $b'b''$ geht). Umgekehrt ist ersichtlicherweise das Zusammenlaufen von $\infty'\infty''$, $c'c''$ und $a'a''$ in einem Punkt die hinreichende Bedingung dafür, daß es einen gemeinsamen Schnittpunkt der vier Ebenen gibt. *Wir werden also das Zusammenlaufen der drei Achsen verlangen.*

3. Ich werde diese geometrische Forderung jetzt in besonderer Weise analytisch ausdrücken. Nach den unter I, 6 gegebenen Entwickelungen gehören zu den Punkten

$$c', c''; \infty', \infty''; a', a''$$

als zugehörige η -Werte

$$\nu_1, \nu_2; 0, \infty; \lambda_1, \lambda_2.$$

Dabei wissen wir, daß einerseits c', c'' , andererseits a', a'' mit ∞', ∞'' je in einer Ebene liegen. Die beiden Ebenen bilden miteinander den (Nicht-euklidischen) Winkel $\delta\pi$. Ich will nun die Ebene $\infty'\infty''a'a''$ — oder vielmehr den Kreis, in welchem sie die η -Kugel schneidet — als „Meridian der reellen Zahlen“ wählen. Dann sind λ_1, λ_2 reelle Größen und ich schreibe, um dies hervorzuheben:

$$(6) \quad \lambda_1 = l_1, \quad \lambda_2 = l_2.$$

Dagegen sind ν_1, ν_2 Produkte reeller Größen n_1, n_2 in den Faktor $e^{-i\pi\delta}$:

$$(6') \quad \nu_1 = n_1 e^{-i\pi\delta}, \quad \nu_2 = n_2 e^{-i\pi\delta}.$$

Man denke sich nun die Ebene $\infty'\infty''c'c''$ um die Achse $\infty'\infty''$ in den Meridian der reellen Zahlen hinübergedreht. So entstehen aus c', c'' zwei Punkte auf diesem Meridian, die wir der Kürze wegen ebenfalls c', c'' nennen wollen; die Anordnung soll folgende sein:

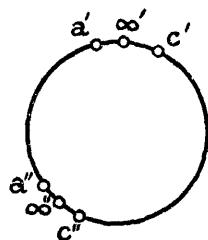


Fig. 13.

Dabei gehören zu den Punkten $\infty', \infty''; a', a''; c', c''$ dieser Figur die reellen η -Werte $0, \infty; l_1, l_2; n_1, n_2$. Wir haben nicht mehr und nicht minder zu verlangen, als daß die in der Figur zu konstruierenden Verbindungsgeraden $\infty', \infty''; a'a''; c', c''$ in einen Punkt zusammenlaufen; anders ausgedrückt: daß die Punktpaare $\infty', \infty''; a', a''; c', c''$ auf dem Kegelschnitte drei Paare einer Involution bilden. Nun drückt sich aber letzteres in bekannter Weise durch die *Involutionsbedingung*

$$(7) \quad l_1 l_2 = n_1 n_2$$

aus, womit wir die analytische Formulierung für das Vorhandensein eines Orthogonalkreises haben.

4. Diese Bedingung verwandelt sich nun vermöge I, 6 sofort in eine Aussage über die gegenseitigen Beziehungen der zu den singulären Punkten ∞ , a und c gehörigen Fundamentallösungen von (1). Um diese Aussage bequem zu fassen, empfiehlt sich noch eine bestimmte Verabredung über die Festlegung der zum Punkte ∞ gehörigen Fundamentallösungen, — eine Verabredung, die dem Wesen nach mit der Hilbertschen Festsetzung für den Fall $(0, 0, 0, 0)$ stimmt, die in den Formeln (4), (4') ihren Ausdruck fand, und die andererseits das genaue Äquivalent ist für die gerade eben vollzogene Drehung um die Achse $\infty' \infty''$, durch die c', c'' auf den Meridian der reellen Zahlen zu liegen kamen. Wir setzen nämlich fest:

Mögen $Y_{\delta'}^\infty, Y_{\delta''}^\infty$ für (hinreichend große) positive reelle Werte von x und damit im ganzen Intervall $\overline{\infty a}$ durch Formeln folgender Art erklärt sein:

$$(8) \quad Y_{\delta'}^\infty = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta'} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right), \quad Y_{\delta''}^\infty = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta''} \cdot \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right),$$

unter $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}''$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten verstanden, so soll für (hinreichend große) negative reelle Werte von x und damit im ganzen Intervall $\overline{\infty c}$ folgende Definition gelten:

$$(8') \quad Y_{\delta'}^\infty = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\delta'} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right), \quad Y_{\delta''}^\infty = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\delta''} \cdot \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right).$$

Hiernach müssen diejenigen Funktionswerte, die sich aus den Lösungen (8) durch analytische Fortsetzung über die positive x -Halbebene hin für das Intervall $\overline{\infty c}$ ergeben, fortan mit

$$e^{-i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta'}^\infty \quad \text{bez.} \quad e^{-i\pi\delta''} Y_{\delta''}^\infty$$

bezeichnet werden.

Nun haben wir früher (in I, 6) festgesetzt, daß in der positiven Halbebene x

$$Y_\gamma^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_1 Y_{\delta''}^\infty, \quad Y_0^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_2 Y_{\delta''}^\infty,$$

proportional sein solle. Wir werden das jetzt für das reelle Intervall $\overline{\infty c}$, indem wir dieses als Begrenzung der Halbebene auffassen, gemäß (8') dahin aussprechen, daß

$$Y_\gamma^c \text{ mit } e^{-i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta'}^\infty - \nu_1 \cdot e^{-i\pi\delta''} \cdot Y_{\delta''}^\infty,$$

$$Y_0^c \text{ mit } e^{-i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta'}^\infty - \nu_2 \cdot e^{-i\pi\delta''} \cdot Y_{\delta''}^\infty,$$

oder, was dasselbe ist, daß

$$Y_\gamma^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_1 \cdot e^{i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta''}^\infty,$$

$$Y_0^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_2 \cdot e^{i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta''}^\infty$$

proportional sein solle.

Aber $\nu_1 e^{i\pi\delta}$ und $\nu_2 e^{i\pi\delta}$ sind gerade die reellen Beträge, die wir in (6') mit n_1 und n_2 bezeichnet haben (während in (6) für die an sich reellen Größen λ_1 , λ_2 die Bezeichnungen l_1 , l_2 eingeführt wurden). So resumiert sich also die Sachlage folgendermaßen:

Definiert man Y_δ^∞ , $Y_{\delta''}^\infty$ für das Intervall $\overline{\infty a}$ durch die Formeln (8), für das Intervall $\overline{\infty c}$ durch die Formeln (8'), so werden die zu a und c gehörigen Fundamentallösungen mit reellen Verbindungen der Y_δ^∞ , $Y_{\delta''}^\infty$ proportional. Nämlich

$$\begin{aligned} Y_\alpha^a \text{ mit } Y_\delta^\infty - l_1 Y_{\delta''}^\infty, & \quad Y_0^a \text{ mit } Y_\delta^\infty - l_2 Y_{\delta''}^\infty \\ \text{und} \quad Y_\gamma^c \text{ mit } Y_\delta^\infty - n_1 Y_{\delta''}^\infty, & \quad Y_0^c \text{ mit } Y_\delta^\infty - n_2 Y_{\delta''}^\infty. \end{aligned}$$

Unser Kreisbogenviereck wird dann und nur dann einen Orthogonalkreis haben, wenn zwischen den so definierten Größen l , n die Involutionsbedingung (7) besteht.

5. Die so gewonnene Aussage ist an sich so einfach wie möglich; sie ist auch ausschließlich auf die reellen Lösungen von (1) bezogen; sie hat aber doch noch nicht die Form, welche für einen Ansatz im Sinne des Oszillationstheorems brauchbar ist. Denn das Oszillationstheorem bezieht sich immer auf eine einzelne Lösung von (1), während hier sechs Lösungen nebeneinander betrachtet werden. Wir werden das Resultat also noch weiter umsetzen müssen, wie in den folgenden beiden Abschnitten geschehen soll.

Vorher bemerken wir noch, daß die Bedingung, die wir in III für das Vorhandensein eines Orthogonalkreises in dem besonderen Falle $(0, 0, 0, 0)$ erhielten, mit dem nunmehr gewonnenen allgemeinen Resultat übereinstimmt. Man knüpfe, um dies zu sehen, etwa an Fig. 13 an. Im Falle $(0, 0, 0, 0)$ sind hier die Achsen $\infty'\infty'', a'a'', c'c''$ alle drei Tangenten des Meridians der reellen Zahlen. Sollen dieselben außerdem durch einen Punkt gehen, so ist das, gemäß der Entstehung der Figur, nur so möglich, daß die Achsen $a'a''$ und $c'c''$ zusammenfallen. Beachten wir noch, daß wir jetzt für jeden singulären Punkt nur eine (doppeltzählende) Fundamentallösung haben, zu der als zweite Lösung eine solche mit logarithmischem Gliede tritt. Die (doppeltzählenden) Fundamentallösungen für die Punkte a und c werden mit Y_0^a und Y_0^c , die Fundamentallösung für den Punkt ∞ mit Y_∞^∞ zu bezeichnen sein. Die zum Punkte ∞ gehörige Lösung Y_{\log}^∞ wird, im Sinne von (8), (8') oder von (4), (4'), so zu definieren sein, daß sie sowohl im Intervalle $\overline{\infty a}$ als im Intervalle $\overline{\infty c}$ reell ausfällt. Wir haben dann:

Soll ein Orthogonalkreis vorhanden sein, so müssen die zu a und c gehörigen Fundamentallösungen Y_0^a und Y_0^c derselben linearen Verbindung von Y_∞^∞ und Y_{\log}^∞ proportional sein.

Und das ist gerade der Sinn der Fig. 6. Nur ist dort statt des Punktes ∞ , den wir hier auszeichneten, als Vergleichspunkt der Punkt b gewählt, für den sich das Sachverhältnis bequemer zeichnen ließ.

V. Vorbereitungen zur Adaptierung des gewonnenen Ansatzes an das Oszillationstheorem. (Abwicklung des Vierkants; Fortsetzung der reellen Lösungen von (1) über die singulären Punkte hinweg.)

1. Um die in IV. erhaltene Involutionsbedingung der Form nach an den Ansatz des Oszillationstheorems anzupassen, werden wir jetzt unsere geometrische Betrachtung und die analytische Behandlung parallel zueinander in gewisser Weise weiter entwickeln.

2. Die Fig. 13 entstand, indem wir die Achse $c'c''$ so um die Achse $\infty'\infty''$ herumdrehten, daß sie, gleich der Achse $a'a''$, in die Ebene der reellen η -Werte fiel. Indem wir durchweg mit Nichteuklidischen Vorstellungen operieren, wollen wir uns vorstellen, daß unser ganzes Vierkant wie ein starrer Körper dieser Drehung unterworfen werde. Dann ist in Fig. 13 das Stück $\infty'c'$ des Meridians der reellen Zahlen eine *Abwicklung* der gleichbenannten Seite unseres auf der η -Kugel gelegenen Kreisbogenvierecks (während das Stück $a'\infty'$ des Meridians von Hause aus eine Seite des Kreisbogenvierecks ist). Wir wollen mit dieser Abwicklung nun fortfahren, indem wir das Vierkant in seiner neuen Lage um $c'c''$ drehen, bis die Punkte b', b'' desselben in zwei Punkte des Meridians der reellen Zahlen fallen, die wir der Kürze wegen ebenfalls mit b', b'' bezeichnen. Dann drehen wir das Vierkant um die so erhaltene neue Achse $b'b''$ und bringen wieder a', a'' auf den Meridian der reellen Zahlen, wo sie jetzt a'_1, a''_1 genannt werden sollen. Folgeweise drehen wir um a'_1, a''_1 und erhalten zwei Punkte ∞'_1, ∞''_1 unseres Meridians, usw. usw. *Wir bekommen auf unserem Meridian eine unendliche Reihe von Punktpaaren:*

$$a', a''; \infty', \infty''; c', c''; b', b''; a'_1, a''_1; \infty'_1, \infty''_1; \dots,$$

die wir natürlich auch nach der negativen Seite unbegrenzt fortsetzen können, und damit eine unbegrenzte Abwicklung der Peripherie unseres Kreisbogenvierecks auf unseren Meridian. Man vergleiche folgende (schematische) Figur:

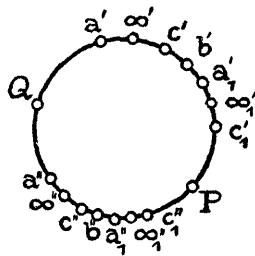


Fig. 14.

3. Schließlich ist auf solche Weise jedes der vier Segmente $\overline{a\infty}$, $\overline{\infty c}$, \overline{cb} , \overline{ba} der reellen x -Achse unendlich oft auf den Meridian der reellen η -Werte übertragen. Und da jeder vollen Abrollung unseres Vierkants eine bestimmte Nichteuklidische Bewegung entspricht, die unseren Meridian in sich überführt, so gehen die unendlich vielen reellen Werte von η , die solcherweise dem einzelnen reellen x zugeordnet sind, aus dem einzelnen η durch wiederholte Anwendung einer bestimmten reellen linearen Substitution hervor: *Das reelle x ist eine linear-automorphe Funktion des reellen η .* Schließlich häufen sich, wenn die Verhältnisse so liegen, wie sie in der Figur gewählt sind, die zu demselben x gehörigen η -Punkte nach rechts und links hin gegen zwei Grenzpunkte P und Q , die in der Figur bereits markiert sind; es sind dies die Fixpunkte der in Rede stehenden linearen Substitution.

4. Ist nun bei unserem Kreisbogenviereck insbesondere ein Orthogonalkreis vorhanden, so hat das zur Folge, daß alle die unendlich vielen Punktpaare

$$\dots a', a''; \infty', \infty''; c', c''; \dots$$

zu P und Q harmonisch sind. Umgekehrt können wir infolgedessen die Bedingung, daß ein Orthogonalkreis vorhanden sei, auf sehr verschiedene Weisen aussprechen, worauf wir im Schlußabschnitt zurückkommen.

5. Wir wollen vorab den analytischen Ansatz ebenso weit fördern. Da ist das erste Hilfsmittel, daß wir in Übereinstimmung mit (8), (8') eine Verabredung treffen, welche genau der festgesetzten Abwickelung unseres Vierecks auf den Meridian der reellen Zahlen entspricht. Wir werden jetzt nämlich nicht nur $Y_{\delta'}^x$, $Y_{\delta''}^x$ auf der reellen x -Achse so definieren, daß sie beiderseits vom Punkte ∞ reell sind, sondern in entsprechender Weise hinsichtlich der Umgebungen der Punkte a , b , c die zu a , b , c gehörigen Fundamentallösungen. Wir setzen also z. B. für $x = a$:

rechts von a :

$$(9) \quad Y_a^a = (x-a)^{\alpha} \mathfrak{P}_1(x-a), \quad Y_0^a = \mathfrak{P}_2(x-a),$$

und links von a

$$(9') \quad Y_a^a = (a-x)^{\alpha} \mathfrak{P}_1(x-a), \quad Y_0^a = \mathfrak{P}_2(x-a),$$

unter \mathfrak{P}_1 , \mathfrak{P}_2 Potenzreihen mit reellen Koeffizienten verstanden.

6. Durch diese Verabredung erreichen wir in der Tat, daß wir jede reelle Lösung y von (1) entlang der reellen x -Achse über jeden singulären Punkt mit einer charakteristischen Unstetigkeit reell fortsetzen können. Ist z. B., wenn wir von rechts an a herankommen,

$$y = c_a Y_a^a + c_0 Y_0^a,$$

so werden wir durch eben diese Formel das y links von a erklären etc. etc.

Schließlich können wir so die einzelne reelle Lösung y für unbegrenzt wiederholte, positive oder negative Durchlaufung der genannten x -Achse immer weiter verfolgen.

7. Um von hier aus Anschluß an die Figur (14) zu erhalten, haben wir nur das in I, 6 vorgeführte η :

$$\eta = \frac{Y_{\delta'}^{\infty}}{Y_{\delta''}^{\infty}}$$

im Sinne der nun getroffenen Verabredungen unbegrenzt an der reellen X-Achse entlang zu verfolgen.

VI. Riccati-Kurven.

1. Die soeben gegebene geometrische und analytische Entwicklung gehen, wie gesagt, durchaus parallel, aber der nähere Vergleich wird schleppend, weil den einfach unendlich vielen reellen Werten von η *zwei-fach* unendlich viele reelle Lösungen von (1):

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

gegenüberstehen. Wir werden diesen Umstand vermeiden, wenn wir jetzt statt der Lösungen von (1) die Lösungen der zugehörigen *Riccatischen Gleichung*

$$(10) \quad z = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 y'_1 + c_2 y'_2}$$

ins Auge fassen.

Den Inbegriff vermöge (10) zusammengehöriger reeller Werte von z und x nenne ich *Riccati-Kurve*. Die Riccati-Kurven ziehen sich vermöge der in V getroffenen Festsetzungen über die singulären Werte $x=a, b, c, \infty$ reell hinweg. Und dabei liegen insofern besonders anschauliche Verhältnisse vor, als durch jeden nicht singulären Punkt der Ebene (z, x) , — d. h. durch jeden Punkt, dessen x von a, b, c, ∞ verschieden ist —, nur eine Riccati-Kurve geht. Die Ebene (z, x) wird, von diesen singulären Stellen abgesehen, die besonderer Untersuchung bedürfen, von den Riccati-Kurven gerade einfach überdeckt. Dabei enthält die Formel (10) ohne weiteres ein übrigens wohlbekanntes geometrisches Gesetz: *Die durch (10) gegebenen einfach unendlich vielen Riccati-Kurven schneiden eine beliebige (nicht singuläre) Vertikale $x=X$ in einer Punktreihe, die zu den Werten $\frac{c_1}{c_2}$ projektiv ist.* — Wir können natürlich ebenso wohl sagen, daß die Punktreihe den Werten $-\frac{c_2}{c_1}$ projektiv sei.

2. Man schreibe jetzt in (10) für $-\frac{c_2}{c_1}$ den Buchstaben η , also:

$$(11) \quad z = \frac{y_1 - \eta y_2}{y'_1 - \eta y'_2},$$

wo η reell sein soll. Die durch den einzelnen Wert dieses η festgelegte Riccati-Kurve schneidet die x -Achse da, wo $y_1 - \eta y_2 = 0$ ist, wo also η gerade gleich dem Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ ist. Hiermit aber nimmt der soeben ausgesprochene Satz die folgende einfache Form an, welche die volle Verbindung mit der Betrachtung von V, speziell der Figur (14), herstellt:

Ordnet man jedem reellen Punkte der x -Achse diejenige Riccati-Kurve (11) zu, die durch ihn hindurchgeht, so schneidet die Schar der Riccati-Kurven eine beliebige nicht singuläre Vertikale $x = X$ in einer Punktreihe, welche zu der entsprechenden, in (14) auf dem Meridian der reellen Zahlen gelegenen Punktreihe direkt projektiv ist.

3. Hiernach lassen sich alle Einzelheiten der Figur 14 auf die Schar unserer Riccati-Kurven übertragen. Beispielsweise entsprechen den Punkten a', a'_1, \dots der Fig. 14 die Schnittpunkte, welche unsere Vertikale $x = X$ bei immer wiederholter Durchlaufung der gesamten x -Achse mit derjenigen Riccati-Kurve hat, die der Lösung y_a^x von (1) entspricht. Alle die Forderungen, die wir hinsichtlich der involutorischen Lage der Punktpaare von Fig. 14 erhoben, übertragen sich, etc. etc.

4. Mehr beiläufig will ich geltend machen, daß sich das Oszillationstheorem in seiner ursprünglichen Fassung (I, 3) in besonders einfacher Weise auf die Riccati-Kurven überträgt. In der Tat, wenn dasselbe in den Endpunkten eines Intervalls $\overline{m n}$ der x -Achse die Werte vorschreibt, die der Quotient $\frac{y}{y'}$ für ein geeignetes y annehmen soll, so heißt das jetzt einfach, daß eine Riccati-Kurve existieren soll, die für $x = m$ und $x = n$ vorgegebene Ordinaten z aufweist, d. h. die zwei gegebene Punkte der Ebene (x, z) verbindet. Den Nullpunkten aber, die man dem y im Intervalle $\overline{m n}$ auferlegen mag, entsprechen direkt Nullpunkte des z , also Schnittpunkte der Riccati-Kurve mit der x -Achse.

VII. Endgültige Adaptierung der Involutionssbedingung (7) an das Oszillationstheorem.

1. Gemäß IV, 5 wird die Aufgabe, die wir noch zu lösen haben, darin bestehen, daß wir die Involutionssbedingung (7) in eine Bedingung für eine *einzelne* Lösung von (1), oder vielmehr jetzt für eine *einzelne* Riccati-Kurve umsetzen.

Dies läßt sich nunmehr folgendermaßen erreichen:

2. Ich scheide aus der Betrachtung der Fig. 14 zunächst alle Punkte aus, die mit b oder c oder ∞ bezeichnet sind, d. h. ich betrachte nur die Punkte a', a'_1, a'_2, \dots und a'', \dots . Will ich von den Punkten a', a'_1, a'_2, \dots aus die Grenzelemente P, Q der Figur festlegen, so werde

ich vier aufeinanderfolgende Punkte, etwa a' , a'_1 , a'_2 , a'_3 gebrauchen. P und Q sind die Fixpunkte derjenigen Kollineation unseres Kegelschnittes (d. h. des Meridians der reellen η -Werte) in sich, bei der a' in a'_1 , a'_1 in a'_2 , a'_2 in a'_3 übergeht. Man konstruiere jetzt (auf unserem Kegelschnitt) zu a' hinsichtlich P und Q den vierten harmonischen Punkt. Dann deckt sich die Involutionsbedingung (7) mit der Forderung, daß dieser vierte harmonische Punkt mit a'' zusammenfällt.

3. Es erübrigt, diese Forderung in die Sprache der Riccati-Kurven zu übertragen. Wir verlangen, daß eine mit bestimmten Unstetigkeiten behaftete Riccati-Kurve bei $x = a$ bestimmte Grenzbedingungen befriedige. Die Kurve soll bei $x = a$ gemäß der Formel

$$z = Y_a^a : \frac{d Y_a^a}{dx}$$

beginnen. Wir verfolgen den Verlauf der Kurve, indem wir viermal hintereinander an der x -Achse entlang laufen (wobei wir an den singulären Stellen a , b , c , ∞ die ein für alle Mal verabredeten Diskontinuitäten anbringen). Auf einer beliebig anzunehmenden nicht singulären Vertikalen $x = X$ mögen dabei vier Schnittpunkte mit der Riccati-Kurve entstehen, die ich a' , a'_1 , a'_2 , a'_3 nenne. Ich suche mir jetzt auf der Vertikalen die Doppelmöglichkeiten P , Q derjenigen Kollineation, welche a' in a'_1 , a'_1 in a'_2 , a'_2 in a'_3 überführt. Ich konstruiere mir ferner hinsichtlich dieser P , Q auf der Vertikalen zu a' den vierten harmonischen Punkt, den ich a'' nenne. Ich unterbreche jetzt den stetigen Verlauf meiner Riccati-Kurve, indem ich von a'_3 zu a'' überspringe und nun längs der x -Achse zurückgehe, bis ich zum ersten Male nach $x = a$ gelange. Die Forderung ist, daß ich bei $x = a$ in

$$z = Y_0^a : \frac{d Y_0^a}{dx}$$

hineinmünde. Dann und nur dann hat das Kreisbogenviereck auf der η -Kugel einen Orthogonalkreis.

4. Hiermit ist das Ziel erreicht, das ich mir in der gegenwärtigen Arbeit gesteckt habe. Es bleibt zu untersuchen, ob die Hilbertschen Methoden ausreichen, das Oszillationstheorem für ein so kompliziertes Bedingungssystem, wie wir es gerade aufstellten, zu beweisen. Der Fall, der dabei zunächst interessiert, ist der, wo die gesuchte Riccati-Kurve im Inneren der Intervalle \bar{ab} , \bar{bc} , $\bar{c\infty}$, $\bar{\infty a}$ keinen Schnittpunkt mit der x -Achse aufweist. Zeigt sich, daß man im einzelnen Intervall statt dessen noch irgend eine Anzahl von Schnittpunkten vorschreiben kann, so treten neben das automorphe Grundtheorem noch entsprechende Obertheoreme.

Zum Schluß möge folgende Andeutung gestattet sein. Die gewöhnliche Theorie der automorphen Funktionen, d. h. die Theorie der *ein-deutigen* automorphen Funktionen bezieht sich nur auf solche Fälle der Differentialgleichung (1), bei denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die reziproken Werte ganzer Zahlen sind. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß der Beweis des formulierten Oszillationstheorems von diesem Umstände abhängen sollte (vielmehr wird es wahrscheinlich genügen, daß die reellen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zwischen Null und Eins liegen). Wir werden also, wenn es gelingt, die Oszillationsbetrachtung durchzuführen, in doppeltem Sinne über die gewöhnliche Theorie der automorphen Funktionen hinausgeführt: einmal, indem sich eventuell Obertheoreme neben das Grundtheorem stellen, dann aber, weil Werte der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ miterledigt werden, die aus der genannten Theorie naturgemäß herausfallen.

Göttingen, im April 1907.