

Article

Ueber die Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkte. Mit einer Figurent...

Schilling, Friedrich

in: Periodical issue | Mathematische Annalen -

51 | Periodical

42 page(s) (481 - 522)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Ueber die Theorie der symmetrischen S -Functionen mit einem einfachen Nebenpunkte.

(Mit einer Figurentafel.)

Von

FRIEDRICH SCHILLING in Karlsruhe i. B.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	482
§ 1. Das specielle Beispiel $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = 1$	485
§ 2. Analytische Definition der S -Functionen mit einfachem Nebenpunkt .	489
§ 3. Allgemeine Eigenschaften der S -Functionen mit einfachem Nebenpunkt	491
§ 4. Der specielle Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$	493
§ 5. Die „symmetrischen“ S -Functionen mit einfachem Nebenpunkt . . .	495
§ 6. Die drei Methoden zur Construction der Kreisbogendreiecke mit ein- fachem Knotenpunkt	498
§ 7. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der <i>ersten</i> Methode	500
§ 8. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der <i>zweiten</i> Methode	502
§ 9. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, zwei reellen und einem rein imaginären oder einem reellen und zwei rein imaginären Winkeln	506
§ 10. Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und drei rein imaginären Winkeln	508
§ 11. Existenzsätze der allgemeinen Function $S(x, \alpha)$ im Hauptfalle. . . .	510
§ 12. Die symmetrischen S -Functionen und ihre Kreisbogendreiecke. . . .	512
§ 13. Das Verhalten der symmetrischen S -Functionen beim Uebergang zum zweiten Grenzdreieck	515
§ 14. Ueberblick über alle Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt für beliebig vorgegebene Exponenten λ, μ, ν	518

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit möchte ich den Hauptinhalt der Untersuchungen wiedergeben, die ich in meiner Habilitationsschrift: „*Geometrisch-analytische Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkt*“*) veröffentlicht habe, wegen der Einzelheiten der analytischen oder geometrischen Ableitungen sei dagegen auf diese ausführliche Darstellung verwiesen.

Unter einem gewöhnlichen Kreisbogendreieck verstehen wir einen einfach zusammenhängenden Bereich in einer Ebene oder auf einer Kugel, der, allgemein zu reden, von drei ein Dreieck bildenden Kreisbogen begrenzt wird und in seinem Innern keinen Verzweigungspunkt und auf seinem Rande mit Ausnahme der Ecken keinen Windungspunkt**) enthält. Es sei ein specielles Kreisbogendreieck mit den Ecken a_1, b_1, c_1 und den Winkeln $\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi$ gegeben (Fig. 1). Die Ecken sollen bei positivem Umlaufen in der Reihenfolge c_1, b_1, a_1 cyklisch auf einander folgen. Wir denken die Kreisbogenseite $c_1 b_1$ über den Eckpunkt b_1 hinaus längs ihres Kreises als Einschnitt in den Bereich

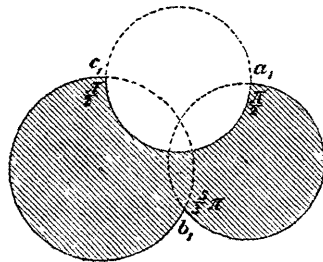


Fig. 1.

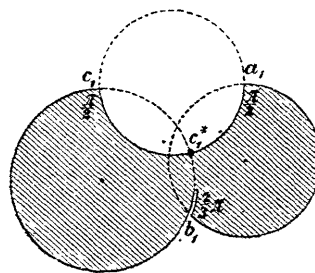


Fig. 2.

hinein fortgesetzt. Den so entstehenden neuen Bereich stellt die Fig. 2 dar, in der wir der besseren Uebersicht wegen die beiden Ufer des Einschnittes etwas von einander getrennt gezeichnet haben. Der Bereich besitzt in den Ecken a_1, b_1, c_1 bez. die Winkel $\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi$. Der Endpunkt d_1 des Einschnittes soll als „einfacher Knotenpunkt“ bezeichnet werden. Unser Bereich ist gleichfalls von Bogen nur dreier Kreise begrenzt; wir nennen ihn ein „Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt“.

*) Nova Acta Leopoldina, Halle a./S. 1897, Bd. 71, pag. 207—300. Diese Arbeit soll in der Folge kurz als „Habilitationsschrift“ citirt werden.

**) Unter einem Windungspunkte auf dem Rande eines Kreisbogenpolygons verstehe ich allgemein den Scheitel eines Winkels, der entweder von π verschieden ist oder aber, falls er gleich π ist, von zwei sich berührenden Kreisbogen gebildet wird.

Aus diesem Beispiel schöpfen wir folgende allgemeine Definitionen:

Ein Punkt auf dem Rande eines von Kreisbogen begrenzten Bereiches ist stets dann und nur dann als ein „einfacher Knotenpunkt“ zu bezeichnen, wenn die in d_1 zusammenlaufenden Kreisbogen der Begrenzung demselben Kreise angehören und den Winkel 2π mit einander bilden.

Allgemein gesprochen verstehen wir unter einem „Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt“ einen einfach zusammenhängenden Bereich, der von Bogen dreier Kreise begrenzt wird und in seinem Innern keinen Verzweigungspunkt, auf seinem Rande mit Ausnahme eines einfachen Knotenpunktes d_1 und dreier Ecken a_1, b_1, c_1 mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ keinen Windungspunkt besitzt*).

Wir wollen die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene eines Argumentes z kurz als die „Halbebene P “ bezeichnen. Die Aufgabe, die Halbebene P (Fig. 3) so auf die Fläche eines gewöhnlichen Kreisbogendreiecks mit den Winkeln $\lambda_0\pi, \mu_0\pi, \nu_0\pi$ abzubilden, dass die Ecken des letzteren bez. dreien auf der Begrenzung der Halbebene P gelegenen „singulären Punkten a, b, c “ entsprechen, wird bekanntlich durch die Schwarz'sche s -Function gelöst. Dieselbe lässt sich definiren als Particularlösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung:

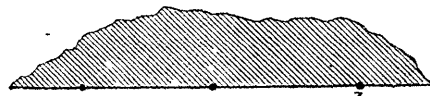


Fig. 3.

$$(1) \quad \frac{\frac{d^3s}{dz^3}}{\frac{ds}{dz}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2s}{dz^2}}{\frac{ds}{dz}} \right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

$$\cdot \left[\frac{1-\lambda_0^2}{2} \cdot \frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu_0^2}{2} \cdot \frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu_0^2}{2} \cdot \frac{(c-a)(c-b)}{z-c} \right].$$

Die Grössen λ_0, μ_0, ν_0 nennen wir die den singulären Punkten a, b, c zugehörigen „Exponenten“.

Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, diejenigen „symmetrischen S -Functionen“ näher zu studiren, deren jede die Halbebene P so auf die Fläche eines Kreisbogendreiecks mit einfachem Knotenpunkt und den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ abbildet, dass den singulären Punkten a, b, c der Halbebene P die Ecken a_1, b_1, c_1 des Kreisbogendreiecks entsprechen. Der Knotenpunkt d_1 stellt das Abbild eines gleichfalls auf der Axe des Reellen gelegenen vierten singulären Punktes d dar. Letzteren bezeichnen wir als „einfachen Nebenpunkt“. Der zu ihm gehörende

*) Ist ein Winkel des Kreisbogendreiecks rein imaginär, so ist die ihm entsprechende Ecke verloren gegangen und an ihre Stelle ein sich unendlich oft zwischen den zwei betreffenden Kreisbogen der Begrenzung windendes Kreisband getreten.

sogleich eine Vorstellung von dem Verhalten der S -Functionen bei dem erwähnten Grenzübergang zu gewähren, im ersten Paragraphen ein einfaches Beispiel zu behandeln.

Gerade wegen der bei diesem Grenzübergang hervortretenden besonderen Eigenschaft dürften es die S -Functionen verdienen, dass ihnen neben dem Interesse, das die neuen Functionen als solche erwecken, in noch höherem Masse Aufmerksamkeit geschenkt wird.

§ 1.

Das specielle Beispiel $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = 1$.

Man versetze die schlichte Ebene der complexen Variablen S längs der Axe des Reellen vom Punkte $d_1 = -\varrho$, wo ϱ den Ungleichungen $0 < \varrho < \infty$ genügen möge, bis nach $+\infty$ mit einem Einschnitt. Der so entstandene Bereich (Fig. 5) sei als specieller Fall eines Kreisbogendreiecks mit einfachem Knotenpunkt angesehen, und zwar mögen als Ecken der Punkt $b_1 = \infty$ und die auf dem positiven Ufer des Einschnittes liegenden Punkte $a_1 = 0, c_1 = 1$, ferner als Knotenpunkt der Punkt d_1 gelten. Den Winkeln an den Ecken a_1, b_1, c_1 entsprechend sind die Exponenten λ, μ, ν bez. gleich 1, 2, 1.

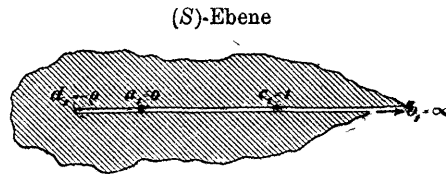


Fig. 5.

Wir stellen uns die Aufgabe, die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene (x) (Fig. 6), die wir in der Folge kurz als Halbebene \mathfrak{P} bezeichnen wollen, so auf diesen Bereich abzubilden, dass die Ecken a_1, b_1, c_1 bez. den Punkten $a = 0, b = \infty, c = 1$ auf der Begrenzung der Halbebene (x) entsprechen. Da die Abbildung auch

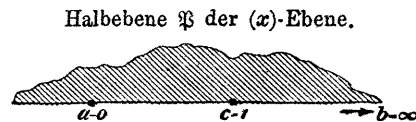


Fig. 6.

in der Umgebung der Punkte 0 und 1 eine conforme ist, so besitzen letztere nicht mehr singulären Charakter; doch ist unserem Zwecke diese Eigenart des ausgewählten Beispiels nicht nachtheilig.

Die abbildende Function $S(x)$ wird durch die Formel gegeben:

$$(3) \quad S = [(\sqrt{1+\varrho} - \sqrt{\varrho})x + \sqrt{\varrho}]^2 - \varrho,$$

die inverse Function durch die Formel:

$$(4) \quad x = \frac{\sqrt{S+\varrho} - \sqrt{\varrho}}{\sqrt{1+\varrho} - \sqrt{\varrho}}.$$

Den Wurzeln $\sqrt{\varrho}$ und $\sqrt{1+\varrho}$ ist das positive Vorzeichen zu geben. $\sqrt{S+\varrho}$ in der letzten Formel hat für alle Punkte des Bereiches der Fig. 5 eine nicht negative zweite Coordinate und für die Punkte seiner auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegenen Halbebene eine nicht negative, für die Punkte seiner auf der negativen Seite der Axe des Reellen gelegenen Halbebene eine nicht positive erste Coordinate.

I. Es möge jetzt der Einschnitt des Kreisbogendreiecks der Fig. 5 sich mehr und mehr zusammenziehen, bis schliesslich der Knotenpunkt d_1 mit der Ecke a_1 zusammenfällt.

Dementsprechend ergibt sich:

$$(3') \quad \lim_{\varrho=0} S = s_1 = x^2.$$

Das Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt ist ohne irgend welche Singularität in ein solches ohne Knotenpunkt übergegangen; dasselbe besitzt die Exponenten $\lambda_1 = \lambda + 1 = 2$, $\mu_1 = \mu = 2$, $\nu_1 = \nu = 1$ und sei als erstes Grenzdreieck bezeichnet. Entsprechend wird die abbildende Function $s_1 = x^2$, d. h. diejenige s -Function, welche die Halbebene \mathfrak{P} in der bestimmten Weise auf das erste Grenzdreieck abbildet.

II. Der Einschnitt möge sich längs der Axe des Reellen in den Bereich hinein weiter und weiter fortsetzen, bis schliesslich der Knotenpunkt d_1 die Ecke b_1 erreicht, d. h. ϱ möge ∞ werden. In diesem Augenblick ist unser ursprünglicher Bereich in das Kreisbogendreieck $a_1 b_1 c_1$ ohne Knotenpunkt mit den Exponenten $\lambda_2 = \lambda = 1$, $\mu_2 = \mu - 1 = 1$, $\nu_2 = \nu = 1$ (d. h. in die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene) und in die auf der negativen Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene zerfallen. Es ergibt sich für endliche Werthe x :

$$(3'') \quad \lim_{\varrho=\infty} S = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\left[\left(\sqrt{\frac{1}{\varrho} + 1} - 1 \right) x + 1 \right]^2 - 1}{\frac{1}{\varrho}} = x.$$

Lässt man ferner erst x und dann ϱ unendlich werden oder umgekehrt, so wird S entschieden unendlich. Dagegen lässt sich kein bestimmter Grenzwert S angeben, wenn man x und ϱ gleichzeitig gegen ∞ convergiren lässt.

Noch klarer gestattet der entsprechende Grenzübergang in der Formel (4) diese Verhältnisse zu überblicken. Uns interessieren allein diejenigen Werthe, die S innerhalb des Bereiches der Figur 5 annehmen kann. Wir wissen, für die Punkte S auf der positiven Seite der Axe des Reellen ist dem reellen Bestandtheile des Ausdrucks $\sqrt{\frac{S}{\varrho} + 1}$ das positive Vorzeichen zu geben. Für sie wird daher:

$$(4') \quad \lim_{\varrho=\infty} x = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\sqrt{\frac{S}{\varrho} + 1} - 1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho} + 1} - 1} = S.$$

Für die Punkte S auf der negativen Seite der Axe des Reellen ist dem reellen Bestandtheile des Ausdrucks $\sqrt{\frac{S}{\varrho} + 1}$ das negative Vorzeichen zu geben. Für sie wird daher:

$$(4'') \quad \lim_{\varrho=\infty} x = \infty.$$

Das Eigenartige des zweiten Grenzüberganges beruht demnach geometrisch darin, dass die Punkte der negativen Halbebene der Figur 5 in der Grenze ihr Abbild sämmtlich in demselben Punkte $x = \infty$ finden, während die Punkte der positiven Halbebene den gleichwerthigen Punkten der Halbebene \mathfrak{P} entsprechen.

Das in der Grenze bleibende Dreieck $a_1 b_1 c_1$, d. h. die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene, ist also der allein noch in Betracht kommende Theil des zerfallenden Bereiches der Figur 5. Dementsprechend berücksichtigen wir auch analytisch nur die für endliche Werthe x gefundene Grenzfunktion $\lim S = s_2 = x$ und vervollständigen sie durch die willkürliche Festsetzung, dass dem Werth $x = \infty$ allein der Werth $S = \infty$ entsprechen soll.

Auch bei dem zweiten Grenzübergang geht das Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt, freilich unter Abschnürung eines Theiles des Bereiches, in ein solches ohne Knotenpunkt, das zweite Grenzdreieck, über, dasselbe besitzt die Exponenten $\lambda_2 = \lambda = 1$, $\mu_2 = \mu - 1 = 1$, $\nu_2 = \nu = 1$. Die abbildende Function wird $s_2 = x$, d. h. diejenige s -Function, welche die Halbebene \mathfrak{P} in der bestimmten Weise auf das zweite Grenzdreieck abbildet.

Dem Knotenpunkt d_1 entspricht der im Intervalle von $-\infty$ bis 0 der Axe des Reellen in der (x) -Ebene gelegene Nebenpunkt:

$$(5) \quad d = \frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho} - \sqrt{1 + \varrho}}.$$

Dem Uebergang vom ersten Grenzdreieck zu den Kreisbogendreiecken mit Knotenpunkt bis zum zweiten Grenzdreieck entspricht die kontinuierliche Wanderung des Nebenpunktes d auf der Axe des Reellen von 0 bis $-\infty$.

Die Formel (3) vermittelt also den Uebergang von der Function $s_1 = x^2$ zur Function $s_2 = x$, der abgesehen von der Umgebung des Punktes $x = \infty$ durchaus stetig ist.

In ihrem Gesamtverlauf bildet die Function S die schlichte Ebene des Argumentes x auf die zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit zwei einfachen Verzweigungspunkten an den Stellen d_1 und ∞ ab. Wird

ϱ unendlich, so vereinigen sich beide Verzweigungspunkte unter gleichzeitiger Abschnürung des einen Blattes*).

*) An die Stelle des Parameters ϱ , der den Ungleichungen $0 \leq \varrho \leq +\infty$ genügt, führen wir einen Parameter p ein vermöge der Gleichung:

$$\varrho = \frac{(p-1)^2}{4p}$$

und setzen in Uebereinstimmung mit den für ϱ gültigen Ungleichungen fest, dass p den Ungleichungen $1 \geq p \geq 0$ genügen soll. Dann nehmen die Formeln (3) und (5) folgende einfache Gestalten an:

$$(3^*) \quad S = px^2 - (p-1)x,$$

$$(5^*) \quad d = \frac{p-1}{2p}.$$

Da indess die besonders wichtige Formel (4) durch Einführung von p nicht wesentlich einfacher wird, haben wir im Text von letzterer keinen Gebrauch gemacht.

Die Formel (3*) giebt jedoch Anlass, folgende allgemeinere Function zu betrachten:

$$(3^{**}) \quad S_n = px^{n+1} - (p-1)x^n,$$

woselbst n eine beliebige, positive ganze Zahl sei. Für jeden Werth von p innerhalb des für diese Grösse festgesetzten Intervalles bildet die Function S_n die Halbebene \mathfrak{P} gleichfalls auf ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt ab. Letzteres besitzt wieder die Ecken $a_1 = 0$, $b_1 = \infty$, $c_1 = 1$ und die Exponenten $\lambda = n$, $\mu = n+1$, $\nu = 1$. Der zugehörige Nebenpunkt ergibt sich als Wurzel der Gleichung $\frac{dS_n}{dx} = 0$ durch die Formel:

$$(5^{**}) \quad d = \frac{n \cdot (p-1)}{(n+1) \cdot p}.$$

Die Formel (3**) vermittelt in ganz entsprechender Weise wie im Falle $n=1$ des Textes den Uebergang von der Function $s_{1,n} = x^{n+1}$ zur Function $s_{2,n} = x^n$ dadurch, dass p von 1 bis 0 stetig abnimmt. In ihrem Gesamtverlauf bildet die Function S_n die schlichte Ebene des Argumentes x auf die $(n+1)$ -blättrige Riemann'sche Fläche ab, die im Punkte ∞ einen $(n+1)$ -fachen, im Punkte 0

einen n -fachen, im Punkte $d_1 = -\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(p-1)^{n+1}}{p^n}$ einen einfachen Ver-

zweigungspunkt besitzt. Wird $p=1$, so vereinigt sich der einfache Verzweigungspunkt d_1 ohne weitere Singularität mit dem n -fachen Verzweigungspunkte 0 zu dem $(n+1)$ -fachen Verzweigungspunkte an der Stelle 0. Wird dagegen $p=0$, so vereinigt sich der einfache Verzweigungspunkt d_1 unter gleichzeitiger Abschnürung eines einzelnen Blattes mit dem $(n+1)$ -fachen Verzweigungspunkt ∞ , so dass eine n -blättrige Riemann'sche Fläche mit den beiden n -fachen Verzweigungspunkten 0 und ∞ übrig bleibt. Die Function S_n vermittelt daher, wie wir auch kurz sagen können, den Uebergang von der $(n+1)$ -blättrigen Riemann'schen Fläche mit den beiden $(n+1)$ -fachen Verzweigungspunkten 0 und ∞ zu der n -blättrigen Riemann'schen Fläche mit den beiden n -fachen Verzweigungspunkten 0 und ∞ .

§ 2.

Analytische Definition der S -Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

Wir bezeichnen die reellen Theile der in der folgenden Untersuchung auftretenden Grössen λ, μ, ν (mit oder ohne unteren Index) mit λ', μ', ν' , ihre imaginären Theile mit $i\lambda'', i\mu'', i\nu''$. In die vorkommenden Differentialgleichungen treten nur die Quadrate der Grössen λ, μ, ν ein. Dies schafft uns die Berechtigung zur folgenden Festsetzung: Jede der Grössen λ, μ, ν soll (falls sie nicht gleich 0 ist) so gewählt sein, dass, wenn ihre erste Coordinate nicht verschwindet, diese positiv ist, wenn die erste Coordinate aber verschwindet, dann die zweite positiv ist.

Den Ausgangspunkt unserer allgemeinen Untersuchung bildet die gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$(2) \quad \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2 = R(z),$$

wo

$$R(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)} \cdot \left[\frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2} \cdot \frac{(b-c)(b-a)(b-d)}{z-b} \right. \\ \left. + \frac{1-\nu^2}{2} \cdot \frac{(c-a)(c-b)(c-d)}{z-c} - \frac{3}{2} \frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{z-d} + A \right]$$

ist. In ihr bezeichnen a, b, c, d die „singulären Punkte“, $\lambda, \mu, \nu, 2$ sind die zu ihnen gehörenden, im allgemeinen complexen „Exponenten“, A ist der „accessorische Parameter“. Wir setzen voraus, dass die Punkte a, b, c, d sämmtlich im Endlichen gelegen sind.

Ferner nehmen wir zunächst an, dass d von a, b, c verschieden ist. Wir machen den für die Umgebung der singulären Stelle d gültigen Ansatz:

$$(6) \quad S = \delta \log(z-d) + (z-d)^{-2} + \delta_1(z-d)^{-1} + \delta_2 + \delta_3(z-d) + \dots$$

Die Coefficienten $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ seien von z unabhängige Grössen. Durch einfache Ausrechnung ergibt sich zunächst:

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2 = -\frac{3}{2} \frac{1}{(z-d)^2} + \frac{3}{2} \frac{\delta_1}{z-d} - \left(4\delta + \frac{9}{8} \delta_1^2 \right) + \dots,$$

wo in jedes folgende Glied ein neuer Coefficient δ_i linear eintritt. Wir entwickeln auch die rechte Seite der Differentialgleichung (2) nach Potenzen von $(z-d)$ und führen hierbei folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}\xi &= (d-b)(d-c) + (d-c)(d-a) + (d-a)(d-b), \\ \eta &= \frac{1-\lambda^2}{2}(a-b)(a-c) + \frac{1-\mu^2}{2}(b-c)(b-a) + \frac{1-\nu^2}{2}(c-a)(c-b), \\ \eta_2 &= \lambda^2(a-b)(a-c)(d-b)(d-c) + \mu^2(b-c)(b-a)(d-c)(d-a) \\ &\quad + \nu^2(c-a)(c-b)(d-a)(d-b), \\ \xi &= \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}.\end{aligned}$$

Die Coefficientenvergleichung beider Potenzreihen ergibt die Gleichung:

$$\delta = -\frac{\xi^2}{8} \cdot \left\{ \left[A - \eta + \frac{1}{2} \xi \right]^2 - \eta_2 \right\}.$$

Wir verlangen jetzt, dass der Coefficient δ verschwindet, d. h. dass das logarithmische Glied im Ansatz (6) fortfällt. Diese Forderung besagt mit anderen Worten: Der singuläre Punkt d soll nach der Bezeichnungsweise des Herrn Klein ein „einfacher Nebenzpunkt“ der Differentialgleichung sein.

Dann erhalten wir die folgende Bedingungsgleichung für den accessorischen Parameter A :

$$(7) \quad A = \eta - \frac{1}{2} \xi + \sqrt{\eta_2}.$$

Wir stellen nunmehr folgende Definition* auf:

1. Eine Function des Argumentes z ist eine „S-Function mit einfachem Nebenzpunkt“, wenn sie für bestimmte Werthe der Grössen $a, b, c, d, \lambda, \mu, \nu$ einer solchen Differentialgleichung (2) genügt, deren accessorischer Parameter A die Bedingung (7) erfüllt.

In der ganzen folgenden Untersuchung setzen wir als selbstverständlich voraus, dass der accessorische Parameter A der Differentialgleichung (2) die Bedingung (7) befriedigt.

Der Umstand, dass die Bedingung (7) eine Quadratwurzel enthält, findet seinen Ausdruck in dem Satze:

2. Für jeden derjenigen beiden Werthe des Nebenzpunktes d , für welche η_2 verschwindet, ergibt sich bei gegebenen Werthen $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ nur eine einzige Differentialgleichung, für jeden anderen Werth des Nebenzpunktes d dagegen zwei verschiedene Differentialgleichungen, deren Particularlösungen S-Functionen sind.

Fällt in der Differentialgleichung (2) d im speciellen Falle mit einem der singulären Punkte, etwa mit a , zusammen, so geht die Gleichung in die folgende über:

$$(2^*) \quad \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \cdot \left\{ \frac{1-(\lambda \pm 1)^2}{2} \cdot \frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2} \cdot \frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2} \cdot \frac{(c-a)(c-b)}{z-c} \right\},$$

wo auf der rechten Seite, der Wurzel der Bedingung (7) entsprechend, das obere oder das untere Vorzeichen gültig ist.

Wir verstehen unter $\{\lambda - 1\}$ die Grösse $1 - \lambda$, wenn $\lambda' < 1$, $\lambda - 1$, wenn $\lambda' > 1$, $i|\lambda''|$, wenn $\lambda' = 1$ ist. Die Vergleichung der Differentialgleichung (2*) mit der Differentialgleichung (1) ergibt den Satz:

3. Ist d mit a zusammengefallen, so definirt die sich ergebende Differentialgleichung (2*), je nachdem das obere oder untere Vorzeichen auf ihrer rechten Seite gilt, s -Functionen mit den Exponenten $\lambda + 1, \mu, \nu$ oder s -Functionen mit den Exponenten $\{\lambda - 1\}, \mu, \nu$. Entsprechendes gilt, wenn d mit b oder c zusammenfällt.

§ 3.

Allgemeine Eigenschaften der S -Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

Ich übergehe es hier alle diejenigen Eigenschaften der S -Functionen zusammenzustellen, die sich leicht aus der Differentialgleichung (2) ergeben und ihre Analoga in der Theorie der s -Functionen finden. Nur folgende beiden Sätze möchte ich der späteren Anwendung wegen anführen:

4. Ist S_0 eine Particularlösung der Differentialgleichung (2), so stellt sich das allgemeine Integral S derselben als gebrochene lineare Function von S_0 mit beliebigen, doch von z unabhängigen Coefficienten dar:

$$S = \frac{\alpha S_0 + \beta}{\gamma S_0 + \delta}.$$

5. Führt das Argument z einen vollen positiven Umlauf um einen der singulären Punkte a, b oder c aus, so geht ein Zweig S_0^* einer beliebigen Particularlösung S_0 in einen neuen Zweig über, der sich bez. durch eine gebrochene lineare Substitution A, B oder Γ mit von z unabhängigen Coefficienten aus S_0^* ergibt.

Wir geben den Punkten a, b, c jetzt die speciellen Werthe $0, \infty, 1$. Indem wir zugleich an Stelle von z und d bez. x und r einführen, erhalten wir:

$$(8) \quad \frac{S'''}{S''} - \frac{3}{2} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2 = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \left\{ -\frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1-\mu^2}{2} + \frac{1-\nu^2}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2} \frac{r(r-1)}{(x-r)^2} + \frac{A_1}{x-r} \right\},$$

wo

$$(9) \quad A_1 = -r + \frac{1}{2} + \sqrt{f(r)},$$

und

$$(10) \quad f(r) = \mu^2 r^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)r + \lambda^2$$

ist.

Damit der Werth $r = \infty$ nicht eine Ausnahmestellung einnimmt, setzen wir $r = \frac{r_1}{r_2}$ und betrachten an Stelle der Function $f(r)$ die Form $\varphi(r_1, r_2) = r_2^2 \cdot f(r)$ oder:

$$(10^*) \quad \varphi(r_1, r_2) = \mu^2 r_1^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2) r_1 r_2 + \lambda^2 r_2^2.$$

Wir legen fernerhin allein die einfachere, wenn auch weniger symmetrisch gebaute Differentialgleichung (8) mit der Bedingung (9) unserer Untersuchung zu Grunde, wodurch ihrer Allgemeinheit keinerlei Abbruch geschieht

Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

I. Der specielle Fall. Die Form $\varphi(r_1, r_2)$ verschwindet identisch, d. h. es ist $\lambda = \mu = \nu = 0$. Diesen Fall besprechen wir sogleich im nächsten Paragraphen näher.

II. Der Hauptfall. Die Gleichung $\varphi(r_1, r_2) = 0$ besitzt zwei von einander getrennte Wurzeln:

$$r^* = \frac{r_1^*}{r_2^*} \quad \text{und} \quad r^{**} = \frac{r_1^{**}}{r_2^{**}}.$$

Es ist:

$$(11) \quad r^* \text{ bez. } r^{**} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \pm \sqrt{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2\mu^2} \\ = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \mp \sqrt{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}.$$

Die Wurzel der rechten Seite soll den Hauptwerth annehmen. Die oberen Vorzeichen gelten für die Grösse r^* , die unteren für die Grösse r^{**} .

Wir deuten zweckmässig den Parameter r auf einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche, deren einzige Verzweigungspunkte die Punkte r^* und r^{**} sind. Verschwindet einer der Exponenten λ, μ, ν , so ist der zugehörige singuläre Punkt nothwendig eine Wurzel der Gleichung $\varphi(r_1, r_2) = 0$ und umgekehrt, d. h.

6. An einer der Stellen $0, \infty, 1$ liegt ein Verzweigungspunkt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche stets dann und nur dann, wenn bez. λ, μ oder ν gleich Null ist.

III. Der Ausnahmefall. Die Gleichung $\varphi(r_1, r_2) = 0$ besitzt eine Doppelwurzel r^{***} . Dann muss einer der Factoren des unter dem Wurzelzeichen der Gleichung (11) stehenden Ausdrucks verschwinden.

7. Der Ausnahmefall tritt stets dann und nur dann ein, wenn die Bezeichnung der Exponenten (nicht ohne Rücksicht auf die zu Anfang des § 2 gemachte Festsetzung) sich so wählen lässt, dass die Gleichung besteht $\lambda = \mu + \nu$. Diese Annahme über die Bezeichnung der Exponenten wollen wir im Ausnahmefalle im Folgenden stets als erfüllt voraussetzen.

Es ist dann:

$$(12) \quad r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Die Bedingung (9) zerfällt jetzt in die beiden:

$$(9^a) \quad A_1 = -r + \frac{1}{2} + \mu \left(r - \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

oder:

$$(9^b) \quad A_1 = -r + \frac{1}{2} - \mu \left(r - \frac{\lambda}{\mu} \right).$$

Wir haben im Ausnahmefalle (im Gegensatze zum Hauptfalle) für gegebene Exponenten λ, μ, ν zwei analytisch völlig von einander verschiedene Bedingungen (9^a) und (9^b). Dementsprechend deuten wir jetzt zweckmässig den Parameter r auf zwei einblättrigen Riemann'schen Flächen, die nur im Punkte $r = r^{***}$ zusammenhängen.

8. Ist speciell $\nu = 0$ (und damit $\lambda = \mu$), so ist der Punkt 1 der Doppelpunkt; an den Stellen 0 und ∞ dagegen kann der Doppelpunkt bei unserer Festsetzung niemals liegen.

Die der Bedingung (9^a) oder (9^b) entsprechenden Differentialgleichungen unterscheiden wir bez. als solche vom Typus A oder B . Sie gehen indess für $r = r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}$ in dieselbe specielle Differentialgleichung mit dem Parameter:

$$(9^c) \quad A_1 = -\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}$$

über. Wir nennen diese die Differentialgleichung des Uebergangsfalles.

9. Die Function $S = x^{-\lambda}(x-1)^\nu$ stellt, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt, eine Particularlösung der Differentialgleichung des Uebergangsfalles dar.

§ 4.

Der specielle Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Die Differentialgleichung (8) nimmt die folgende einfache Form an:

$$(8^*) \quad \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2 = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \left\{ -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r(r-1)}{(x-r)^2} + \frac{\frac{1}{2}-r}{x-r} \right\}.$$

10. Die Function:

$$(13) \quad S_0 = \frac{r-1}{r} \log \frac{x-1}{r-1} - \log \frac{x}{r} + \frac{i\pi}{r}$$

stellt, wie man sich wieder durch Einsetzen leicht überzeugt, ein particuläres Integral der Differentialgleichung (8^{*}) dar.

Wir setzen fernerhin voraus, der Nebenpunkt r gehöre der Axe des Reellen an (vgl. Satz 14) und genüge überdies den Ungleichungen:

$$1 \leq r \leq +\infty.$$

Um einen bestimmten Zweig S_0^* der Function S_0 abzusondern, setzen wir fest: Das Argument x soll alle Werthe der Halbebene \mathfrak{P} (Fig. 6) annehmen können, und es sollen für sämtliche Logarithmen ihre Hauptwerthe gewählt werden.

Setzen wir daher:

$$x = R \cdot e^{i\varphi},$$

wo

$$0 \leq R \leq \infty$$

und

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

ist, und

$$x - 1 = \varrho \cdot e^{i\psi},$$

so bestimmen sich zunächst die Grössen ϱ und ψ eindeutig durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \\ \cos \psi &= \frac{R \cos \varphi - 1}{\varrho} \end{aligned}$$

und die Ungleichungen:

$$0 \leq \varrho \leq +\infty,$$

$$0 \leq \psi \leq \pi.$$

Der Zweig S_0^* wird dann, nach unserer Festsetzung in seinen reellen und imaginären Bestandtheil zerlegt, durch die Formel gegeben:

$$(13^*) \quad S_0^* = \frac{r-1}{r} \cdot \log \frac{\varrho}{r-1} - \log \frac{R}{r} + \left[\frac{r-1}{r} \cdot \psi - \varphi + \frac{\pi}{r} \right] i.$$

Um den Werth des Knotenpunkts d_1 zu berechnen, haben wir $x = r$ (d. h. $R = r$, $\varphi = 0$) einzusetzen. Wir bekommen:

$$d_1 = \frac{\pi i}{r},$$

d. h. in Worten:

11. Der Knotenpunkt d_1 ist stets rein imaginär, er wandert auf der Axe des Imaginären continuirlich von πi nach 0, wenn r sich continuirlich von 1 bis $+\infty$ auf der Axe des Reellen bewegt.

12. Die Abbildung, welche der Zweig S_0^* bei allgemeiner Lage des Punktes r im Intervall von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen von der Halbebene \mathfrak{P} entwirft, ist, wie man sich mit Hülfe der Gleichung (13*) leicht überzeugt, ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt und den Winkeln $\lambda\pi = \mu\pi = \nu\pi = 0$ in der folgendermassen zu beschreibenden speciellen Lage: Die Kreisbogenseite a_1b_1 ist die Axe des Reellen, die Seite a_1c_1 die Parallele zu ihr durch den Punkt $i\pi$, die zusammenfallenden Bogen b_1d_1 und c_1d_1 endlich werden durch diejenige Hälfte der

Parallelen zur Axe des Reellen durch den Punkt $d_1 = \frac{\pi i}{r}$ gegeben, deren Punkte keinen positiven reellen Bestandtheil haben. (Fig. 7.)

13. Fällt r mit einem der singulären Punkte 1 und ∞ , etwa mit 1, zusammen, so zerfällt gewissermassen unser Bereich wieder in 2 Theile, nämlich in ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt a_1, b_1, c_1^* mit den

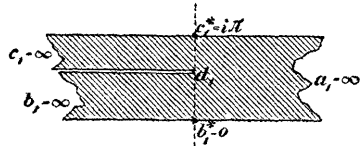


Fig. 7.

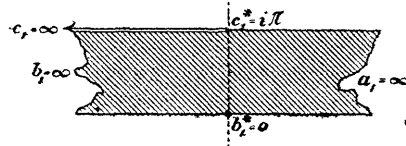


Fig. 8.

Winkeln $\lambda_1 \pi = \mu_1 \pi = 0$, $\nu_1 \pi = \pi$ und in diejenige Hälfte der ursprünglichen Seite $a_1 c_1$, deren Punkte einen negativ reellen Theil besitzen. Dies sei durch Fig. 8 angedeutet. (Vgl. die Schlussbemerkung des § 13.)

Wir haben den Fall bevorzugt, dass r im Intervalle von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen liegt. Ganz entsprechende Entwicklungen gelten, wenn r dem Intervalle von 0 bis 1 oder dem Intervalle von $-\infty$ bis 0 angehört, wie schon von vorneherein aus der Gleichheit aller Exponenten geschlossen werden kann. Unsere Betrachtungen lassen sich schliesslich ohne Weiteres auch auf eine allgemeine Particularlösung $S(x, r)$ der Differentialgleichung (8*) mit reellem Werthe r übertragen (vgl. Satz 16 und 17).

§ 5.

Die „symmetrischen“ S-Functionen mit einfachem Nebenpunkt.

Wir stellen folgende analytische Definition auf:

14. „Symmetrisch“ nennen wir eine S-Function mit einfachem Nebenpunkt, wenn die in ihrer Differentialgleichung (8) vorkommenden Grössen λ^2, μ^2, ν^2 und r, A_1 reelle Werthe haben.

Diesem Satze entsprechend sind die Exponenten einer „symmetrischen“ S-Function entweder reell oder rein imaginär*).

Es sei x_0 ein beliebiger, doch von 0, ∞ , 1 verschiedener reeller Werth des Arguments x . Falls die im Satze 14 angegebenen Bedingungen erfüllt sind, existirt stets eine Particularlösung S_0 der Differentialgleichung, welche in der Nähe des Punktes x_0 die folgende Entwicklung gestattet:

$$S_0 = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

*) Entsprechend nennen wir eine s-Function symmetrisch, wenn ihre Exponenten reell oder rein imaginär sind.

wo C_i reelle, von x unabhängige Coefficienten sind. Diese Thatsache liefert sofort, ganz den analogen Verhältnissen in der Theorie der s -Functionen entsprechend, den folgenden Satz:

15. Jede „symmetrische“ S -Function bildet die Halbebene \mathfrak{P} auf ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt ab.

In der Einleitung haben wir gesehen, dass umgekehrt jede Function, welche die im letzten Satze ausgesprochene Eigenschaft besitzt, einer Differentialgleichung (8) genügt, deren Grössen $\lambda^2, \mu^2, \nu^2, r, A_1$ reell sind. Unsere Definition 14 erweist sich daher identisch mit der bereits in der Einleitung aufgestellten Definition:

• 14*. Eine „symmetrische S -Function“ mit einfachem Nebenpunkt nennen wir jede Function, welche die Halbebene \mathfrak{P} in der bestimmten Weise auf ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt abbildet.

Auch die im vorigen Paragraphen behandelte S -Function mit den Exponenten $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist eine „symmetrische“ S -Function, wenn der Nebenpunkt r einen reellen Werth besitzt. Gerade diesen Fall haben wir dort näher untersucht.

Aus dem Satze 4 S. 491 folgt jetzt:

16. Zwei Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, die sich als Abbilder der Halbebene \mathfrak{P} vermitteln je eines für dieses Gebiet erklärten Zweiges verschiedener Particularlösungen derselben Differentialgleichung ergeben, stehen zu einander in Möbius'scher Kreisverwandtschaft, d. h. sie lassen sich durch lineare Transformation in einander überführen.

17. Umgekehrt haben wir alle Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, welche in „Möbius'scher Kreisverwandtschaft“ zu einander stehen, für unseren Zweck als nicht verschieden zu betrachten, da die Halbebene \mathfrak{P} auf sie durch Integrale derselben Differentialgleichung abgebildet wird.

Bis zum Schlusse dieses Paragraphen sei die Bezeichnung der Exponenten λ, μ, ν so gewählt vorausgesetzt, dass $\lambda' \geq \mu' \geq \nu'$ ist, ausserdem, wenn λ reell und > 0 und μ, ν rein imaginär sind, $\mu'' \geq \nu''$ ist, wenn aber alle drei Exponenten rein imaginär sind, $\lambda'' \geq \mu'' \geq \nu''$ ist. Welche Werthe sind für den reell vorausgesetzten Parameter r zulässig, damit die Integrale der Differentialgleichung (8) mit gegebenen reellen Grössen λ^2, μ^2, ν^2 symmetrische S -Functionen sind? Nach der Definition 14 ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass auch der accessorische Parameter A_1 reell ist, der nach Gleichung (9), bez. (9^{a, b, c}) (S. 491 u. 493), eine Function des Nebenpunktes r und der Exponenten λ, μ, ν ist. Diese einfache Thatsache ergibt leicht die im Folgenden zusammengestellten Sätze, die im letzten Paragraphen noch eine Erweiterung finden. In Uebereinstimmung mit dem Satze (2) S. 490 ergibt sich zunächst:

18. Nimmt r einen der reellen Werthe r^* , r^{**} (Formel (11) S. 492) oder r^{***} (Formel (12) S. 492) an, so erhalten wir nur eine einzige, für jeden anderen reellen Werth r dagegen entweder zwei verschiedene oder gar keine Differentialgleichung mit reellem Parameter A_1 .

I. Der Hauptfall. Es seien

A. alle drei Exponenten λ, μ, ν reell. Die Werthe r^* , r^{**} sind:

α) conjugirt complex, wenn $\lambda < \mu + \nu$ ist.

19. Für jeden reellen Werth r erhalten wir symmetrische S-Functionen.

β) beide reell (und natürlich von einander getrennt), wenn $\lambda > \mu + \nu$ ist.

20. Für die stets reellen Werthe r^* , r^{**} gelten die Ungleichungen $0 \leq r^{**} < r^* \leq \infty$. Nur wenn r einer der Ungleichungen $r \geq r^*$, $r \leq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.

B. zwei Exponenten, λ und μ , reell, der dritte, ν , rein imaginär.

21. Es gelten die Ungleichungen: $1 < r^* \leq \infty, 0 \leq r^{**} < 1$.

Nur wenn r einer der Ungleichungen $r \geq r^*$, $r \leq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.

C. zwei Exponenten, μ und ν , rein imaginär, der dritte, λ , reell.

22. Für die stets reellen Werthe r^* , r^{**} gelten die Ungleichungen: $-\infty < r^* \leq 0, 0 < r^{**} < 1$. Nur wenn r den Ungleichungen $r^* \leq r \leq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.

D. alle drei Exponenten rein imaginär. Die Werthe r^* , r^{**} sind:

α) conjugirt complex, wenn $\lambda'' < \mu'' + \nu''$ ist.

23. Wir erhalten für keinen reellen Werth r symmetrische S-Functionen.

β) beide reell (und natürlich von einander getrennt), wenn $\lambda'' > \mu'' + \nu''$ ist.

24. Es gelten die Ungleichungen $1 < r^* < r^{**} < \infty$.

Nur wenn r den Ungleichungen $r^* \leq r \leq r^{**}$ genügt, erhalten wir symmetrische S-Functionen.

II. Der Ausnahmefall: $\lambda = \mu + \nu$ (vgl. Satz 7, S. 492).

A. Es seien alle drei Exponenten reell.

25. Der Doppelpunkt r^{***} genügt der Ungleichung $1 \leq r^{***} < \infty$. Für jeden reellen Werth r erhalten wir symmetrische S-Functionen.

B. Der Fall, dass zwei Exponenten reell, der dritte rein imaginär ist, ist als Ausnahmefall nicht möglich.

C. Sind zwei Exponenten, λ und μ , rein imaginär, der dritte, ν , reell, so muss $\nu = 0$ und $\lambda'' = \mu''$ sein.

26. Allein für $r = r^{***} = 1$ erhalten wir symmetrische *S-Functionen* (d. h. symmetrische *s-Functionen*).

D. Es seien alle drei Exponenten rein imaginär.

27. Der Doppelpunkt r^{***} genügt den Ungleichungen $1 < r^{***} < \infty$. Allein für $r = r^{***}$ erhalten wir symmetrische *S-Functionen*.

§ 6.

Die drei Methoden zur Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt.

Es soll unsere Aufgabe sein, alle Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt (vgl. Satz 17, S. 496), die vorgegebene Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ besitzen, rein geometrisch construiren zu lernen. Die zur Anwendung gelangenden Constructionsmethoden sollen uns zugleich die Gewissheit gewähren, dass sie uns wirklich *alle* überhaupt möglichen Kreisbogendreiecke und, was indes weniger wichtig ist, jedes einzelne Dreieck nur auf eine Weise liefern. Wir setzen als bekannt voraus, wie jedes Kreisbogendreieck *ohne* Knotenpunkt mit vorgegebenen Winkeln $\lambda_0\pi, \mu_0\pi, \nu_0\pi$ zu construiren ist*).

Da das einzelne Kreisbogendreieck uns ein Abbild der Halbebene \mathfrak{P} darstellt, so wollen wir die 3 Kreisbogen seiner Begrenzung, die den Intervallen von 0 bis 1, von 1 bis $+\infty$, von $-\infty$ bis 0 der Axe des Reellen in der (x) -Ebene entsprechen, bez. mit a_1c_1, c_1b_1, b_1a_1 bezeichnen, unbekümmert darum, dass jeder der singulären Punkte 0, ∞ , 1 dann kein Abbild findet, wenn sein zugehöriger Exponent rein imaginär ist (vgl. Anm. S. 483).

Wir denken uns irgend ein Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt und beliebigen Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ gegeben, dessen Knotenpunkt d_1 sich beispielsweise auf dem Kreisbogen b_1c_1 befinden möge.

Wir vereinigen am Knotenpunkt d_1 beginnend die gegenüberliegenden Ufer des Einschnittes, d. h. die in d_1 zusammenlaufenden Enden der Bogen b, d_1 und c, d_1 , successive mit einander, so dass letztere gleichmässig kleiner und kleiner werden. Bei der Fortsetzung dieses Processes muss nothwendig einer der folgenden Fälle eintreten, den wir jedesmal durch ein Beispiel illustriren:

I. Der Punkt d_1 erreicht einen und nur einen der Punkte b_1 und c_1 , etwa c_1 . In diesem Augenblicke ist in dem Kreisbogendreieck der Knotenpunkt d_1 mit der Ecke c_1 verschmolzen. Wir erhalten ein Kreisbogen-

*) Vgl. „Habilitationsschrift“ § 6 u. 7 pag. [36—47], sowie meine Abhandlung „Beiträge zur geometr. Theorie der Schwarz'schen *s-Function*“, Ann. Bd. 44 (1894) § 14, pag. 208 ff.

dreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(\nu + 1)\pi$, wo ν nothwendig reell ist. Dieses Dreieck nennen wir das „erste Grenzdreieck“ (Fig. 9a, b).

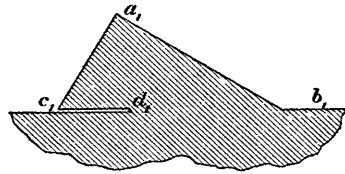


Fig. 9a.

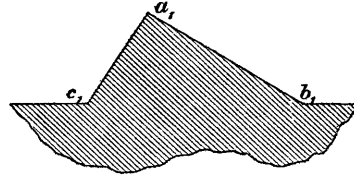


Fig. 9b.

28. Ein „als erstes Grenzdreieck“ auftretendes Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt hat also allgemein die Eigenschaft, dass ein Winkel um π grösser ist als der entsprechende Winkel der zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt, die beiden anderen Winkel aber mit den entsprechenden Winkeln der letztgenannten Dreiecke übereinstimmen.

II. Der Punkt d_1 erreicht die Punkte b_1 und c_1 gleichzeitig. In diesem Augenblick ist die Kreisbogenseite b_1c_1 ganz fortgefallen. Es bleibt ein gewöhnliches Zweieck mit zwei gleichen Winkeln $\lambda\pi$ übrig (Fig. 10); die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ müssen nothwendig reell sein und der Bedingung $\lambda = \mu + \nu$ genügen, so dass also der Zweieckswinkel gleich dem grössten der ursprünglichen Dreieckswinkel ist.

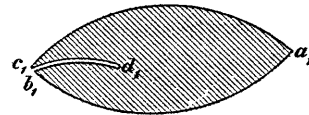


Fig. 10.

III. Der Punkt d_1 erreicht, so weit wir auch die Vereinigung der Bogen b_1d_1 und c_1d_1 fortsetzen, niemals einen Eckpunkt. Dann windet sich, wenn wir den Bereich auf der Kugel gelegen annehmen, zu beiden Seiten des Kreisbogens b_1c_1 die Fläche des Dreiecks wie ein unendliches Band um dieselbe herum. Das Dreieck kann nur so beschaffen sein, dass die drei Kreise der begrenzenden Bogen sich nicht unter einander schneiden. Dieser Fall kann daher nur bei drei rein imaginären Exponenten eintreten, für die gerade die beiden vorhergehenden Fälle ausgeschlossen sind. (Die ein Beispiel gebende Fig. 11 stellt natürlich nur ein theilweise willkürlich begrenztes Stück des Kreisbogendreiecks dar.) Die drei Kreise theilen die Kugel, auf der das Kreisbogendreieck gelegen ist, stets in zwei Kalotten und in zwei Ringgebiete.

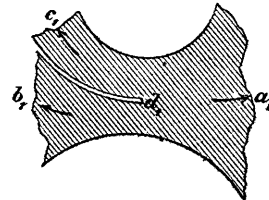


Fig. 11.

Zur Lösung der eingangs dieses Paragraphen aufgestellten Aufgabe werden wir jetzt naturgemäss dadurch geführt werden, dass wir

umgekehrt vorgehen wie soeben. Den geschilderten drei Möglichkeiten entsprechend werden wir *drei verschiedene Constructionsmethoden* zu unterscheiden haben. Der besseren Uebersicht wegen wollen wir bei der näheren Darlegung der letzteren im Folgenden die 4 Fälle nach einander betrachten, dass keiner, einer, zwei oder alle drei Exponenten rein imaginär sind.

29. Die Gesamtheit aller von einander verschiedenen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt, die allein durch Verlängerung oder Verkürzung des Einschnittes aus einander hervorgehen, wollen wir als eine „Schaar“ bezeichnen.

§ 7.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der ersten Methode.

Die vorgegebenen Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ seien *reell*. Die *erste Methode*, die zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt zu construiren, hat gemäss Nr. I des § 6 von einem ersten Grenzdreieck auszugehen. Als solches muss nothwendig eines der Kreisbogendreiecke ohne Knotenpunkt gewählt werden, die folgende Winkeltripel besitzen:

$$\lambda\pi, \mu\pi, (\nu+1)\pi; \quad \lambda\pi, (\mu+1)\pi, \nu\pi; \quad (\lambda+1)\pi, \mu\pi, \nu\pi.$$

Die Anwendung der ersten Methode auf eines der Grenzdreiecke, etwa auf das erste, hat darin zu bestehen, dass wir in ihm, falls es überhaupt möglich ist, die eine oder die andere der Seiten a_1c_1 und b_1c_1 , welche den um π vermehrten Winkel $(\nu+1)\pi$ bilden, über den zu-

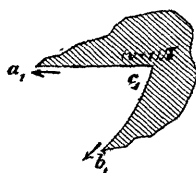


Fig. 12 a.

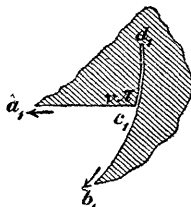


Fig. 12 b.

gehörigen Eckpunkt c_1 hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein verlängern und zwar so, dass von dem Winkel $(\nu+1)\pi$ gerade der Theil π abgetrennt wird, wie für die Umgebung der Ecke c_1 beispielsweise durch Fig. 12 a, b dargestellt sei. Der Knotenpunkt d_1 gehört als End-

punkt des Einschnittes hier, wie in allen späteren Fällen, stets der verlängerten Seite an. Was nun die Ausführbarkeit der Methode betrifft, so lässt sich folgender Satz beweisen:

30. Im ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(\nu+1)\pi$ lässt sich nach der ersten Methode über die Ecke c_1 als Einschnitt in den Bereich hinein:

sowohl die Seite a_1c_1 wie b_1c_1 fortsetzen, wenn $\nu > 0$ ist (Fig. 9 a, b),

nur die Seite a_1c_1 , wenn $\nu = 0$ und $\lambda > \mu$ ist (Fig. 13 für $\lambda = 1, \mu = \nu = 0$),
 nur die Seite b_1c_1 , wenn $\nu = 0$ und $\lambda < \mu$ ist,
 keine der beiden Seiten, wenn $\nu = 0$ und $\lambda = \mu$ ist (Fig. 14 für $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$).

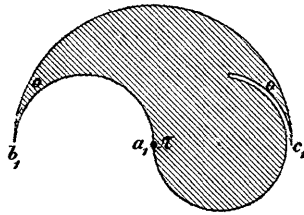


Fig. 13.

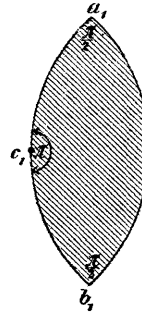


Fig. 14.

Durch cyklische Vertauschungen der Buchstaben λ, μ, ν und bez. a_1, b_1, c_1 erhalten wir die beiden für die zwei anderen Grenzdreiecke gültigen Sätze.

Diese Sätze würden es auch leicht ermöglichen, etwa in jedem der hierher gehörenden, im § 5 unterschiedenen Fälle anzugeben, wie viel verschiedene *Schaaren* von Kreisbogendreiecken mit Knotenpunkt und gegebenen Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ die Anwendung der ersten Methode liefert. Doch behalten wir uns dies für den Schlussparagraphen dieser Arbeit vor und heben hier nur das für die spätere Untersuchung wichtige Resultat hervor, dass die erste Methode jedenfalls nur eine *endliche* Zahl verschiedener solcher Schaaren liefert. Dass ferner je zwei nach der ersten Methode erhaltene Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt von einander verschieden sind, auch dann, wenn sie sich etwa nur durch einen mehr oder weniger weit fortgesetzten Einschnitt unterscheiden, brauchen wir wohl kaum besonders hervorzuheben*).

Setzen wir in einem beliebigen nach der ersten Methode construirten Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt und reellen Winkeln den Einschnitt in den Bereich weiter und weiter über den jeweiligen Knotenpunkt d_1 hinaus fort, so muss letzterer schliesslich einmal an irgend einer Stelle die Begrenzung des Dreiecks erreichen. In diesem Augenblicke zerfällt der ursprüngliche Bereich in zwei Theile. Ist ein Theil ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt, so nennen wir dieses das „*zweite Grenzdreieck der Schaar*“. Die nähere Untersuchung ergibt

*) Analoge Bemerkungen gelten auch für die in den §§ 8–10 behandelten Fälle.

folgenden Satz, aus dem wir noch fünf analoge Sätze durch alle möglichen Vertauschungen der Buchstaben a_1, b_1, c_1 und bez. λ, μ, ν erhalten:

31. Ist in dem ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, (\nu+1)\pi$ die Seite b_1c_1 über c_1 als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt d_1 bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich:

- 1) die Seite a_1c_1 innerlich oder die Ecke c_1 , wenn $\lambda > \mu + \nu$ ist. Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\nu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\nu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, |\nu-1|\pi$ (Fig. 15 für $\lambda=1, \mu=0, \nu=\frac{1}{2}$).
- 2) die Ecke a_1 , wenn $\lambda = \mu + \nu$ ist. Der Bereich zerfällt in zwei Zweiecke (Fig. 16 für $\lambda=\frac{5}{6}, \mu=\frac{1}{2}, \nu=\frac{1}{3}$).
- 3) die Seite a_1b_1 innerlich oder die Ecke b_1 , wenn $\lambda < \mu + \nu$ ist. Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, |\mu-1|\pi, \nu\pi$ (Fig. 17 für $\lambda=0, \mu=\nu=\frac{1}{2}$).

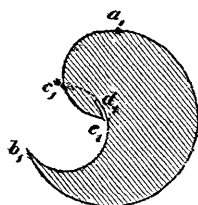


Fig. 15.

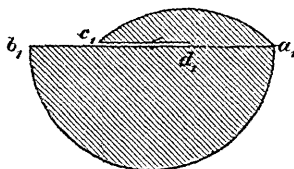


Fig. 16.

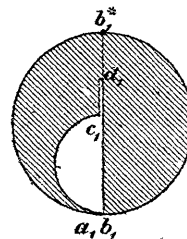


Fig. 17.

Sogleich an dieser Stelle wollen wir das aus dem letzten Satze, wie den analogen Sätzen 33, 35, 38 a, b, 40 sich ergebende allgemeine Resultat anführen:

32. Ein zweites Grenzdreieck, d. h. ein bei Verlängerung des Einschnittes sich schliesslich ergebendes Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt, hat stets die Eigenschaft, dass einer seiner Winkel gleich dem absoluten Betrage des um π verminderten entsprechenden Winkels der zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt ist, die beiden übrigen Winkel aber mit den entsprechenden Winkeln der letztgenannten Dreiecke übereinstimmen.

§ 8.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und reellen Winkeln nach der zweiten Methode.

Auch in diesem Paragraphen mögen die vorgegebenen Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ reell sein. Die Bezeichnung derselben sei überdies so

gewählt, dass $\lambda \geq \mu \geq \nu$ ist, was der Allgemeinheit der Betrachtung keinen Abbruch thut. Die *zweite Methode* zur Construction der zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt verlangt gemäss Nr. II des § 6 für die Möglichkeit ihrer Anwendung, dass $\lambda = \mu + \nu$ ist, d. h. dass der Ausnahmefall vorliegt, und hat das Zweieck zum Ausgangspunkt zu nehmen, dessen Winkel gleich $\lambda\pi$ sind. Letzteres wollen wir stets *geradlinig* begrenzt sein lassen, was sich ja immer durch geeignete lineare Transformation erreichen lässt. Der Fall, dass $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist, möge im Folgenden ausgeschlossen sein, da die ihm zugehörigen Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt bereits im § 4 betrachtet sind. Dann haben wir nur noch folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\nu > 0$.

II. $\lambda = \mu > 0, \nu = 0$.

Sprechen wir zunächst allein von dem ersten Falle. Die Anwendung der zweiten Methode auf das Zweieck mit den Winkeln $\lambda\pi$ hat allgemein gesprochen folgendermassen zu verlaufen: Wir haben von einer Ecke des Zweiecks aus, etwa der im Endlichen liegenden, längs eines Kreisbogens einen Einschnitt in den Bereich vorzunehmen, der den Winkel $\lambda\pi$ so in die Theile $\mu\pi$ und $\nu\pi$ zerlegt, dass, wenn die unendlich ferne Ecke mit a_1 , die Ecken der Winkel $\mu\pi$ und $\nu\pi$ bez. mit b_1 und c_1 bezeichnet werden, die drei Ecken bei positiver Umlaufung des Bereiches in der Reihenfolge c_1, b_1, a_1 angetroffen werden. Nun giebt es stets einfach ∞ viele Kreisbogen, welche der für den Einschnitt nothwendigen Bedingung genügen. Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen, betrachten wir vorerst einmal das specielle Beispiel: $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \nu = \frac{1}{4}$.

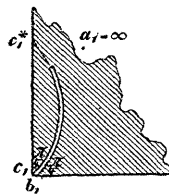


Fig. 18 a.

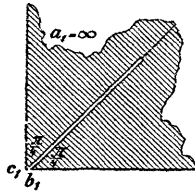


Fig. 18 b.

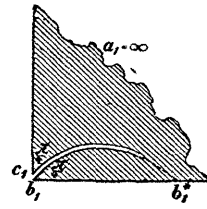


Fig. 18 c.

Ein Blick auf die Figuren 18 a, b, c belehrt uns: Wir können den verlangten Einschnitt in das Zweieck mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ so vornehmen, dass bei seiner Fortsetzung der Knotenpunkt d_1 schliesslich entweder die Seite a_1c_1 innerlich (Möglichkeit I, Fig. 18 a) oder die Ecke a_1 (Möglichkeit II, Fig. 18 b) oder die Seite a_1b_1 innerlich (Möglichkeit III, Fig. 18 c) erreicht. Die durch Verlängerung oder Ver-

kürzung des Einschnittes in den Figuren 18a und 18c sich ergebenden Kreisbogendreiecke sind sämmtlich von einander verschieden und bilden daher zwei Schaaren; die durch Verlängerung oder Verkürzung des Einschnittes in der Figur 18b sich ergebenden Kreisbogendreiecke dagegen sind sämmtlich mit dem gezeichneten identisch, da sie durch lineare, hyperbolische Transformationen mit den Fixpunkten $a_1 = \infty$ und $b_1 = c_1$ in dieses übergeführt werden können. *Irgend ein anderer zulässiger Einschnitt des Zweiecks wie die drei in den Figuren 18 a, b, c liefert uns dagegen keine weiteren als verschieden geltenden Kreisbogendreiecke*; denn wir können wiederum durch Anwendung einer linearen, hyperbolischen Transformation mit den Fixpunkten $a_1 = \infty$ und $b_1 = c_1$ jedes durch einen neuen Einschnitt entstandene Kreisbogendreieck auf eine der durch die Figuren 18 a, c dargestellten Schaaren zurückführen.

Die zu einem beliebigen Werthetripel λ, μ, ν des Falles I gehörenden Figuren ergeben sich aus dem Beispiel, wenn die Seite $a_1 b_1$ um b_1 im positiven oder negativen Sinne gedreht wird, bis an der Ecke b_1 der Winkel $\mu\pi$ herauskommt, desgleichen die Seite $a_1 c_1$ um c_1 , bis an der Ecke c_1 der Winkel $\nu\pi$ herauskommt. Wir gewinnen den folgenden allgemeinen Satz:

33. *Ist der kleinste Exponent ν von 0 verschieden, so bieten sich stets drei und nur drei Möglichkeiten für die Ausführung der zweiten Methode dar. Durch Fortsetzung des Einschnittes erreicht der Knotenpunkt d_1 schliesslich*

bei der ersten Möglichkeit

die Seite $a_1 c_1$ innerlich oder die Ecke c_1 . Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\nu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\nu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, |\nu - 1|\pi$.

bei der zweiten Möglichkeit

die Ecke a_1 . Wir nennen das einzige sich hier ergebende Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt dasjenige des Uebergangsfalles.

bei der dritten Möglichkeit

die Seite $a_1 b_1$ innerlich oder die Ecke b_1 . Der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, |\mu - 1|\pi, \nu\pi$.

In Bezug auf das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles füge ich sogleich noch folgende functionentheoretische Bemerkung hinzu:

Wir denken dies Dreieck in solcher Lage gezeichnet, dass der Eckpunkt a_1 , wie bisher, im Unendlichen, die Eckpunkte b_1 und c_1

an der Stelle 0 und der Knotenpunkt d_1 an der Stelle $+1$ liegen. Andererseits betrachten wir die Function:

$$S_0 = \frac{x^{-\lambda} \cdot (x-1)^{\nu}}{\lambda^{-\lambda} \cdot \nu^{\nu} \cdot \mu^{\mu}},$$

wo für die Factoren des Nenners die Hauptwerthe zu nehmen sind, insbesondere den dadurch für die Halbebene \mathfrak{P} erklärten Zweig S_0^* dass $x^{-\lambda}$ und $(x-1)^{\nu}$ für $x = r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}$ die Hauptwerthe annehmen sollen. Wie man sich leicht überzeugt, bildet der Zweig S_0^* die Halbebene \mathfrak{P} so auf das soeben in seiner Lage normirte Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles ab, dass den Punkten $x = 0, \infty, 1, \frac{\lambda}{\mu}$ bez. die Punkte $a_1 = \infty, b_1 = 0, c_1 = 0, d_1 = 1$ entsprechen. Wir erhalten daher als Resultat in Rücksicht auf den Satz 9 S. 493:

34. *Das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles entspricht der Differentialgleichung des Uebergangsfalles.*

Was nun den Fall II betrifft, so unterscheidet sich hier die Anwendung der zweiten Methode von der soeben geschilderten nur darin, dass jetzt die nicht zertheilte Ecke des Zweiecks entweder die Ecke a_1 oder die Ecke b_1 der aus dem Zweieck abgeleiteten Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt bilden kann, dass andererseits bei jeder dieser Möglichkeiten sich stets eine und nur eine Schaar ergibt. Die Figuren 19a, b

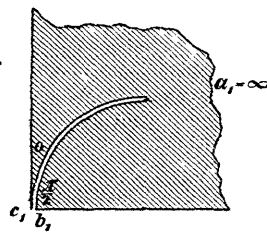


Fig. 19 a.

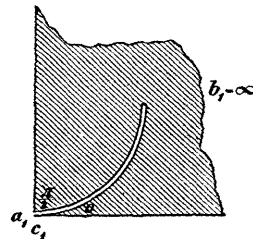


Fig. 19 b.

für das Beispiel $\lambda = \mu = \frac{1}{2}, \nu = 0$ erläutern diese Verhältnisse zur Genüge. (Die Figur 19a entspricht der Figur 18c, während die Figuren 18a, b keine Analoga finden.) Das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles wird hier in Uebereinstimmung mit Satz 8 durch das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, (\nu+1)\pi$ gegeben (Fig. 14, S. 501).

35. *Ist der kleinste Exponent ν gleich 0, so erhalten wir wieder zwei Schaaren von Kreisbogendreiecken mit Knotenpunkt.*

Die erste ist dadurch charakterisirt, dass die Ecken b_1 und c_1 ihrer Kreisbogendreiecke zusammengefallen sind, dass ferner bei Fortsetzung des Einschnittes der Knotenpunkt d_1 die Seite a_1b_1 innerlich

oder die Ecke b_1 erreicht und dann der Bereich unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, |\mu - 1|\pi, \nu\pi$ liefert.

Die zweite ist dadurch charakterisirt, dass die Ecken a_1 und c_1 ihrer Kreisbogendreiecke zusammengefallen sind, dass ferner bei Fortsetzung des Einschnittes der Knotenpunkt d_1 die Seite a_1b_1 innerlich oder die Ecke a_1 erreicht und dann der Bereich unter Abschnürung eines Zweiecks ($\lambda < 1$) oder einer Kreisfläche ($\lambda \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $|\lambda - 1|\pi, \mu\pi, \nu\pi$ liefert.

Zusammenfassend gewinnen wir als Schlussresultat der §§ 7 und 8.

36. Wir erhalten für gegebene Exponenten λ, μ, ν (mit der Bedingung $\lambda \geq \mu \geq \nu$) alle Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, wenn wir auf jedes der drei ersten Grenzdreiecke, die durch die Exponententripel $\lambda + 1, \mu, \nu; \lambda, \mu + 1, \nu; \lambda, \mu, \nu + 1$ bestimmt sind, dem Satze 30 entsprechend die erste Methode anwenden, in soweit sie ausführbar ist, ausserdem noch, falls der Ausnahmefall vorliegt, auf das Zweieck mit den Winkeln $\lambda\pi$ den Sätzen 33 und 35 entsprechend die zweite Methode.

§ 9.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt, zwei reellen und einem rein imaginären oder einem reellen und zwei rein imaginären Winkeln.

Es seien zwei Exponenten, etwa λ und μ , reell, der dritte $\nu = \nu'i$, rein imaginär. Es kommt allein die erste Methode zur Construction der entsprechenden Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt zur Anwendung. Dieselbe ist in ganz analoger Weise auszuführen, wie im § 7.

Als erstes Grenzdreieck, von dem wir auszugehen haben, ist nothwendig entweder das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $(\lambda + 1)\pi, \mu\pi, \nu''\pi i$ oder dasjenige mit den Winkeln $\lambda\pi,$

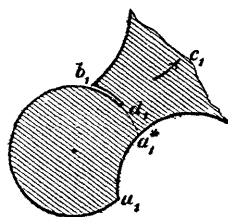


Fig. 20.

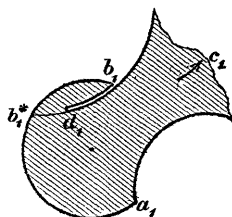


Fig. 21.

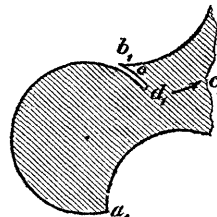


Fig. 22.

$(\mu + 1)\pi, \nu''\pi i$ zu wählen. Den Sätzen 30 und 31 des § 7 entsprechend gelten hier folgende Sätze:

37. Im ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $\nu''\pi i$ lässt sich nach der ersten Methode über die Ecke b_1 hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein:

sowohl die Seite a_1b_1 wie c_1b_1 fortsetzen, wenn $\mu > 0$ ist (Fig. 20 und 21 s. S. 506),

nur die Seite a_1b_1 , wenn $\mu = 0$ ist (Fig. 22 s. S. 506).

38a. Ist in dem ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $\nu''\pi i$ die Seite a_1b_1 über b_1 als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt d_1 bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich entweder die Seite a_1c_1 innerlich oder die Ecke a_1 , und der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\lambda < 1$) oder einer Kreisfläche ($\lambda \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $|\lambda-1|\pi$, $\mu\pi$, $\nu''\pi i$. (Fig. 20 und 22.)

38b. Ist in dem ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $(\mu+1)\pi$, $\nu''\pi i$ die Seite c_1b_1 über b_1 als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt d_1 bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich entweder die Seite a_1b_1 innerlich oder die Ecke b_1 , und der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\mu < 1$) oder einer Kreisfläche ($\mu \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $|\mu-1|\pi$, $\nu''\pi i$. (Fig. 21.)

Auf das erste Grenzdreieck mit den Winkeln $(\lambda+1)\pi$, $\mu\pi$, $\nu''\pi i$ übertragen sich die Sätze 37 und 38a, b, wenn man in ihnen die Bezeichnungen a_1 und b_1 , sowie λ und μ mit einander vertauscht. —

Es seien zwei Exponenten rein imaginär, der dritte reell. Wenn der Ausnahmefall vorliegt, d. h. wenn der reelle Exponent, etwa ν , gleich 0 ist und die rein imaginären Exponenten, $\lambda''i$ und $\mu''i$, einander gleich sind, so giebt es überhaupt nur ein einziges, hierher gehöriges Kreisbogendreieck und zwar dasjenige ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $\lambda''\pi i$, $\mu''\pi i$, π (Fig. 23, vgl. § 5, Nr. II, C). Dieser Fall sei im Folgenden ausgeschlossen.

Die rein imaginären Exponenten seien jetzt mit $\mu''i$ und $\nu''i$, der reelle Exponent mit λ bezeichnet. Es kommt wieder allein die erste Methode zur Construction der entsprechenden Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt in Anwendung; auch ist sie wieder in ganz entsprechender Weise auszuführen, wie im § 7. Als erstes Grenzdreieck, von dem wir auszugehen haben, ist nothwendig das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Winkeln $(\lambda+1)\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$ zu wählen. Es gelten folgende Sätze:

39. Im ersten Grenzdreieck mit den Winkeln $(\lambda+1)\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$ lässt sich nach der ersten Methode über die Ecke a_1 hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein:

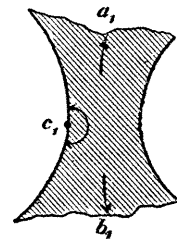


Fig. 23.

sowohl die Seite $b_1 a_1$ wie die Seite $c_1 a_1$ fortsetzen, wenn $\lambda > 0$ ist (Beispiel III der Tafel),

nur die Seite $c_1 a_1$, wenn $\lambda = 0$ und $\mu'' > \nu''$ ist, (Fig. 24)

nur die Seite $b_1 a_1$, wenn $\lambda = 0$ und $\mu'' < \nu''$ ist.

40. Ist in dem genannten ersten Grenzdreieck die Seite $c_1 a_1$ über a_1 als Einschnitt in den Bereich hinein verlängert, so erreicht der Knotenpunkt d_1 bei Fortsetzung des Einschnittes schliesslich entweder die Seite $a_1 b_1$ innerlich oder die Ecke a_1 , und der Bereich liefert unter Abschnürung eines Zweiecks ($\lambda < 1$) oder einer Kreisfläche ($\lambda \geq 1$) ein zweites Grenzdreieck mit den Winkeln $|\lambda - 1|\pi$, $\mu''\pi i$, $\nu''\pi i$.

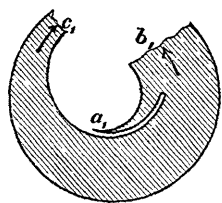


Fig. 24.

Ein entsprechender Satz ergibt sich, wenn wir im letzten Satze die Bezeichnungen b_1 und c_1 , sowie μ'' und ν'' mit einander vertauschen.

§ 10.

Construction der Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und drei rein imaginären Winkeln.

Es seien alle drei Exponenten rein imaginär; es möge $\lambda'' \geq \mu'' \geq \nu''$ gelten. Zur Construction der entsprechenden Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt kommt allein die dritte Methode gemäss Nr. III im § 6 in Anwendung. Aus den entsprechenden Betrachtungen des § 5 (S. 495) insbesondere den Sätzen 23, 24 und 27 daselbst folgt zunächst:

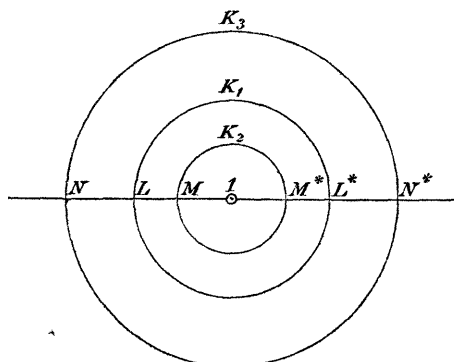


Fig. 25.

41. Stets dann und nur dann lassen sich für drei vorgegebene rein imaginäre Exponenten $\lambda'' i$, $\mu'' i$, $\nu'' i$ Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt construiren, wenn

$$\lambda'' \geq \mu'' + \nu''$$

ist. Der Knotenpunkt d_1 kann in einem solchen Dreieck nur auf der Seite $b_1 c_1$ gelegen sein.

Die dritte Constructionsmethode besteht nun im Folgenden:

Wir zeichnen zunächst drei concentrische Kreise K_1 , K_2 , K_3 , so dass K_2 und K_3 den Winkel $\lambda''\pi i$, K_1 und K_3 den Winkel $\mu''\pi i$ mit einander bilden*). Die Kreise K_1 und K_2 bilden dann den Winkel

*) In Betreff der Definition des imaginären Winkels vgl. Habilitationsschrift, Satz 32, pag. [41].

$(\lambda'' - \mu'')\pi i$ mit einander. Eine beliebige durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehende Gerade möge die Kreise bez. in den Punkten L, L^* ; M, M^* ; N, N^* schneiden. (Fig. 25, s. S. 28). Die ebene Figur fassen wir auf als eine stereographische Projection einer entsprechenden Figur auf der Kugel der complexen Variablen S . Den Punkten N, N^* und dem Mittelpunkt der Kreise legen wir bez. die Werthe $0, \infty, 1$ bei; die Kugel ist dann vom Punkte -1 auf die Tangentialebene des Punktes $+1$ projicirt zu denken. Die den Punkten L, M zukommenden Zahlenwerthe seien durch dieselben Buchstaben bezeichnet.

Wir transformiren nun allein den Kreis K_1 durch folgende hyperbolische Substitution:

$$(14) \quad S_1 = C \cdot S,$$

wo C ein reeller Parameter ist, welcher der Bedingung

$$(15) \quad 1 \leq C < \frac{M}{L}$$

genügen soll.

Der durch diese Transformation aus K_1 entstehende neue Kreis K_1' bilde mit K_2 den Winkel $\bar{v}''\pi i$. Die Winkel der Kreise K_2 und K_3 , sowie K_1' und K_3 sind auch nach der Transformation unverändert $\lambda''\pi i$ und $\mu''\pi i$.

Wenn C von 1 bis $\frac{M}{L}$ stetig zunimmt, so nimmt der Winkel $\bar{v}''\pi i$ stetig von $(\lambda'' - \mu'')\pi i$ bis 0 ab.

Wir bekommen in der geschilderten Weise demnach stets *eindeutig* drei Kreise, welche gegebene Winkel $\lambda''\pi i$, $\mu''\pi i$, $\bar{v}''\pi i$ mit einander bilden. Wie wir aus der Figur der drei Kreise die Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt auf der Seite $b_1 c_1$ erhalten, wird durch die ein Beispiel darstellende Figur 26 genügend erläutert.

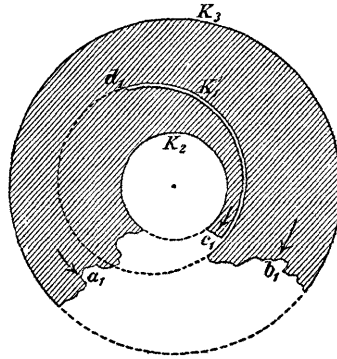


Fig. 26.

42. Im Hauptfalle, d. h. wenn $\lambda'' > \mu'' + \bar{v}''$ ist, sind die durch Fortsetzung (oder Verkürzung) des „Einschnittes“ entstehenden Kreisbogendreiecke so lange von einander verschieden, bis der Knotenpunkt d_1 den Kreis K_1' der Seite $b_1 c_1$ gerade einmal umlaufen hat.

Im Ausnahmefalle, d. h. wenn $\lambda'' = \mu'' + \bar{v}''$ ist, sind die drei Kreise in der von uns bevorzugten Lage concentrisch. Bei allgemeiner Lage besteht ihre geometrische Eigenart darin, dass die zu zweien der Kreise orthogonalen Kreise auch zum dritten orthogonal sind. Die

durch Fortsetzung des Bogens $b_1 d_1$ über d_1 hinaus als Einschnitt in den Bereich hinein entstehenden Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt sind hier mit dem ursprünglichen kreisverwandt.

43. Im Ausnahmefalle erhalten wir also nur ein einziges Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt (vgl. Satz 27, S. 498).

§ 11.

Existenzsätze der allgemeinen Function $S(x, \alpha)$ im Hauptfalle.

Die Betrachtungen dieses und des folgenden Paragraphen beziehen sich zunächst nicht speciell auf symmetrische, sondern auf allgemeine S -Functionen. Die Exponenten λ, μ, ν mögen solche vorgegebene Werthe haben, dass der im § 3 (S. 492) definirte *Hauptfall* vorliegt.

Die durch Gleichung (9) (S. 491) mit einander verbundenen Parameter r und A_1 lassen sich auf unendlich viele Weisen durch eine Hülfsgrösse α rational ausdrücken, so dass die genannte Gleichung befriedigt ist. Wir setzen beispielsweise:

$$(16) \quad r = \alpha \cdot \frac{(\lambda + \mu - \nu)\alpha - 2\lambda}{2\alpha\mu - (\lambda + \mu + \nu)},$$

$$(17) \quad A_1 = -r + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2\mu(\lambda + \mu - \nu) - (\lambda + \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)\alpha + \lambda(\lambda + \mu + \nu)}{2\alpha\mu - (\lambda + \mu + \nu)}.$$

Jedem zusammengehörigen Werthepaare r, A_1 entspricht nach den Gleichungen (16) und (17) ein bestimmter Werth α und umgekehrt jedem Werth α ein bestimmtes Werthepaar r, A_1 (*). Führen wir die den Parametern r und A_1 gleichen Ausdrücke in die Differentialgleichung (8) (S. 491) ein, so wird ihre rechte Seite eine rationale Function von α .

Es sei x_0 ein specieller Werth des Argumentes x mit positivem imaginärem Bestandtheil. Ferner seien C, C_1, C_2 gegebene endliche (complexe) Constante, von denen jedenfalls C_1 von 0 verschieden sein soll. Aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen folgt dann:

44. Gibt man dem Parameter α irgend einen Werth α_0 , sodass der zugehörige Werth $r = r_0$ von x_0 verschieden ist, so existirt stets eine und nur eine Particularlösung $S_0(x)$ der Art, dass ein Zweig von ihr in der Nähe des Punktes x_0 regulär ist und für $x = x_0$ die Gleichungen:

$$S_0 = C, \quad S_0' = C_1, \quad S_0'' = C_2$$

erfüllt.

*) An die Stelle der Gleichung (17) könnte auch die folgende:

$$(17^*) \quad A_1 = -r + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2\mu(\lambda + \mu - \nu) - (\lambda + \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)\alpha + \lambda(\lambda + \mu + \nu)}{2\alpha\mu - (\lambda + \mu + \nu)}$$

treten.

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist als Function des Parameters α betrachtet regulär in der Nähe eines jeden Punktes α , dem ein von x verschiedener Werth τ zugehört. Auf Grund dieser Thatsache gestattet uns die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen dem Satze 44 folgende Erweiterung hinzuzufügen:

45. Wird die Particularlösung S_0 als Function von x und α aufgefasst, so ist ihr soeben definirter Zweig auch in der Nähe des Punktes x_0, α_0 regulär.

Das Argument x der Function S_0 deuten wir analog wie in der Theorie der s -Function auf einer (allgemein gesprochen) unendlichblättrigen Riemann'schen Fläche. Es sei x_1 irgend ein zweiter, ebenso wie x_0 in einem bestimmten Blatte gelegener Werth von x , der von $0, \infty, 1$ verschieden und kein Unendlichkeitspunkt der Function $S_0(x, \alpha_0)$ ist. Nach der Methode der analytischen Fortsetzung im Sinne von Weierstrass kann man aus dem ursprünglichen Element der Function $S_0(x, \alpha)$, welches nach Satz 45 für die Umgebung des Punktes x_0, α_0 erklärt ist, mittelst einer endlichen Anzahl von Schritten ein anderes für die Umgebung der Stelle x_1, α_0 gültiges ableiten. Auf solche Weise gewinnen wir als Resultat den Satz:

46. Die in den Sätzen 44 und 45 definirte Particularlösung $S_0(x, \alpha)$ ist in der Nähe eines jeden Punktes x_1, α_0 regulär, wenn nur x_1 von $0, \infty, 1$ verschieden und kein Unendlichkeitspunkt der Function $S_0(x, \alpha_0)$ ist.

Statt der Particularlösung $S_0(x, \alpha)$ können wir, wenn es zweckmässig sein sollte, leicht eine andere $(S_0(x, \alpha))$ einführen vermöge der Gleichung:

$$(18) \quad (S_0) = \frac{\pi S_0 + \varrho}{\sigma S_0 + \tau},$$

wo $\pi, \varrho, \sigma, \tau$ solche endliche, von x und α unabhängige Grössen mit der Determinante $\pi\tau - \varrho\sigma = 1$ sein mögen, dass $\sigma S_0 + \tau$ für $x = x_0, \alpha = \alpha_0$ nicht verschwindet, damit $x = x_0, \alpha = \alpha_0$ kein Unendlichkeitspunkt der Function $(S_0(x, \alpha_0))$ ist. Aus den Gleichungen:

$$(19) \quad \begin{cases} (S_0) = \frac{\pi S_0 + \varrho}{\sigma S_0 + \tau}, \\ (S_0)' = \frac{S_0'}{(\sigma S_0 + \tau)^2}, \\ (S_0)'' = \frac{(\sigma S_0 + \tau) S_0'' - 2\sigma S_0'^2}{(\sigma S_0 + \tau)^3} \end{cases}$$

folgt:

$(S_0), (S_0)', (S_0)''$ sind für $x = x_0, \alpha = \alpha_0$ ebenfalls drei bestimmten, endlichen Constanten gleich, von denen die mittlere nicht verschwindet.

Aus dem Umstande, dass für die Function (S_0) dann dasselbe gilt, was in den Sätzen 45 und 46 von der Function S_0 ausgesagt ist, schöpfen wir die Berechtigung, ohne dass der Allgemeinheit der Unter-

suchung Abbruch geschieht, die Constanten C, C_1, C_2 später sogleich so gewählt voranzusetzen, dass noch gewisse Bedingungen erfüllt sind, z. B. die, dass für eine endliche Zahl von anzugebenden Argumentwerthen ein bestimmt abgegrenzter Zweig der Function $S_0(x, \alpha_0)$ nicht unendlich gross wird.

§ 12.

Die symmetrischen S -Functionen und ihre Kreisbogendreiecke.

Wie im vorigen Paragraphen möge noch ferner der *Hauptfall* vorliegen.

Wir setzen weiterhin voraus, dass keiner der Exponenten λ, μ, ν ganzzahlig sei. Es sei mit $S_0^*(x, \alpha)$ ein solcher Zweig der im vorigen Paragraphen definirten Function $S_0(x, \alpha)$ bezeichnet, der für die Halbebene \mathfrak{P} erklärt und durch analytische Fortsetzung aus der nach Satz 45 zunächst für die Umgebung der Stelle x_0 definirten Entwicklung der Function gewonnen ist. Wir nehmen jetzt, wie wir am Ende des vorigen Paragraphen ankündigten, nachträglich an, es seien die Constanten C, C_1, C_2 so gewählt, dass erstens keine der im Satz 5 S. 491 bestimmten Fundamentalsubstitutionen A, B, Γ für den Zweig $S_0^*(x, \alpha_0)$ den Unendlichkeitspunkt der Ebene der Function als Fixpunkt besitzt, zweitens $S_0^*(x, \alpha_0)$ für $x = r_0$ nicht ∞ wird.

Es sei jetzt α_0 insbesondere ein solcher specieller Werth des Parameters α , dass die zugehörigen Werthe r_0 und A_1 reell sind und r_0 von $0, \infty, 1$ verschieden ist. Dann ist die Function $S_0(x, \alpha_0)$ eine *symmetrische S -Function*, und ihrem Zweige $S_0^*(x, \alpha_0)$ entspricht folglich ein Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt. Der geometrischen Untersuchung der Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt entnehmen wir das Resultat, dass für $\alpha = \alpha_0$ (im Hauptfalle) entweder alle 6 Fixpunkte der Fundamentalsubstitutionen A, B, Γ verschieden sind oder drei, von denen jede der Substitutionen einen liefert, in denselben Punkt zusammenfallen, die drei übrigen aber von letzterem und von einander verschieden sind. Wir können daher stets drei für $\alpha = \alpha_0$ nicht zusammenfallende Fixpunkte auswählen. Dieselben seien mit $e_i(\alpha)$ für $i = 1, 2, 3$ bezeichnet.

Würden wir dem Parameter α nur solche Werthe α_s in hinreichender Nähe von α_0 geben, welche symmetrische Functionen $S_0^*(x, \alpha_s)$ bedingen und α_s von α_0 aus continuirlich ändern, so würde auf Grund des Satzes 46 auch die Begrenzung des der Function $S_0^*(x, \alpha_s)$ zugehörigen Kreisbogendreiecks sich continuirlich ändern und damit auch das System der drei Kreise, deren Bogen die Begrenzung bilden. Ist es nun möglich, aus der Function $S_0^*(x, \alpha)$ eine andere Particularlösung $\bar{S}^*(x, \alpha)$ abzuleiten, so dass die drei Kreise der Begrenzung der

$\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ entsprechenden Kreisbogendreiecke für die verschiedenen Werthe α_s mit den für $S_0^*(x, \alpha_0) = \bar{S}^*(x, \alpha_0)$ sich ergebenden Kreisen zusammenfallen? Im bejahenden Falle dürfen auch die drei Fixpunkte für den Zweig $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$, die für $\alpha = \alpha_0$ die Werthe $e_i(\alpha_0)$ haben, sich mit α_s nicht ändern. Diese Bedingung ist aber gerade ausreichend, um überhaupt eine neue Particularlösung $\bar{S}(x, \alpha)$ zu bestimmen und für letztere folgenden Satz nachzuweisen:

47. Die Particularlösung $\bar{S}(x, \alpha)$ mit dem $S_0^*(x, \alpha)$ entsprechenden Zweige $\bar{S}^*(x, \alpha)$ ist in der Nähe eines jeden Punktes x_1, α_0 regulär, wenn nur x_1 von 0, ∞ , 1 verschieden und keine Unendlichkeitsstelle der Function $\bar{S}(x, \alpha_0) = S_0(x, \alpha_0)$ ist.

Aus der geometrischen Theorie der Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt wissen wir nun, dass es in jedem Falle überhaupt nur eine endliche Zahl verschiedener Schaaren solcher Kreisbogendreiecke für vorgegebene Werthe λ, μ, ν giebt, also auch nur eine endliche Zahl verschiedener Systeme dreier Kreise, deren Bogen die Begrenzungen bilden, wenn wir wieder solche Systeme nicht als verschieden betrachten, die durch lineare Transformation in einander übergeführt werden können. Dass nun die drei Kreise der Begrenzung der Kreisbogendreiecke, welche dem Zweige $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ für die verschiedenen Werthe α_s entsprechen, bei Aenderung von α , sich etwa linear transformirten, ist deswegen ausgeschlossen, weil die drei ausgewählten Fixpunkte unverändert bleiben. Es folgt daher, was wir wünschten:

48. Die zu $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ für die verschiedenen Werthe α_s in hinreichender Nähe von α_0 gehörenden Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt können sich nothwendig nur darin unterscheiden, dass ihr Einschnitt mehr oder weniger verlängert oder zusammengezogen ist.

Da nun nach dem Satze 47 der Zweig $\bar{S}^*(x, \alpha)$ auch in der Nähe des Punktes $x = r_0, \alpha = \alpha_0$ regulär ist, so folgt:

49. Der Knotenpunkt d_1 , d. h. der Werth $\bar{S}^*(r, \alpha)$, ist eine in der Nähe von α_0 reguläre Function von α .

Hieraus ergibt sich folgendes Endresultat:

50. Lassen wir α von α_0 aus sich continuirlich so ändern, dass der entsprechende Nebenpunkt r , ohne gleich 0, ∞ , 1 zu werden, nur solche Werthe α_s annimmt, welche symmetrische Functionen $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ bedingen, so ändern die der Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ entsprechenden Kreisbogendreiecke ihre Begrenzung einzig und allein dadurch, dass ihr Einschnitt sich continuirlich fortsetzt oder zusammenzieht.

Wir behalten jetzt keine andere einschränkende Annahme bei als die, dass der Hauptfall vorliege und keiner der (reellen oder rein imaginären) Exponenten λ, μ, ν ganzzahlig sei. Das Endergebniss der

vorstehenden Betrachtungen findet dann seinen Ausdruck in der folgenden Umkehrung des Satzes 50, die indess keines neuen Beweises bedarf, da jedem Kreisbogendreieck ein und nur ein Werth α , entspricht:

51. *Wenn wir ausgehend von einem beliebigen Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt den Einschnitt desselben continuirlich verlängern oder zusammenziehen, so wandert dementsprechend der Nebenpunkt r continuirlich in dem bezüglichen Intervall der Axe des Reellen.*

Auf Grund der Thatsache, dass die Anwendung der in den §§ 7—10 entwickelten Methoden uns *alle* Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt für gegebene Exponenten λ, μ, ν liefert, können wir hinzufügen:

52. *Gelangen wir hierbei zu einem ersten oder zweiten Grenzdreieck, so erreicht der Nebenpunkt r nothwendig einen der singulären Punkte $0, \infty, 1$ und zwar z. B. den Punkt 1, wenn der Knotenpunkt d_1 in den Eckpunkt c_1 oder in den Punkt c_1^* , den zweiten Schnittpunkt der Seiten $c_1 a_1$ und $c_1 b_1$, übergeht.*

Unsere bisherige Untersuchung lässt sich nun leicht auf den Fall übertragen, dass einer oder mehrere der Exponenten *ganzzahlig* sind, während nach wie vor der Hauptfall vorliegt. Wir wollen auf die geringen Modificationen, welche die Betrachtungen dieses Paragraphen hierbei zu erleiden haben, nicht näher eingehen. Als Resultat ergibt sich, dass die Sätze 51 und 52 auch bei Zulassung ganzzahliger Exponenten unveränderte Gültigkeit behalten.

Ein weiterer Schritt wird dann der sein, dass wir unsere Untersuchung auch auf den Ausnahmefall zu übertragen unternehmen. Sind im Ausnahmefall alle drei Exponenten rein imaginär oder zwei rein imaginär, der dritte reell, so giebt es ja überhaupt nur ein einziges hierher gehöriges Kreisbogendreieck mit oder ohne Knotenpunkt für gegebene Exponenten λ, μ, ν , während der Ausnahmefall von vorneherein ausgeschlossen ist, wenn nur einer der Exponenten rein imaginär, die übrigen reell sind. So bleibt nur der Fall dreier *reeller* Exponenten noch zu betrachten übrig. Die S -Functionen genügen entweder einer Differentialgleichung vom Typus A oder einer solchen vom Typus B (vgl. S. 493). Die durch die Gleichung (16) (S. 510) gegebene Substitution geht jetzt über in:

$$(16^*) \quad r = \alpha.$$

Ferner gilt die Formel (17), wenn der Typus A vorliegt, die Formel (17*) (S. 510, Anm. 1), wenn der Typus B vorliegt; diese Formeln nehmen indess die einfache Gestalt der Gleichungen (9^a) und (9^b) (S. 493) an. Alle für den Hauptfall ausgeführten Entwicklungen dieses und des vorigen Paragraphen bleiben jetzt unverändert auch für den Ausnahmefall gültig, wenn wir nur die Voraussetzung hinzufügen,

dass α_0 von dem Werthe $r^{***} = \frac{\lambda}{\mu}$ (Gl. (12), S. 492) ausgeschlossen ist. Denn da dem Zweige $S_0^*(x, r^{***})$ das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles entspricht, so können wir in diesem Falle allgemein nicht drei von einander verschiedene Fixpunkte angeben, auch nicht bei Zuhülfenahme von analytischen Fortsetzungen des Zweiges

$$S_0^*(x, r^{***}).$$

Dem Satze 52 (S. 514) haben wir noch folgende Ergänzung hinzuzufügen, von deren Richtigkeit man sich wieder leicht überzeugt im Hinblick darauf, dass unsere Constructionsmethoden *alle* Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und gegebenen Exponenten λ, μ, ν liefern:

52*. *Stets dann und nur dann hat der Nebenpunkt r gerade den Werth r^{***} erreicht, wenn wir bei Fortsetzung des Einschnittes in einem Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt zu einem in zwei Zweiecke zerfallenden Bereiche oder beim Zusammenziehen des Einschnittes zu einem einzigen Zweieck gelangt sind, d. h. wenn das Kreisbogendreieck (ebenso wie der Zweig $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$) ausartet. An die Stelle des ausgearteten Bereiches tritt das Kreisbogendreieck des Uebergangsfalles; dasselbe gehört dann zu einer Particularlösung, die eben nicht durch den betrachteten Grenzübergang aus der Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ hervorgeht.*

§ 13.

Das Verhalten der symmetrischen S-Functionen beim Uebergang zum zweiten Grenzdreieck.

Wir werfen die Frage auf: *Wie verhält sich die im § 12 (S. 512) definirte Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ des Hauptfalles oder des Ausnahmefalles, wenn das ihr entsprechende Kreisbogendreieck durch Fortsetzung des Einschnittes schliesslich in zwei Theile zerfällt, von denen einer ein Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt ist, d. h. also, kurz gesagt, beim Uebergang zum zweiten Grenzdreieck?*

Aus unseren geometrischen Untersuchungen ergeben sich zwei Möglichkeiten bei diesem Grenzübergang. Die Verlängerung des Einschnittes kann schliesslich einen der begrenzenden Kreisbogen innerlich treffen oder auf eine Ecke des Bereiches stossen (vgl. z. B. Satz 31, S. 502). Bei der ersten Möglichkeit wurde ein Zweieck „abgeschnürt“, wie wir sagten, und das übrig bleibende Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt besass den Endwerth des Knotenpunktes als neue Ecke, bei der zweiten Möglichkeit wurde eine Kreisfläche „abgeschnürt“, ohne dass das übrig bleibende Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt eine neue Ecke bekam. Wir wollen unsere Betrachtungen an ein specielles

Beispiel für die erste Möglichkeit anlehnen, jedoch ausdrücklich hervorheben, dass sich dieselben, wie man leicht erkennt, unmittelbar auf jedes beliebige andere Beispiel für die erste oder zweite Möglichkeit übertragen lassen, ev. mit unwesentlichen Modificationen, welche die Bezeichnung, nicht die Sache selbst betreffen. Um uns bestimmter ausdrücken zu können, wollen wir annehmen, dass der Nebenpunkt r sich im Intervall von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen befindet und nach Satz 52 (S. 514) mit dem singulären Punkte 1 zusammenfällt, während gleichzeitig der Knotenpunkt d_1 desjenigen Kreisbogendreiecks, von dem wir ausgehen, den Punkt c_1^* erreicht. Die Lage des Kreisbogendreiecks möge ferner in der Ebene der Function so gewählt sein, dass der Punkt c_1^* im Endlichen gelegen ist. Diese Annahmen beeinträchtigen ersichtlich die Allgemeingültigkeit unserer Untersuchung nicht.

Ihnen entsprechend sei als Beispiel das bereits in der Einleitung erwähnte Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt auf der Seite b_1c_1 ausgewählt, das als Exponenten $\lambda = 1/2$, $\mu = 2/3$, $\nu = 1/2$ besitzt (Fig. 2, S. 482). Bei Fortsetzung des Einschnittes zerfällt der Bereich schliesslich in das Zweieck $c_1c_1^*$ mit dem Winkel $\nu\pi$ und das Kreisbogendreieck $a_1b_1c_1^*$ mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $(1-\nu)\pi$, was Figur 4 (S. 484) veranschaulicht.

Aus dem Satze 47 (S. 513) folgt zunächst:

53. *Der Functionszweig $\bar{S}^*(x, a_s)$, welcher die Halbebene \mathfrak{P} in bekannter Weise auf das Kreisbogendreieck der Figur 2 abbildet, geht, wenn r gleich 1 wird, für jeden von $0, \infty, 1$ verschiedenen Punkt x in den Werth desjenigen Zweiges s^* einer Function s für denselben Punkt x über, welcher die Halbebene \mathfrak{P} auf das Kreisbogendreieck $a_1b_1c_1^*$ ohne Knotenpunkt in bekannter Weise abbildet.*

Uns interessirt jetzt besonders das Verhalten des Zweiges $\bar{S}^*(x, a_s)$ in der Umgebung des Punktes 1 bei unserem Grenzübergang.

Es sei um den Punkt 1 der (x) -Ebene ein Kreis mit einem unendlich kleinen Radius ϱ beschrieben, der die Intervalle von 0 bis 1 und von 1 bis $+\infty$ der Axe des Reellen bez. in den Punkten x_0, y_0 schneidet. Die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Hälfte x_0y_0 desselben wird durch die Grenzfunction s^* unseres Beispiels auf eine analytische Curve abgebildet, die von einem Punkte x_1 des Bogens $a_1c_1^*$ zu einem Punkte y_1 des Bogens $b_1c_1^*$ ganz innerhalb des Kreisbogendreiecks $a_1b_1c_1^*$ verläuft, d. h. ohne die Begrenzung desselben noch an einer anderen Stelle als in den Punkten x_1, y_1 zu treffen. Der durch diese Curve am Punkte c_1^* abgetrennte Theil des Kreisbogendreiecks $a_1b_1c_1^*$ ohne Knotenpunkt möge den Unendlichkeitspunkt der Ebene der Function nicht enthalten, was durch die Wahl einer hinreichend kleinen Grösse ϱ stets erreicht werden kann. Wir

denken jetzt eine Kreisfläche mit hinreichend kleinem Radius σ mit ihrem Mittelpunkt längs der Curve $x_1 y_1$ entlang geführt. Der Radius σ soll so klein gewählt sein, dass die Kreisfläche bei ihrer Bewegung von der den Punkt c_1^* enthaltenden Hälfte des Bogens $y_1 c_1^*$ nicht geschnitten wird.

Man kann jetzt auf Grund der Sätze 52 (S. 514) und 47 (S. 513) eine positive Grösse ε_0 , die $< \varrho$ ist, so angeben, dass für jede den Ungleichungen $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ genügende Grösse ε erstens der dem Nebenpunkt $r = 1 + \varepsilon$ entsprechende Knotenpunkt d_1 der den Punkt c_1^* enthaltenden Hälfte des Bogens $y_1 c_1^*$ angehört, zweitens die dem Parameter $r = 1 + \varepsilon$ entsprechende Function $\bar{S}^*(x, \alpha_s)$ den Halbkreis $x_0 y_0$ in der (x) -Ebene auf eine Curve abbildet, die von einem Punkte des Bogens $a_1 c_1$ zu einem Punkte des Bogens $b_1 d_1$ geht und ganz innerhalb des soeben vom Kreise mit dem Radius σ beschriebenen Flächenstreifens liegt. Uns kommt es darauf an zu erkennen, dass diese Curve dann nicht in den Bereich des in der Grenze abgeschnürten Zweiecks $c_1 c_1^*$ hineintritt. Denn dies könnte nur stattfinden, wenn sie die den Punkt c_1^* enthaltende Hälfte des Bogens $y_1 c_1^*$ erreichte oder überschritte, was indess nicht möglich ist, da dieses Bogenstück ganz ausserhalb des Flächenstreifens liegt.

54. *Dieses Zweieck wird daher durch die inverse Function $x(\bar{S}^*)$ sein Abbild nothwendig innerhalb der durch den Halbkreis mit dem Radius ϱ abgetrennten Umgebung des singulären Punktes 1 in der Halbebene \mathfrak{P} finden für alle Werthe des Nebenpunktes $r = 1 + \varepsilon$, wo ε den Ungleichungen $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ genügt.*

Da wir es aber in der Hand haben, die Grösse ϱ gegen 0 convergiren zu lassen und damit die durch den Kreis mit dem Radius ϱ abgetrennte Umgebung des Punktes 1 beliebig zusammenzuziehen, ohne dass der soeben ausgesprochene Satz seine Gültigkeit verliert, so gewinnen wir das überraschende Resultat:

55. *Die Abbilder aller Punkte des durch den Kreisbogen $d_1 c_1^*$ abgeschnittenen Zweiecks nähern sich dem singulären Punkte 1 der Halbebene \mathfrak{P} um so mehr, je weiter r in den Grenzwert 1 übergeht und fallen in der Grenze sämmtlich mit dem Punkte 1 selbst zusammen.*

In diesem eigenartigen Satze haben wir das interessanteste Ergebniss der vorliegenden Arbeit zu erblicken. In ihm erkennen wir jetzt auch die Berechtigung unserer Ausdrucksweise, von unserem ursprünglichen Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt habe sich bei dem zweiten Grenzübergang ein Zweieck „abgeschnürt“, da das Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt der in der Grenze allein in Betracht kommende Theil des zerfallenden Bereiches ist.

Analytisch können wir das Ergebniss unserer Untersuchung allgemein folgendermassen aussprechen:

56. Die Function $\bar{S}^*(x, a_s)$ nimmt einen wohlbestimmten Grenzwert für $\lim_{\varepsilon=0} r = 1 + \varepsilon$ an, wenn x gleichzeitig gegen einen von 1 verschiedenen Werth convergirt, wird dagegen unbestimmt (d. h. es lassen sich je nach der Art des Grenzüberganges verschiedene Grenzwerte erreichen), wenn x gleichzeitig gegen 1 convergirt.

Die Grenzfunktion stimmt für alle Werthe x , die von 1 verschieden sind, wie wir bereits oben anführten, mit derjenigen Function s^* überein, welche die Halbebene \mathfrak{P} in bekannter Weise auf das zweite Grenzdreieck abbildet. Sie besitzt im Punkt $x = 1$, um uns einer Ausdrucksweise Riemann's zu bedienen, eine „hebbare Unstetigkeitsstelle“. Die Unbestimmtheit der Grenzfunktion im Punkt $x = 1$ wollen wir jetzt durch die willkürliche Festsetzung beseitigen, dass diese Function für $x = 1$ und $r = 1 + 0$ denjenigen Grenzwert annehmen soll, den die Function s^* für $x = 1$ besitzt. In diesem Sinne soll es daher auch verstanden sein, wenn wir jetzt kurz ohne Einschränkung sagen:

57. Für $r = 1 + 0$ geht die Function $\bar{S}^*(x, a_s)$ in diejenige Function s^* über, welche die Halbebene \mathfrak{P} in bekannter Weise auf das zweite Grenzdreieck abbildet.

Dass analoge Betrachtungen auch in den im § 4 behandelten speciellen Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$ gelten, will ich hier nur eben erwähnen.

§ 14.

Ueberblick über alle Kreisbogendreiecke mit Knotenpunkt für beliebig vorgegebene Exponenten λ, μ, ν .

Die in den Sätzen 51, 52 (S. 514) und 52* (S. 515) ausgesprochenen Resultate setzen uns in den Stand, jetzt (abgesehen von den Kreisbogendreiecken des speciellen Falles $\lambda = \mu = \nu = 0$, § 4, S. 493, sowie denjenigen des Uebergangsfalles) alle für vorgegebene Exponenten λ, μ, ν zu construirenden Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt und ihre Grenzdreiecke, ohne die drei Kreise ihrer Begrenzung zu ändern, in derjenigen Ordnung an einander zu reihen, in der sie auf einander folgen, wenn der Nebenpunkt r den Sätzen 19—27 des § 5 (S. 497 f.) entsprechend den zulässigen Theil der Axe des Reellen continuirlich durchläuft.

Eine wesentliche Ergänzung der genannten Sätze des § 5 ist im Folgenden darin zu erblicken, dass wir jetzt auch anzugeben vermögen, in welcher Reihe die einzelnen Grenzdreiecke hierbei auf einander folgen.

Wir stützen uns auf nachstehende allgemeinen Sätze:

58. Abgesehen von den Kreisbogendreiecken des speciellen Falles, denjenigen mit drei rein imaginären Winkeln sowie denjenigen des Uebergangsfalles besitzt jedes Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt wenigstens

ein erstes oder ein zweites Grenzdreieck, wenn es nicht sogar beide besitzt.

59. Jedes Grenzdreieck vermittelt den Uebergang entweder zwischen solchen zwei Schaaren von Kreisbogendreiecken, bei welchen der Knotenpunkt auf verschiedenen der Seiten $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 a_1$ liegt, oder zwischen zwei verschiedenen Schaaren, bei welchen er auf derselben Seite liegt.

Zu den schematischen Figuren dieses Paragraphen schicke ich sogleich folgende Erklärung voraus. Sie stellen den längs der Axe des Reellen geführten Querschnitt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche (bez. der zwei einzelnen Blätter) dar, auf der wir nach § 3 (S. 492 und 493) im Hauptfall (bez. im Ausnahmefall) den Parameter r deuten. Anstatt mit 0 , ∞ , 1 bezeichnen wir indess zweckmässig, wie zu Anfang dieser Arbeit, die singulären Stellen mit a , b , c und verlegen den Punkt b ins Endliche. Die Lage etwa vorkommender Verzweigungspunkte r^* und r^{**} oder eines Doppelpunktes r^{***} ist gleichfalls angedeutet. Die stark ausgezogenen Theile der Axe des Reellen geben das Gebiet an, in dem der Parameter r liegen muss, um eine symmetrische S -Function zu bedingen. An jeder der singulären Stellen a , b , c ist durch einen kleinen Kreis bez. Stern angegeben, ob sich ein erstes bez. zweites Grenzdreieck ergibt, wenn der Parameter r in diese Stelle hineinrückt; endlich sind auch noch die Exponententripel angegeben, die zu den Grenzdreiecken gehören. Die römischen Ziffern geben an, nach welcher Methode die Kreisbogendreiecke der betreffenden Schaar zu construiren sind.

60. So viele römische Ziffern die Figuren zeigen, so viele verschiedene Schaaren von Kreisbogendreiecken giebt es in den einzelnen Fällen. —

Auch den Beispielen der Figurentafel dieser Arbeit sind solche schematische Figuren vorangestellt. Die arabischen Ziffern in denselben an den Stellen a , b , c oder innerhalb der Intervalle deuten für die mit gleicher Ziffer versehenen Kreisbogendreiecke die Lage des Parameters r an.

Die folgenden Betrachtungen sind denen des § 5 (S. 497 f.) entsprechend.

A. Es seien alle drei Exponenten λ , μ , ν reell (vgl. Satz 36, S. 506). Wir setzen $\lambda \geq \mu \geq \nu$ voraus und unterscheiden, wie früher:

I. den Hauptfall:

$$\alpha) \lambda < \mu + \nu,$$

$$\beta) \lambda > \mu + \nu,$$

II. den Ausnahmefall:

$$\alpha) \lambda = \mu + \nu, \nu > 0,$$

$$\beta) \lambda = \mu > 0, \nu = 0.$$

III. den speciellen Fall $\lambda = \mu = \nu = 0$. Dieser besondere Verhältnisse darbietende Fall ist im § 4 (S. 493) erledigt.

Ad. I, α . Hier gilt Fig. 27*). Es giebt stets 6 Grenzdreiecke, welche in der durch folgende Exponententripel angegebenen Reihe cyklich auf einander folgen:

$$|\lambda-1|, \mu, \nu; \lambda, \mu, \nu+1; \lambda, |\mu-1|, \nu; \lambda+1, \mu, \nu; \lambda, \mu, |\nu-1|; \lambda, \mu+1, \nu.$$

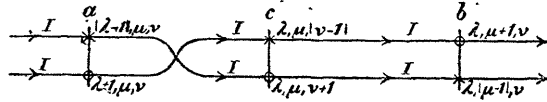


Fig. 27.

Ad. I, β . Je nachdem kein Exponent oder einer oder zwei verschwinden, gilt bez. eine der Figuren 28 a), b), c).

Die für verschwindende Exponenten zum Theil zusammenfallenden

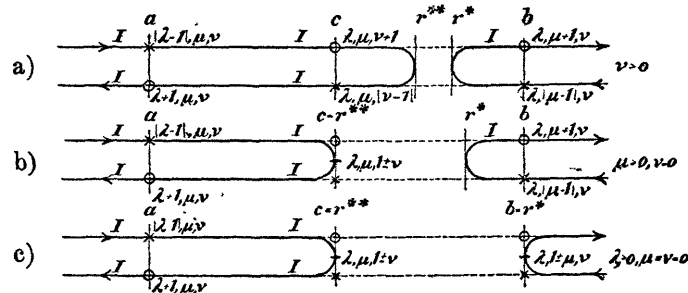


Fig. 28.

sechs Grenzdreiecke folgen jetzt in der durch nachstehende Exponententripel angegebenen Reihe cyklich auf einander:

$$|\lambda-1|, \mu, \nu; \lambda, \mu, \nu+1; \lambda, \mu, |\nu-1|; \lambda+1, \mu, \nu; \lambda, |\mu-1|, \nu; \lambda, \mu+1, \nu.$$

Ad. II, α . Es gilt Fig. 29. Die Kreisbogendreiecke des einen bez. anderen Blattes entsprechen

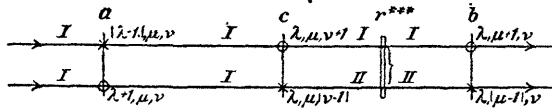


Fig. 29.

der Differentialgleichung vom Typus A bez. der vom Typus B (vgl. S. 493). Ersteren gehören die Grenzdreiecke an:

$$\lambda, \mu+1, \nu; |\lambda-1|, \mu, \nu; \lambda, \mu, \nu+1,$$

d. h. zwei erste und ein zweites Grenzdreieck, letzteren die Grenzdreiecke:

$$\lambda, |\mu-1|, \nu; \lambda+1, \mu, \nu; \lambda, \mu, |\nu-1|,$$

d. h. zwei zweite und ein erstes Grenzdreieck.

*) Je ein Beispiel für diesen Fall I, α , wie für die Fälle I, β und II, α giebt die von mir gezeichnete Tafel der nachgelassenen Arbeit Ritters: Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt, Math. Annalen Bd. 48, p. 1—36, (1896).

A d. II, β . Es gilt Fig. 30. Das dem Werth $r^{***} = 1$ entsprechende Kreisbogendreieck ohne Knotenpunkt mit den Exponenten $\lambda, \mu, 1$ entspricht dem Uebergangsfalle. Es gehören ferner den Kreis-

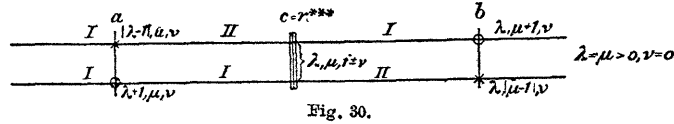


Fig. 30.

bogendreieck des einen Blattes der Differentialgleichung vom Typus A entsprechend die Grenzdreiecke:

$$\lambda, \mu + 1, \nu; |\lambda - 1|, \mu, \nu,$$

denen des anderen Blattes der Differentialgleichungen vom Typus B entsprechend die Grenzdreiecke:

$$\lambda, |\mu - 1|, \nu; \lambda + 1, \mu, \nu,$$

d. h. jedesmal ein erstes und ein zweites Grenzdreieck an.

Das Beispiel mit den Exponenten $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 0$ giebt die Tafel dieser Arbeit unter Nr. I.

B. Es seien die Exponenten λ und μ reell mit der Bedingung $\lambda \geq \mu$, der Exponent ν rein imaginär (vgl. § 9, S. 506f.). Es liegt nur der Hauptfall vor. Je nachdem keiner der Exponenten λ, μ oder einer oder zwei verschwinden, gilt bez. die Figur 31a), b), c).

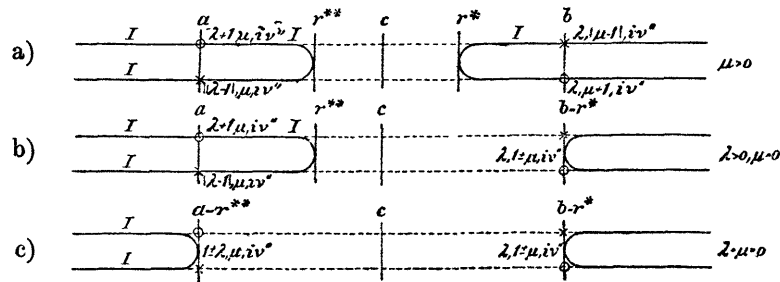


Fig. 31a), b), c).

Die für verschwindende Exponenten zum Theil zusammenfallenden vier Grenzdreiecke folgen jetzt in der durch nachstehende Exponententripel gegebenen Reihe cyclisch aufeinander:

$$\lambda + 1, \mu, i\nu''; |\lambda - 1|, \mu, i\nu''; \lambda, \mu + 1, i\nu''; \lambda, |\mu - 1|, i\nu''.$$

Das Beispiel mit den Exponenten $\lambda = \frac{5}{12}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu''i = \frac{i}{\pi} \log 3$ giebt die Tafel unter Nr. II.

C. Es seien zwei Exponenten rein imaginär, der dritte reell (vgl. § 9, S. 507f.). Wir unterscheiden:

- I. den Hauptfall. Die Exponenten seien $\lambda, i\mu'', i\nu'', \mu'' > \nu''$.
- II. den Ausnahmefall. Die Exponenten seien $i\lambda'' = i\mu'', \nu = 0$.

A d. I. Je nachdem $\lambda > 0$ oder $\lambda = 0$ ist, gilt Fig. 32 a) oder 32 b). Die im speziellen Falle $\lambda = 0$ identischen Grenzdreiecke haben die Exponententripel: $\lambda + 1, i\mu'', i\nu''$ und $|\lambda - 1|, i\mu'', i\nu''$.

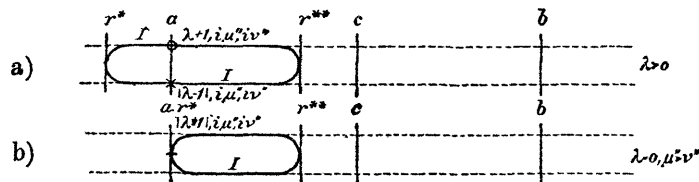


Fig. 32 a), b).

Das Beispiel mit den Exponenten $\lambda = \frac{1}{2}, \mu'' i = \frac{i}{\pi} \log 3, \nu'' i = \frac{i}{\pi} \log 2$ giebt die Tafel unter Nr. III.

A d. II. Es gilt Fig. 33. Es giebt nur ein einziges Kreisbogendreieck, nämlich nur für den Uebergangsfall, und zwar ein solches ohne Knotenpunkt mit den Exponenten $i\lambda'' = i\mu'', \nu = 0$ (Fig. 23, S. 507).

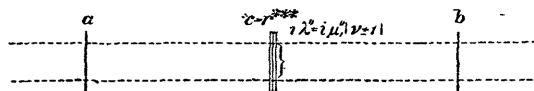


Fig. 33.

D. Es seien alle drei Exponenten rein imaginär und $\lambda'' \geq \mu'' \geq \nu''$ (vgl. § 10, S. 508f.). Wir unterscheiden:

- I. den Hauptfall $\lambda'' > \mu'' + \nu''$.
- II. den Ausnahmefall $\lambda'' = \mu'' + \nu''$.

Grenzdreiecke giebt es nicht.

A d. I. Es gilt Fig. 34 (vgl. Fig. 26, S. 509).

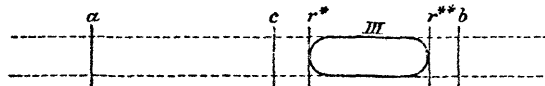


Fig. 34.

A d. II. Es gilt Fig. 35. Es giebt nur ein einziges Kreisbogen-

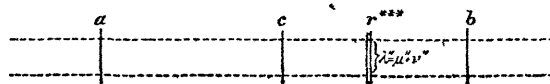


Fig. 35.

dreieck mit Knotenpunkt und zwar für $r = r^{***}$, also nur ein solches für den Uebergangsfall.