

Article

Ueber Kreisbogenpolygone. (Erste Abhandlung)

Schönflies, A.

in: Periodical issue | Mathematische Annalen -

42 | Periodical

32 page(s) (377 - 408)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Ueber Kreisbogenpolygone.

(Erste Abhandlung).

Von

A. SCHÖNFLIES in Göttingen.

Seit den Untersuchungen des Herrn Schwarz über conforme Abbildung ist das Kreisbogenpolygon mehr und mehr zu einem fundamentalen Hilfsmittel der modernen functionentheoretischen Betrachtungen geworden; ein Studium seiner geometrischen Natur dürfte daher auch ausserhalb der reinen Geometrie nicht ohne Nutzen sein.

Ich möchte hierfür im besondern auf diejenigen Untersuchungen verweisen, die Herr Klein in letzter Zeit im Gebiet der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angestellt hat; in ihnen ist auch die eigentliche Veranlassung zu der folgenden Arbeit enthalten. Bekanntlich hat Herr Schwarz zuerst gezeigt,*) dass der Quotient zweier Zweige der hypergeometrischen Reihe die Abbildung der Halbebene auf ein Kreisbogendreieck vermittelt. Steht hier noch die blosse Thatsache der Abbildung im Vordergrund des Interesses, so ist Herr Klein dazu fortgeschritten, das Kreisbogendreieck zum eigentlichen Operationsobject zu machen, und des weiteren darauf hinzuweisen, dass für die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten ganz allgemein dasjenige Kreisbogenpolygon mit Erfolg zu benutzen ist, auf welches die Halbebene durch den Quotienten zweier Particularlösungen abgebildet wird.**)

Hierbei liegt natürlich die Voraussetzung zu Grunde, dass es gelingt, die Gesamtheit der Kreisbogenpolygone morphologisch zu beherrschen. Für die Kreisbogendreiecke ist diese Aufgabe von Herrn Klein in einer Arbeit über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe vollständig erledigt worden.***) Eine analoge Untersuchung der

*) Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist. (Crelle's Journ. Bd. 37, S. 292).

**) Vgl. besonders Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Diese Annalen, Bd. 37, S. 573.

***) a. a. O. S. 579 ff.

Windungspunkten gewinnen wir, indem wir Polygone mit einem Windungspunkt beliebig aneinandersetzen. Ein Polygon mit zwei Windungspunkten, das im übrigen lauter endliche Seiten besitzt, existirt bereits für $n = 7$. Man erhält es am einfachsten, indem man (Fig. 2) ein Fünfeck und ein Sechseck mit je einem Windungspunkt aneinandersetzt, für welches die Winkel an den coincidirenden Ecken zusammen gleich π sind; alsdann sind diese Punkte für das neue Polygon keine Eckpunkte, und man erhält in der That ein Siebeneck. Man schliesst auf diese Weise weiter, dass m Windungspunkte bei lauter endlichen Seiten bereits in einem Polygon mit $2m + 3$ Ecken auftreten können. Es ist klar, dass diese Windungspunkte in beliebiger Art zusammenfallen können.

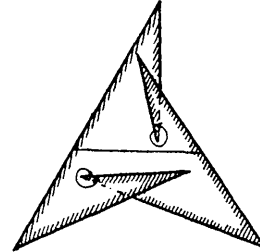


Fig. 2.

Eine Seite, die v mal durch den Unendlichkeitspunkt zieht, soll v -fach umlaufend genannt werden; den einfachsten Fall eines Polygons mit einer einfach umlaufenden Seite zeigt Fig. 3, die ein Dreieck ABC darstellt. Drehen wir im Dreieck ABC die Seite AC um A nach aussen, so entsteht ein Dreieck, dass ausser der umlaufenden Seite überdies in A einen Windungspunkt hat, und wenn wir mit der Drehung der Seite AC fortfahren, so erhalten wir schliesslich ein Dreieck, dessen Seite BC zweifach umlaufend ist, u. s. w.



Fig. 3.

Wir können uns ein Polygon mit einer zweifach umlaufenden Seite noch auf andre Weise bilden. Wir benutzen dazu (Fig. 4) ein Dreieck ABC und das Fünfeck $CDEFG$ mit je einer umlaufenden Seite und zwar setzen wir voraus, dass die beiden Winkel C zusammen gleich π sind. Legen wir nun das Fünfeck von aussen so an das Dreieck, dass C auf C und CD auf CB fällt, so entsteht wiederum ein Polygon mit einer zweifach umlaufenden Seite, nämlich das Polygon $ABDEFG$. Ausdrücklich möge bemerkt werden, dass in diesem Polygon kein Eckpunkt ein Windungspunkt ist.

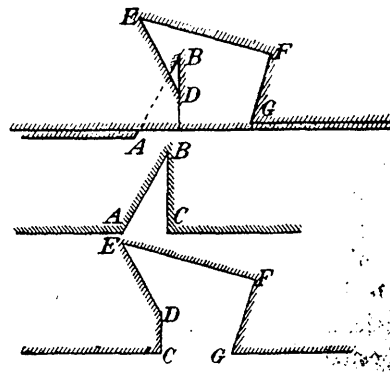


Fig. 4.

In dieser Weise können wir fortfahren; wir können uns dadurch Polygone mit beliebig vielen mehrfach umlaufenden Seiten verschaffen.

Endlich führen wir noch einige Polygone an, deren Fläche den Unendlichkeitspunkt in sich enthält. Zieht die Fläche p mal durch ihn hindurch, so sagen wir, das Polygon besitzt p *Flächendurchgänge*.

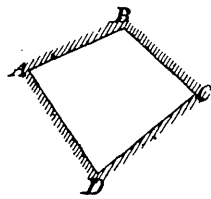


Fig. 5.

Ist $ABCD$ ein gewöhnliches Viereck, so bestimmt (Fig. 5) das Aeussere von $ABCD$ ein Viereck, das einen Flächendurchgang besitzt; es besteht aus demjenigen Theil der complexen Ebene, der nach Entfernung des elementaren Vierecks übrig bleibt. Wir brauchen jetzt wieder nur zwei derartige Polygone an einander zu setzen um ein Polygon mit zwei Flächendurchgängen zu erhalten. Ein

solches Polygon zeigt z. B. Fig. 6; es besteht aus den beiden Vierecken $ABCD$ und $DEFA$ und hat daher in A einen Windungspunkt.

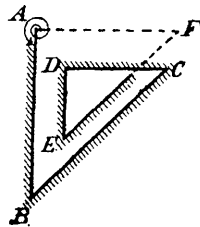


Fig. 6.

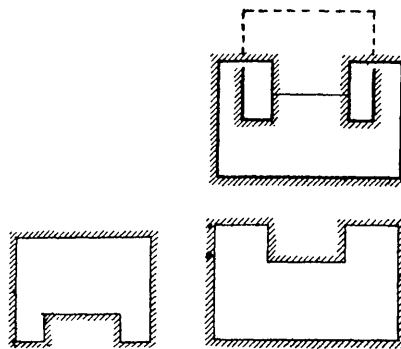


Fig. 7.

Ein anderes derartiges Polygon zeigt Fig. 7; es hat keinen Windungspunkt und geht durch Zusammensetzung der beiden nebenstehenden Achtecke hervor u. s. w. u. s. w.

Die meisten der hier vorgeführten Polygone bedecken Theile der Ebene mehrfach und sind daher mehrblättrige Flächenstücke. Wir führen in dieser Hinsicht folgenden Sprachgebrauch ein. Sind Q und R irgend zwei im Innern oder auf dem Umfang gelegene Punkte, die durch einen ganz in einer Ebene enthaltenen, und im Innern des Polygons verlaufenden Linienzug l verbunden werden können, so sagen wir, Q und R liegen in demselben Blatt. Giebt es einen solchen Linienzug nicht, so sagen wir, Q und R liegen in verschiedenen Blättern. Denken wir uns den Linienzug l in einer und derselben Ebene gezeichnet, so darf er sich im ersten Fall nicht kreuzen, im zweiten besitzt er nothwendig mindestens einen Kreuzungspunkt. Im Grenzfall, d. h. wenn Q und R übereinander liegen, wollen wir ebenfalls sagen, dass sie verschiedenen Blättern angehören. Der Linienzug l kehrt dann in sich selbst zurück, kann aber nicht in einen Punkt zusammengezogen werden.

Wir beantworten im Anschluss hieran die Frage, ob und wann mehrere Ecken oder Seiten des Polygons coincidiren können, und zwar ist dies so zu verstehen, dass wir uns die Begrenzung des Polygons in einer und derselben Ebene gezeichnet denken. Es sei A ein Eckpunkt, der mit dem Seitenstück s in demselben Blatt liegt. Bewegt sich der Punkt A so, dass er von innen auf s fällt, so hört das Polygon auf, einfach zusammenhängend zu sein; es zerfällt in zwei getrennte Polygone, die in A zusammenstossen. Wird jedoch die Ecke A so bewegt, dass sie von aussen auf s fällt, so hört der Zusammenhang nicht auf; wir haben nach dem Obigen A und s als in verschiedenen Blättern liegend aufzufassen, und dass Coincidenz in verschiedenen Blättern stattfinden darf, ist selbstverständlich. Wenn man nun A noch weiter in der bisherigen Richtung, also in das Innere des Polygons hineinrücken lässt, so liegt A bereits in einem andern Blatt, als die darunter befindliche Polygonfläche.

Das gleiche gilt, wenn zwei Ecken oder zwei Seiten aufeinander fallen.

Ueber die Winkel des Polygons bemerken wir noch folgendes. Es handelt sich um die Auffassung solcher Polygone, für welche einige Winkelzahlen λ resp. λ' ganzzahlige Werthe annehmen. Ist $\lambda > 2$, so liegt an der bezüglichen Ecke W ein Windungspunkt, die Schenkel des Winkels verlaufen in verschiedenen Blättern, dieser Fall stellt also eine eigentliche Besonderheit nicht dar. Das gleiche gilt für $\lambda = 2$; wir haben dann wieder nur den Grenzfall vor uns, dass die beiden Winkelschenkel von aussen zusammenfallen.

Endlich bedarf auch der Fall $\lambda = 1$ keiner besonderen Erörterung. Den Fall $\lambda = 0$ schliessen wir dagegen aus; er bedingt zwar keine wesentlichen Ausnahmen für die im Folgenden abzuleitenden Sätze, doch bedürfen die Beweise für $\lambda = 0$ einiger Modificationen, auf die wir, um die Darstellung nicht zu sehr zu dehnen, nicht besonders eingehen wollen.

Schliesslich möge noch darauf hingewiesen werden, dass für die hier im Vordergrund stehenden Zwecke kreisverwandte Polygone nicht als verschieden zu betrachten sind. Die Theorie der geradlinigen Polygone ist daher mit der Theorie derjenigen Polygone, deren Seiten sämmtlich durch denselben Punkt gehen, identisch.

Im Interesse der Anschauung werden wir uns auch gelegentlich die Polygone stereographisch auf die Kugel projicirt denken.

§ 2.

Die Hauptrelation.

Für das Folgende setzen wir zunächst voraus, dass alle Ecken des Polygons \mathfrak{P} im Endlichen liegen.

Wir suchen eine Relation, welche die Windungszahlen w mit der Zahl p der Flächendurchgänge und mit den Seitenumlaufszahlen v verbindet. Wir erhalten sie, indem wir das Polygon in ein anderes verwandeln, in welchem alle w , v , p den Werth Null haben. Ein solches Polygon soll ein *Elementarpolygon* heissen; ich bemerke, dass auch ein Elementarpolygon Theile der Ebene mehrfach überdecken kann. (Fig. 8).

Einen Windungspunkt W entfernt man dadurch, dass man ihn durch einen gewöhnlichen Querschnitt q ausschneidet, der auf dem

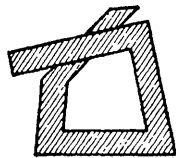


Fig. 8.

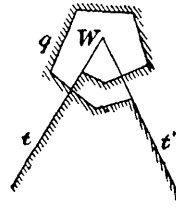


Fig. 9.

einen Schenkel t beginnt und auf dem andern t' endigt (Fig. 9). Dies ist, wenn man den Querschnitt q nur nahe genug um den Punkt W verlaufen lässt, immer möglich; wir dürfen im besondern noch voraussetzen, dass in dem durch q ausgeschnittenen Polygon — von W abgesehen — alle Winkel kleiner als π sind. Der Querschnitt theilt das Polygon \mathfrak{P} in allen Fällen in zwei einfach zusammenhängende Polygone. Eine einmal durch den Unendlichkeitspunkt ziehende Seite s ersetzen wir (Fig. 10) durch den ganz im Endlichen verlaufenden

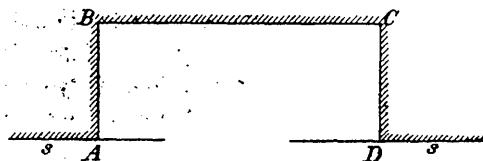


Fig. 10.

Linienzug $ABCD$, in dem der Einfachheit halber alle Winkel rechte sind; d. h. wir schneiden den Unendlichkeitspunkt durch das Viereck $ABCD$ aus. Da wir angenommen haben, dass jede

Ecke des Polygons im Endlichen liegt, so muss es stets möglich sein, die Punkte A , B , C , D dem Unendlichkeitspunkt so nahe anzunehmen, dass kein Polygoneckpunkt innerhalb des ausgeschnittenen Vierecks $ABCD$ liegt.

Der Linienzug $ABCD$ ist ebenfalls ein einfacher Querschnitt, der \mathfrak{P} in zwei einfach zusammenhängende Polygone theilt.

Ist s eine mehrfach umlaufende Seite, so wird der gleiche Process für jedes Theilstück von s , das den Unendlichkeitspunkt enthält, einzeln vorgenommen.

Wir haben das Polygon jetzt bereits in ein anderes verwandelt, das lauter endliche Seiten besitzt und von Windungspunkten frei ist. Es kann nun noch Flächendurchgänge besitzen. Um sie zu tilgen, umgeben wir (Fig. 11) die Unendlichkeitspunkte in den bezüglichen Blättern mit je einem geschlossenen r -Eck ρ und ziehen von irgend einem ihrer Punkte eine Gerade t durch das Innere des Polygons, bis sie — was jetzt nothwendig im Endlichen geschehen muss — den Polygonumfang trifft. Alsdann bildet das r -Eck mit t zusammen einen σ -förmigen Querschnitt, und damit ist jetzt das ursprüngliche Polygon in ein anderes übergeführt, das einfach zusammenhängend ist, von Windungspunkten und Flächendurchgängen frei ist, und lauter endliche Seiten enthält, d. h. in ein Elementarpolygon.

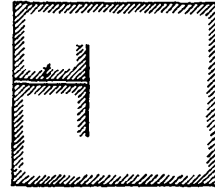


Fig. 11.

Für ein Elementarpolygon \mathfrak{P}' gilt die Winkelrelation der Elementargeometrie, d. h. es ist, wenn n die Seitenzahl bedeutet, $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi \dots$ die Winkel sind und $S\pi$ ihre Summe ist,

$$S = \sum \lambda_i = n - 2.$$

Um dies nachzuweisen, genügt es, \mathfrak{P}' durch einen Querschnitt, der auf seinen Seiten endigt, in zwei Theilpolygone \mathfrak{P}_1' und \mathfrak{P}_2' zu zerlegen, und zu zeigen, dass die Formel für \mathfrak{P}' gilt, wenn sie für \mathfrak{P}_1' und \mathfrak{P}_2' richtig ist. Sind n_1, n_2, S_1, S_2 die bezüglichen Zahlen, so ist, da der Querschnitt auf den Seiten von \mathfrak{P}' endigt,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= n + 4, \\ S_1 + S_2 &= S + 2. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$S_1 = n_1 - 2, \quad S_2 = n_2 - 2,$$

also folgt schliesslich

$$S = n - 2.$$

Die Formel bleibt auch noch bestehen, wenn das Polygon Windungspunkte enthält. Wir denken uns einen Windungspunkt W wie oben durch einen Querschnitt q ausgeschnitten, und bezeichnen das durch q abgetrennte Polygon, welches W enthält, wieder als ein r -Eck ρ . Wird W mit allen seinen Ecken verbunden, so zerfällt es in $r - 2$ gewöhnliche Dreiecke, also ist wieder

$$S_\rho = r - 2$$

wo $S_\rho\pi$ die Winkelsumme des r -Ecks bedeutet. Ist \mathfrak{P}_1 das Restpolygon, so ist auch für dieses

$$S_1 = n_1 - 2.$$

Nun hat ein jeder Querschnitt q bezüglich $r - 1$ Ecken, also folgt

$$n_1 + \sum r = n + 2 \sum (r-1),$$

$$S_1 + \sum S_q = S + 2 \sum (r-2),$$

wo sich die Summe über alle Windungspunkte erstreckt, und hieraus ergibt sich schliesslich

$$S = n - 2; \text{ d. h.}$$

Für jedes n -Eck, das lauter endliche Seiten besitzt und keinen Flächendurchgang enthält, hat die Winkelsumme den Werth $(n-2)\pi$.

Hat das Polygon \mathfrak{P} umlaufende Seiten, aber keine Flächendurchgänge, so verfahren wir folgendermassen: Bei einer Seite s , die v -fach umlaufend ist, werde jeder Unendlichkeitspunkt, wie oben angegeben, durch einen rechtwinkligen Querschnitt q getilgt, dann verwandelt sich das n -Eck \mathfrak{P} in ein Polygon \mathfrak{P}_1 das

$$n_1 = n + 4 \sum v$$

Ecken enthält. Für dieses Polygon gilt die eben abgeleitete Formel, d. h. es ist

$$S_1 = n_1 - 2.$$

Nun bestehen die Winkel von \mathfrak{P}_1 einerseits aus denjenigen von \mathfrak{P} , andererseits aus denen, die an den Querschnitten liegen. Für jeden Querschnitt ist die bezügliche Winkelsumme gleich 2π , daher folgt

$$S_1 = S + 2 \sum v$$

d. h. es ist

$$S = n - 2 + 2 \sum v.$$

Jede einmal durch den Unendlichkeitspunkt ziehende Seite vermehrt daher die Winkelsumme um 2π .

Enthält schliesslich das Polygon \mathfrak{P} auch Flächendurchgänge, so schneiden wir, wie oben, den Unendlichkeitspunkt in jedem Blatt durch ein einfaches r -Eck aus und ziehen die p Transversalen, welche die r -Ecke zu σ -förmigen Querschnitten ergänzen. Von diesen Transversalen nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sie nicht in Eckpunkten endigen, alsdann enthält das so entstandene Polygon \mathfrak{P}_1 im Ganzen

$$n_1 = n + \sum_1^p r_i + 4p$$

Eckpunkte. Seine Winkel bestehen erstens aus den Winkeln von \mathfrak{P} , zweitens aus den Winkeln der r -Ecke, und drittens aus den Winkeln an den p Transversalen, d. h. es ist

$$S_1 = S + \sum_1^p (r_i - 2) + 2p.$$

Nun ist andererseits

$$S_1 = n_1 - 2 + 2 \sum v$$

und daraus folgt schliesslich

$$S = n - 2 + 2 \sum v + 4p.$$

Jeder Flächendurchgang erhöht daher die Winkelsumme um 2π .

Führen wir endlich die Winkel $\lambda\pi$ selber ein, so erhalten wir für jedes Polygon \mathfrak{P} mit lauter im Endlichen gelegenen Eckpunkten die Relation

$$(I) \quad \sum \lambda = n - 2 + 2 \sum v + 4p$$

resp. auch

$$(I') \quad \sum \lambda' + 2 \sum w = n - 2 + 2 \sum v + 4p.$$

§ 3.

Reductionsprocesse und Erweiterungsprocesse.

Um die Gesamtheit der morphologisch verschiedenen Polygontypen zu beherrschen, bedürfen wir einer systematischen Eintheilung der Polygone. Hiermit wollen wir uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen.

Für den Fall der Dreiecke ist die bezügliche Aufgabe von Herrn Klein bereits gelöst worden.*) Man kann die Gesamtheit aller Dreiecke dadurch erzeugen, dass man von gewissen einfachen Dreieckstypen ausgeht und an sie Halbebenen oder Vollebenen in bestimmter Weise anhängt; ebenso lässt sich umgekehrt jedes Dreieck durch Tilgung von Halbebenen oder Vollebenen auf ein einfaches Dreieck reduciren. Wir wollen die bezüglichen Processe *Erweiterungsprocesse*, resp. *Reductionsprocesse* nennen.

Es empfiehlt sich, diese Methode auf Polygone von beliebiger Seitenzahl zu übertragen. Wir stellen uns also die Aufgabe, vom Polygon \mathfrak{P} durch Ausschaltung von Flächenstücken und Wiedereinfügung der übrigbleibenden Stücke zu einem Polygon \mathfrak{P}' herabzusteigen, das mit \mathfrak{P} die Ecken gemein hat.

Wir suchen zu diesem Zweck sofort allgemein die Frage zu beantworten, was für Reductionsprocesse dieser Art überhaupt morphologisch möglich sind. Zunächst suchen wir solche Processe, bei denen sich ausser den Eckpunkten auch die Winkelreste $\lambda'\pi$ nicht ändern. Dies bedeutet, dass in der Relation

*) a. a. O. S. 582.

$$\sum \lambda' + 2 \sum w = n - 2 + 2 \sum v + 4p$$

sowohl $\sum \lambda'$ als auch $n - 2$ constant bleibt, die gesuchten Reductionsprocesse müssen daher auch

$$2 \sum w - 2 \sum v - 4p$$

constant lassen. Hieraus folgt, dass nur zweierlei derartige Processe existiren können. Tilgt man einen Seitenumlauf — und zwar kann bei der Constanz der Ecken und Winkelreste nur ein voller Seitenumlauf in Frage kommen, — so muss auch ein Windungspunkt wegfallen, und lässt sich ein Flächendurchgang beseitigen, so verschwinden gleichzeitig zwei Windungspunkte.

Diese beiden Processe sind aber auch wirklich morphologisch ausführbar. Ein voller Seitenumlauf bildet nämlich in allen Fällen die vollständige Begrenzung einer Halbebene. Soll es möglich sein diese Halbebene aus dem Polygon auszuschalten, so darf sie einerseits in ihrem Innern kein Stück der Polygonbegrenzung enthalten, andererseits muss sie sich, wie wir eben sahen, um eine Ecke W des Polygons, die nur in ihr liegen kann, herumwinden. Wir bezeichnen den bezüglichen Process als *Ausschaltung einer Halbebene*; seine Umkehrung, die *Einschaltung einer Halbebene* stimmt mit dem überein, was Herr Klein als *transversale Anhängung einer Halbebene* bezeichnet hat.

Soll sich ein Flächendurchgang tilgen lassen, so muss nothwendig eine volle Ebene wegfallen; denn in dem auszuschaltenden Flächenstück können Theile der Begrenzung des Polygons nicht enthalten sein. Andererseits muss dieses Blatt zwei augenscheinlich verschiedene Ecken des Polygons enthalten, um die es sich herumwindet. Wir bezeichnen den bezüglichen Process als *Ausschaltung resp. Abtrennung einer Vollebene* und nennen seine Umkehrung *Einschaltung resp. Anhängung einer Vollebene*. Es folgt:

Reductionsprocesse, welche die Ecken und die Winkelreste eines Polygons unverändert lassen, giebt es nur zwei, nämlich die Ausschaltung einer Halbebene und die Ausschaltung einer Vollebene.

Wir haben hierzu noch einen dritten Reductionsprozess zu fügen. Es ist derjenige, dessen Umkehrung Herr Klein als *laterale Anhängung einer Halbebene* bezeichnet hat. Die Anhängung einer Halbebene lässt die Ecken des Polygons gleichfalls ungeändert, vermehrt aber zwei an derselben Seite liegende Winkel um je π , und ändert damit für jeden der beiden Eckpunkte die Richtung der Seite; war die Seite endlich, so wird sie durch Anhängung der Halbebene einfach umlaufend und umgekehrt. Den reciproken Process bezeichnen wir als *Abtrennung einer Halbebene*. Es ist klar, dass es andere Reductionsprocesse, welche zwar die Ecken des Polygons unverändert lassen, aber die Seiten-

richtungen umkehren, nicht geben kann. Denn ein im Endlichen begrenzter Flächentheil kann für die Ausschaltung nicht in Frage kommen, eine Vollebene enthält überhaupt keine Seite, jedes derartige tilgbare Flächenstück muss daher eine Halbebene sein, deren Inneres dem Polygon angehört. Beachtet man endlich, dass eine solche Halbebene nur die Richtung einer einzigen Seite modificiren kann, so ist damit die Behauptung erwiesen.

Werden in einem Polygon \mathfrak{P} alle zulässigen Reductionsprocesse ausgeführt, so entsteht ein Polygon \mathfrak{P}' , das *reducirtes Polygon* heissen soll. Jedes Polygon, das nicht selbst reducirt ist, kann aus einem reducirtten Polygon durch Erweiterungsprocesse abgeleitet werden; wir erhalten daher die Gesamtheit der Polygone, wenn wir in den reducirtten Polygonen alle zulässigen Erweiterungsprocesse vornehmen.

Wir sind damit vor die Frage geführt, unter welchen Bedingungen die Erweiterungsprocesse morphologisch möglich sind. Es handele sich zunächst um die Einschaltung einer Halbebene. Wir gehen am zweckmässigsten von der Halbebene aus und prüfen, welcher Art die Polygone sind, denen die Halbebene angehören kann. Es sei W der in ihr liegende Eckpunkt und s die sie begrenzende Gerade. Denken wir uns die Halbebene längs einer von W nach s gehenden Transversalen t zerschnitten, so müssen sich die Flächenstücke, die mit der Halbebene zusammen ein Polygon constituiren sollen, oberhalb und unterhalb der Halbebene von t aus nach entgegengesetzten Seiten fortsetzen; überdies müssen die Seiten des oberen und unteren Blattes, die vom Endpunkt von t ausgehen, die Richtung von s haben. Der besondere Fall, dass ein Flächenstück nur nach einer Seite angesetzt wird, resp. dass nur von einem der beiden Endpunkte von t eine Seite ausgeht, die die Richtung von s hat, soll hierin eingeschlossen sein. Jedes so gebildete Polygon ist ein solches, wie wir es verlangen. Nun ändert sich nichts, wenn wir die Transversale t durch einen beliebigen in der Halbebene nach s verlaufenden einfachen Linienzug l ersetzen; welches auch seine Gestalt ist, so wird man, wenn er sich nur nicht selber schneidet, die bezüglichlichen Flächenstücke nach beiden Seiten anheften können und dadurch ein einfach zusammenhängendes Polygon erhalten. Schneidet sich dagegen der Linienzug l , so kann er überhaupt nicht als in *einer* Ebene liegend betrachtet werden. Lassen wir jetzt die Halbebene aus dem Spiel, so folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ecke W und die Seite s eines Polygons zur Einschaltung einer Halbebene verwendbar sind, besteht darin, dass W auf der inneren Seite von s liegt, und dass sich ein Linienzug l von W nach s so durch das Polygoninnere resp. längs des Polygonumfangs ziehen lässt, dass

er ganz in einer Ebene enthalten ist, sich nicht selbst schneidet und nicht jenseits der Seite s oder ihrer Verlängerung verläuft.

Um die Bedingung zu finden, unter der die Einschaltung einer Vollebene morphologisch möglich ist, gehen wir ebenfalls von der Vollebene aus. Zwei ihrer Punkte W und W_1 müssen Eckpunkte eines jeden Polygons sein, dem die Ebene angehören soll. Schneiden wir nun wieder die Ebene längs der von W nach W_1 gehenden Geraden t auf, so müssen sich die beiden Flächenstücke, die mit der Ebene zusammen das Polygon constituieren sollen, oberhalb und unterhalb der Ebene von t aus nach entgegengesetzten Richtungen fortsetzen. Der oben behandelte Grenzfall, nämlich die Ansetzung nur eines Flächenstückes, ist auch hier eingeschlossen. Ferner leuchtet wieder ein, dass t durch einen Linienzug l von beliebiger Gestalt ersetzt werden kann, wenn er nur in W und W_1 endigt und sich nicht selbst schneidet. Daher folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Ecken W und W_1 eines Polygons für die Einschaltung einer Vollebene verwendbar sind, besteht darin, dass sich im Innern oder auf dem Umfang des Polygons ein von W und W_1 verlaufender Linienzug l legen lässt, der ganz in einer Ebene bleibt und sich nicht selber schneidet. In dem Fall, dass der Linienzug l ganz auf dem Umfang des Polygons verläuft, ist es natürlicher, den Erweiterungsprocess, als *Anhängung einer Vollebene* zu bezeichnen.

Ein Beispiel zeigt die Figur 12, die nebenstehende Figur 12a stellt ein Polygon dar, das dieselben Winkel besitzt, wie das Polygon

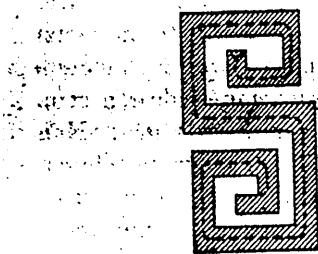


Fig. 12.

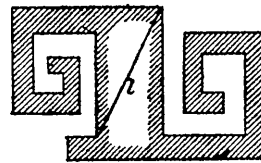


Fig. 12a.

von Fig. 12, aber so gezeichnet ist, dass l geradlinig angenommen werden kann.

Endlich folgt, wie sofort ersichtlich ist, dass die *Anhängung einer Halbebene nur in dem einen Fall nicht zulässig ist, wenn die bezüglich Seite sich selbst überschlägt*, d. h. mehr als einen vollen Umlauf darstellt. Dagegen ist es gleichgiltig, ob sie endlich ist, oder ob sie durch das Unendliche zieht. Hieraus ergibt sich, dass dieselbe Polygonseite entweder nur für die *Anhängung* oder nur für die *Einschaltung*

einer Halbebene verwendbar ist. Dass es unmöglich ist, zuerst eine Einschaltung und dann eine Anhängung vorzunehmen, ist nach dem Vorstehenden unmittelbar klar; das umgekehrte ist deshalb ausgeschlossen, weil nach Anhängung einer Halbebene an die Seite s eine Polygonecke W , die auf der inneren Seite von s läge, nicht existirt; denn auf der inneren Seite von s liegt ja nur die Halbebene selbst.

Wir beweisen endlich noch, dass sich zwei Linienzüge l und l_1 , längs deren Halbebenen oder Vollebenen in dasselbe Polygon eingeschaltet werden sollen, nicht schneiden können. Wird nämlich längs l eine Halbebene oder Vollebene eingeschaltet, so liegen jetzt die beiden Hälften von l_1 nicht mehr in demselben Blatt, und es ist auch nicht möglich beide Endpunkte von l_1 durch eine andere Linie zu verbinden, die ganz in demselben Blatt verläuft. Jede derartige Linie läuft nämlich ganz um den Punkt W herum, von welchem l ausgeht, und schneidet sich daher nothwendig selbst.

§ 4.

Reducirte Polygone.

Wie das vorstehende zeigt, kommt den reducirten Polygonen eine hervorragende Stellung innerhalb der Gesamtheit der Polygone zu. Wir werden uns daher mit ihnen ausführlicher zu beschäftigen haben und beweisen zunächst folgenden für die weiteren Entwicklungen wichtigen Satz:

Jedes reducirte Polygon lässt sich aus reducirten Dreiecken zusammensetzen.

Ist \mathfrak{P} ein reducirtes Polygon, das weder umlaufende Seiten noch Flächendurchgänge enthält, so versteht sich die Richtigkeit des Satzes von selbst. Denn da der Unendlichkeitspunkt weder auf dem Umfang noch im Innern des Polygons liegt, so trifft jede Gerade, die von einem beliebigen Punkt des Umfangs in das Innere eintritt, den Umfang schon nach endlichem Verlauf zum zweiten Mal. Sie zerlegt das Polygon stets in zwei Theile, die selbst reducirt sind; denn auch diese Polygone bleiben mit den Seiten und mit der Fläche ganz im Endlichen, u. s. w.

Wenn dagegen \mathfrak{P} umlaufende Seiten oder Flächendurchgänge enthält, so kann man nicht mehr behaupten, dass eine Gerade, die von einem beliebigen Punkt des Umfangs in das Innere eintritt, den Umfang zum zweiten Mal im Endlichen trifft; und selbst wenn dies der Fall ist, so folgt doch nicht, dass die beiden Polygone, in die \mathfrak{P} zerlegt wird, selbst reducirt sind. Man betrachte z. B. das Achteck

$ABCDEFGH$, (Fig. 13) dessen Fläche einmal durch den Unendlichkeitspunkt zieht. Dieses Achteck ist reducirt. Von den Reducionsprocessen könnte überhaupt nur die Abtrennung einer Halbebene in Frage kommen, aber auch diese ist ausgeschlossen. Schneidet man nun durch die Gerade AC das Dreieck ABC ab, so bleibt ein Siebeneck $ACDEFGH$ übrig, das reducirt ist; von ihm kann längs AC eine Halbebene abgetrennt werden.

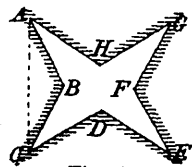


Fig. 13.

Das Beispiel zeigt, dass der Begriff des reducirten Polygons ein Hilfsbegriff ist, der für die eigentliche Gestaltung der reducibaren und reducirten Polygone wenig Bedeutung hat. Lässt man nämlich den Punkt B in der obigen Figur wandern, so sind die Polygone, die entstehen, wenn B über die Gerade AC hinübertritt, reducibare Polygone, ohne dass sich doch der Charakter des Polygons bei der Bewegung von B wesentlich ändert. Trotzdem ist die Einführung dieses Hilfsbegriffs durchaus zweckmässig und innerlich berechtigt. Einerseits zeigt dies ja der obige Satz, andererseits werden wir sehen, dass wir gerade mit Benutzung der reducirten Polygone eine einfache Methode auffinden können, um alle n -Ecke systematisch abzuleiten.

Es sei nun \mathfrak{P} ein Polygon, in dem eine Seite s einfach oder mehrfach umlaufend ist. Es sei A ein Endpunkt von s , ferner sei s' das von A ausgehende, ins Unendliche ziehende Stück von s , endlich sei s'' dasjenige Stück, das sich vom Unendlichkeitspunkt an weiter fortsetzt. Nun enthält die durch s begrenzte Halbebene sicher ein Stück des Polygonumfanges, denn enthielte sie nur einen Punkt, so wäre sie ausschaltbar, und enthielte sie auch den Punkt nicht, so könnte sie

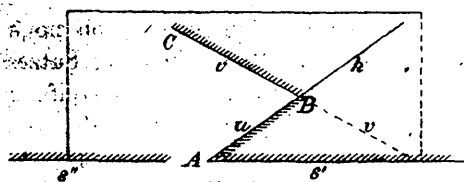


Fig. 14.

abgetrennt werden, und das Polygon wäre nicht reducirt. Man kann nun jedenfalls (Fig. 14) von A aus eine Gerade h ziehen, die mit s' einen so kleinen Winkel bildet, dass sie ganz innerhalb der Polygonfläche liegt.

Diesen Winkel lassen wir nun wachsen, bis die Gerade zum ersten Mal die in der Halbebene liegende Begrenzung des Polygons in B erreicht, so geht von B sicher mindestens eine in der betrachteten Halbebene liegende Polygonseite aus. Wir nehmen zunächst an, dass in dieser Halbebene noch eine zweite von B ausgehende Polygonseite existirt, dann ist AB entweder selbst diese Seite des Polygons, oder AB liegt im Innern. Im letzten Fall benutzen wir AB als Theilungslinie, es bedarf daher nur der Fall der weiteren Erörterung, dass AB eine Polygonseite u ist.

Von den beiden Theilpolygonen ist nämlich nur dasjenige weiter zu betrachten, das die Seite s enthält. Es sei BC die zweite von B ausgehende Seite v , die mit AB in einer Ebene liegt, so bildet sie mit AB sicher einen Winkel *), der grösser als π ist. Trifft nun v über B hinaus verlängert, die Seite s' in einem im Endlichen gelegenen Punkt, so ist die Verlängerung v' eine Gerade, die das Polygon \mathfrak{P} in zwei reducirte Theilpolygone \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zerlegt. Da die in \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 neu auftretende Gerade v' endlich ist, und die an ihr liegenden Winkel kleiner als π sind, so ist nur zu beweisen, dass \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 in Bezug auf s nicht mehr reducierbar sind. Für dasjenige Polygon, das nur einen endlichen Theil von s' enthält, es sei \mathfrak{P}_1 , versteht sich dies von selbst; für das andere, d. h. für \mathfrak{P}_2 , ergibt es sich folgendermassen. Nach Annahme ist \mathfrak{P} reducirt, d. h. es giebt keinen von s nach einer Ecke von \mathfrak{P} laufenden Linienzug, längs dessen eine Halbebene, die einen Umlauf von s enthält, ausschaltbar wäre. Daraus folgt das gleiche aber erst recht für \mathfrak{P}_2 ; denn um \mathfrak{P}_2 zu erhalten, haben wir von denjenigen Blättern von \mathfrak{P} , in denen der fragliche Linienzug verlaufen müsste, noch ein Stück abschneiden müssen. Das gleiche gilt für die Polygone, die durch die Theilungslinie AB entstehen.

Wenn s' und die Verlängerung v' divergiren, so schliessen wir zunächst, dass v endlich sein muss. Denn v liegt mit der aus dem Unendlichen kommenden Seite s in derselben Ebene, was man am einfachsten erkennt, wenn man den Unendlichkeitspunkt wie in § 1, durch einen rechtwinkligen Linienzug ausschneidet. Liegt nun am Endpunkt C von v ein Winkel, der kleiner als π ist, so ist auch die von ihm ausgehende Seite CD endlich, und man kann B mit D durch die im Innern des Polygons enthaltene Gerade BD verbinden. Ist dagegen der Polygonwinkel C grösser als π , so trifft die Verlängerung v'' von v sicher noch eine in demselben Blatt liegende Seite, spätestens jedoch s'' . Es ist daher BD , resp. v'' eine Gerade, die \mathfrak{P} in zwei Polygone \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zerlegt, die selbst reducirt sind; das letztere wird genau so bewiesen, wie es oben geschehen ist.

Es bliebe endlich noch der Fall zu erledigen, dass v parallel zu s ist. Von diesem wollen wir vorläufig absehen; wir werden die bezüglichen Erörterungen in § 6 bringen.

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, dass eine zweite von B ausgehende Seite, die mit s in einer Ebene liegt, nicht existirt. Alsdann ist B ein Windungspunkt. Ist nun AB keine Polygonseite, so zerfällt \mathfrak{P} durch AB in \mathfrak{P}' und \mathfrak{P}'' , und zwar sei \mathfrak{P}' dasjenige Polygon, das s enthält. Liegt alsdann BC in \mathfrak{P}'' , so bleibt das

*) Tritt der Grenzfall ein, dass der Winkel B gleich π ist, so sei B' der erste Punkt, für den der Winkel nicht mehr den Werth π hat, alsdann tritt nur AB' an die Stelle von AB .

stehende für \mathfrak{P}'' in Kraft, liegt aber BC in \mathfrak{P}' , so sind \mathfrak{P}' und \mathfrak{P}'' reducirt, und wir können uns wieder auf den Fall beschränken, dass AB Polygonseite ist. Nun ist zweierlei zu unterscheiden; die Seite s kann nämlich entweder kürzer sein als ein voller Umlauf, oder sie



Fig. 15.

überschlägt sich selbst. Ist sie zunächst kürzer als ein voller Umlauf, so sei (Fig. 15) A_1 ihr zweiter Endpunkt; dieser Fall soll in der Grenze auch den umfassen, dass s einen vollen Umlauf darstellt, also A und A_1 in einander fallen. Die Gerade BA_1 liegt in der Nähe von B sicher innerhalb des Polygons, sie verläuft daher entweder ganz innerhalb, oder wenn dies nicht der Fall ist, so muss sie doch zwischen B und A_1 den Polygonumfang treffen. Es sei z die von ihr getroffene Seite; diese Seite liegt mit s in einer Ebene und ist daher sicher endlich. Man kann daher BA_1 stets durch eine andere von B ausgehende Gerade ersetzen, welche entweder durch eine Ecke von z oder doch durch eine andere in der Ebene gelegene Ecke von \mathfrak{P} geht. Wir haben damit \mathfrak{P} wieder in zwei Polygone getheilt, die, was genau wie oben bewiesen werden kann, selbst reducirt sind; die Theilungslinie verbindet in beiden Fällen zwei Ecken von \mathfrak{P} .

Es ist endlich noch zu erörtern, wie wir das Polygon \mathfrak{P} theilen können, wenn B ein Windungspunkt ist und s sich selbst überschlägt.

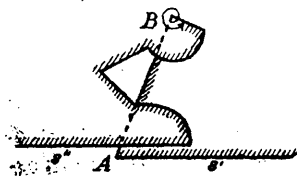


Fig. 16.

Da das Polygon nicht reducirt sein soll, so muss (Fig. 16) in demjenigen Stück, das s'' enthält, ein Theil t der Polygongrenze so verlaufen, dass er an irgend einer Stelle über AB hinübertritt. Alsdann verbinde man B mit irgend einem erreichbaren Eckpunkt dieses Linienzuges und man hat wieder eine Theilungslinie, die \mathfrak{P} in zwei reducirt Polygone theilt.

Es ist aber noch der Nachweis zu führen, dass unserer Theilung die Bedeutung einer wirklichen Reduction zukommt, d. h. es ist zu zeigen, dass \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 Polygone von geringerer Seitenzahl sind, als \mathfrak{P} selbst. Nun sind die Theilungslinien in allen Fällen entweder Verbindungslinien von zwei Eckpunkten, oder Verlängerungen von Seiten, die in das Innere eintreten, und auf einer Seite endigen. Daher folgt, wenn \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 resp. n_1 und n_2 Ecken besitzt,

$$n_1 + n_2 = n + 2.$$

Nun muss aber n_1 , resp. n_2 mindestens den Werth 3 haben, folglich ist zugleich

$$n_1 < n \quad \text{und} \quad n_2 < n,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Endlich sei noch auf eine letzte Folgerung hingewiesen. Es sei wieder \mathfrak{P} ein Polygon, das eine von dem Punkt A ausgehende umlaufende Seite s enthält. Wenn die Theilungslinie, die es zerschneidet, auf s endigt, so enthält dasjenige Polygon \mathfrak{P}_1 , dem der Punkt A angehört, entweder ein endliches Stück von s , oder ein Stück, das einfach umlaufend ist, sich aber nicht selbst überschlägt; und zwar ist dies Polygon stets in einer einzigen Halbebene enthalten, nämlich in derjenigen, die durch s begrenzt wird. Durch fortgesetzte Reduction bezüglich der Seite s geht daher \mathfrak{P} schliesslich in ein anderes Polygon über, das *von s entweder nichts oder nur einen endlichen Theil enthält*, überdies besitzt keines der abgeschnittenen Polygone, in dem ein Theil von s vorkommt, einen Flächendurchgang.

Hieraus folgt, dass wir uns bei der Zerlegung der mit Flächendurchgängen behafteten Polygone auf Polygone mit lauter endlichen Seiten beschränken können. Hier verfahren wir folgendermassen. Wir nehmen zunächst an, das Polygon \mathfrak{P} enthalte einen Windungspunkt W . Wir verlängern einen seiner Schenkel u über W hinaus, so muss die Verlängerung u' vor der Rückkehr nach W die Polygonbegrenzung nothwendig noch einmal treffen; denn sonst würde die so begrenzte Halbebene abtrennbar sein und das Polygon wäre nicht reducirt. Es sei (Fig. 17) V der Punkt, in dem die Polygonbegrenzung von u' getroffen wird, so kann WV sowohl endlich als auch einfach umlaufend sein. In jedem Fall theilt aber u' das Polygon \mathfrak{P} in zwei Polygone \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 , die selbst reducirt sind. Die Reducirbarkeit ist wieder nur für die neu eingeführten Begrenzungsstücke zu prüfen. Diese sind u' und die Theile derjenigen übrigens endlichen Seite, auf der V liegt. Für diese kommt die Reducirbarkeit nicht in Frage, für u' ist sie deshalb ausgeschlossen, weil jedes Theilpolygon im Punkt V einen Winkel hat, der kleiner als π ist.

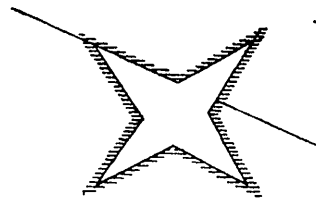


Fig. 17.

Enthält das Polygon keinen Windungspunkt, so muss in ihm sicher mindestens ein Winkel vorkommen, der grösser als π ist. Aus der Formel I' des § 2 folgt nämlich, da hier $\sum w = 0$, $\sum v = 0$ und $p \geq 1$ vorausgesetzt wird, dass

$$\sum \lambda' \geq n + 2$$

ist; daher muss mindestens ein Winkel grösser als π sein. Mit diesem Winkel können wir nun ebenso verfahren, wie mit dem Windungspunkt; wir verlängern einen seiner Schenkel über den Eckpunkt in das Innere der Polygonfläche, und können dann genau wie oben weiterschliessen. Wir bemerken noch, dass hier, wie vorher,

\mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 den in \mathfrak{P} vorhandenen Flächendurchgang nicht mehr besitzen.

Sind wieder \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 Polygone von n_1 resp. n_2 Ecken, so folgt, dass auch hier

$$n_1 + n_2 \leq n + 2$$

also

$$n_1 < n \quad \text{und} \quad n_2 < n$$

ist, und zwar gilt das Zeichen $<$, wenn V ein Eckpunkt ist, alsdann ist $n_1 + n_2 = n + 1$. Unsere Zerlegung ist daher wieder eine wirkliche Reduction; setzen wir sie weiter und weiter fort, so muss das Polygon \mathfrak{P} , wie behauptet wurde, in lauter reducirte Dreiecke zerfallen.

Es fragt sich noch, wie gross die Zahl dieser Dreiecke ist; man findet, dass ihre Zahl, wie bei der Zerlegung elementarer Polygone, $n - 2$ ist. Wir bezeichnen die Anzahl durch \mathfrak{N} und nehmen an, der Satz sei für \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 richtig, d. h. es sei

$$\mathfrak{N}_1 = n_1 - 2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}_2 = n_2 - 2$$

so folgt

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 = n_1 + n_2 - 4 \\ \leq n - 2.$$

Gilt das Ungleichheitszeichen, so können wir doch eines der $n - 3$ reducirten Dreiecke selbst in zwei reducirte Dreiecke zerlegen, demnach folgt als schliessliches Hauptresultat der Satz:

Jedes reducirte n -Eck, dessen Ecken im Endlichen liegen, kann in $n - 2$ reducirte Dreiecke zerlegt werden.

§ 5.

Eintheilung der reducirten Polygone.

Gemäss dem vorstehenden Paragraphen können wir die reducirten n -Ecke aufstellen, sobald wir alle reducirten Dreiecke kennen. Die reducirten Dreiecke sind bereits von Herrn Klein abgeleitet worden;*) man gelangt zu ihnen auch durch folgende einfache morphologische Betrachtungen. Zunächst ist leicht zu sehen, dass es ein reducirtes Dreieck mit einer sich selbst überschlagenden Seite nicht geben kann. Denn ist diese Seite AB , so liegt, wie aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, sicher ein Windungspunkt C in je einem Blatt mit A und B ; das so bestimmte Dreieck ist aber durch Ausschaltung einer Halbebene reducirt. Ist die Seite AB einfach umlaufend, ohne sich zu überschlagen, so folgt ebenfalls aus dem vorigen Paragraphen, dass jedes reducirte Dreieck, welches AB enthält, durch Verbindung von A und B mit einem auf der inneren Seite

*) Dies wurde in Vorlesungen aus dem Semester 1890/91 dargelegt.

von AB gelegenen Punkt C entsteht (Fig. 18). Daraus folgt zunächst, dass ein reducirtes Dreieck mit Flächendurchgängen nur mit endlichen Seiten existiren kann. Ein solches Dreieck ist aber reducirt; denn da die Seiten endlich sind, so liegen A, B, C in demselben Blatt, jedes derartige Dreieck muss daher aus dem elementaren Dreieck ABC oder aus dem einen Flächendurchgang besitzenden Dreieck ABC durch Erweiterungsprocesse ableitbar sein. Das letztgenannte Dreieck kann aber selbst durch Abtrennung einer Halbebene reducirt werden, womit die Behauptung erwiesen ist.



Fig. 18.

Wir erhalten daher zwei verschiedene Typen reducirter Dreiecke; der eine besitzt lauter endliche Seiten, der andere hat eine einfach umlaufende Seite. Für den ersten ist die Winkelsumme gleich π , für den anderen ist sie 3π .

Alle reducirten Polygone entstehen durch Zusammensetzung dieser beiden Dreieckstypen. Ein reducirtes n -Eck enthält daher im Maximum $n - 2$ einfach umlaufende Seiten, andererseits können sich auch Flächendurchgänge einstellen. Dies legt den Gedanken nahe, die reducirten n -Ecke nach der Zahl, der Art und der Anordnung der ihnen zugehörigen Seitenumläufe und Flächendurchgänge einzutheilen. Hierin haben wir diejenigen Besonderheiten zu erblicken, welche sie von den Polygonen der Elementargeometrie unterscheiden. Dagegen betrachten wir das Auftreten von Windungspunkten nicht als wesentlichen Eintheilungsgrund. Allerdings sind die Windungspunkte massgebend dafür, zwischen welchen Ecken und Seiten des Polygons Einschaltungsprocesse ausführbar sind, aber diese Eigenschaft theilen sie mit den Winkelzahlen und auch mit den Seiten selbst; kann von der Ecke A nach der Seite s ein Linienzug l gezogen werden, längs dessen Halbebenen einschaltbar sind, so kann dieser Process beim Variiren der Winkel und Seiten morphologisch unmöglich werden, auch ohne dass Windungspunkte auftreten. Endlich zeigt auch die Relation des § 2, dass die Seitenumläufe und Flächendurchgänge die eigentlichen Singularitäten der allgemeinen Polygone sind.

Wir rechnen demnach alle diejenigen reducirten n -Ecke in eine Gattung, welche dieselbe Zahl der Flächendurchgänge, sowie dieselbe Zahl und Reihenfolge der Seitenumläufe aufweisen. Innerhalb jeder Gattung können wir diejenigen, welche die gleichen Winkel in derselben Reihenfolge enthalten, zu einer Art zusammenfassen; jede Art besteht schliesslich aus den einzelnen Individuen, die durch Parallelverschiebung der Seiten aus einander hervorgehen. Zu bemerken ist, dass innerhalb derselben Gattung die Winkel keineswegs beliebig variabel sind; es bestehen für sie stets gewisse Ungleichheitsbedingungen,

die aus der Art der Zusammensetzung des n -Ecks fliessen. Im besonderen ergibt sich für die Dreiecke:

Es giebt zwei verschiedene Gattungen reducirter Dreiecke; die eine besitzt lauter endliche Seiten, die andere hat eine einfach umlaufende Seite.

Für die erste Gattung beträgt die Winkelsumme π ; jede der drei Winkelzahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ist im übrigen beliebig. Es ist also

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad 0 < \lambda_3 < 1^*), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Für die zweite Gattung beträgt die Winkelsumme 3π ; ein und nur ein Winkel ist grösser als π , nämlich derjenige, dessen Schenkel die beiden endlichen Seiten sind; d. h.

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 2, \quad 0 < \lambda_3 < 1^*), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3.$$

Die Vierecke entstehen durch Zusammensetzung zweier Dreiecke. Die Zusammensetzung kann gemäss § 4 auf zwei Weisen erfolgen; entweder coincidiren zwei Seiten mit beiden Eckpunkten, oder es coincidirt nur ein Paar Eckpunkte, dafür fallen aber die von ihnen ausgehenden Seiten in dieselbe Gerade. Die Summe der an ihnen liegenden Winkel ist daher π . Uebrigens ist zu bemerken, dass diese Zusammensetzung nur in Frage kommt, wenn mindestens eines der beiden Dreiecke eine umlaufende Seite besitzt. Dasselbe gilt für die Ableitung beliebiger Polygone.

Zwei Dreiecke erster Gattung liefern die Vierecke erster Gattung mit lauter endlichen Seiten und der Winkelsumme 2π ; in der That ist es gleichgiltig, ob die Dreiecke auf die eine oder die andere Art aneinandergesetzt werden. Für sie ist

$$0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 2, \quad 0 < \lambda_3 < 2, \quad 0 < \lambda_4 < 2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2.$$

Ein Dreieck erster Gattung und eines zweiter Gattung liefern ein Viereck zweiter Gattung mit einer umlaufenden Seite. Coincidiren bei der Zusammensetzung zwei Ecken, so gelten für die Winkel die Relationen

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 3, \quad 0 < \lambda_3 < 1, \quad 0 < \lambda_4 < 2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.$$

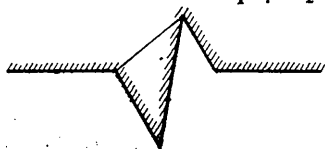


Fig. 19.



Fig. 19 a.

Wir geben hier zwei verschiedene Arten solcher Vierecke, das eine enthält einen Windungspunkt, das andere nicht. (Fig. 19 u. 19a).

*) Ueber die Grenzfälle, dass λ den Werth 0, 1, 2 hat, vgl. oben S. 381. Wir wollen festsetzen, ein Dreieck zweiter Gattung für $\lambda_2 = 2$ noch als reducirt zu betrachten.

Diejenige Zusammensetzung beider Dreiecke, bei der nur ein Paar Ecken coincidiren, ist noch auf zwei Weisen möglich; das Dreieck erster Gattung kann sowohl an eine endliche, als auch an die umlaufende Seite des Dreiecks zweiter Gattung angesetzt werden. Aber nur im ersten Fall gelangen wir zu Vierecken zweiter Gattung, die unter den vorstehenden noch nicht enthalten sind. Die bezüglichen Winkelrelationen sind

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 2, \quad 1 < \lambda_3 < 2, \quad 0 < \lambda_4 < 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.$$

Zwei solcher Vierecke zeigen Fig. 20 und 20a, das eine hat eine sich selbst überschlagende Seite.

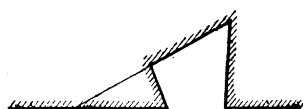


Fig. 20.



Fig. 20a.

Zwei Dreiecke zweiter Gattung können zunächst so zusammengesetzt werden, dass zwei endliche Seiten und überdies die von ihnen eingeschlossenen Eckpunkte coincidiren. Dadurch entsteht eine Vierecksgattung, die durch zwei benachbarte umlaufende Seiten charakterisirt ist. Ist $\lambda_2\pi$ der von den beiden endlichen Seiten eingeschlossene Winkel, so ist

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 2 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \lambda_3 < 1, \quad 0 < \lambda_4 < 2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 6.$$

Der Winkel $\lambda_2\pi$ bedingt daher nothwendig einen Windungspunkt (Fig. 21)*).

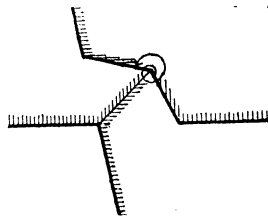


Fig. 21.

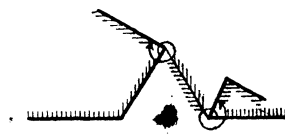


Fig. 22.

Setzt man zwei Dreiecke zweiter Gattung so zusammen, dass zwar zwei endliche Seiten, aber nicht die von ihnen eingeschlossenen Winkel coincidiren, so entsteht ein Viereck, in dem die umlaufenden Seiten einander gegenüberliegen (Fig. 22)*). Die Bedingungen für die Winkelzahlen sind diesmal

*) In diesen beiden Figuren sind die beiden Dreiecke, die das Viereck ausmachen, durch verschiedene Schraffirung kenntlich gemacht.

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 3, \quad 0 < \lambda_3 < 1, \quad 1 < \lambda_4 < 3^*),$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 6.$$

Setzt man zwei Dreiecke zweiter Gattung so zusammen, dass die umlaufenden Seiten coincidiren, so entsteht ein Viereck, das einen Flächendurchgang besitzt, aber nicht mehr reducirt ist; es geht durch Abtrennung einer Halbebene in ein Viereck erster Gattung über.

Endlich ist noch zu erörtern, ob eine Zusammensetzung möglich ist, bei der nur ein Paar Ecken coincidirt. Da beide in diesen Ecken liegende Winkel kleiner als π sein müssen, so kann hierfür nur die umlaufende Seite in Frage kommen; aber auch in diesem Fall entsteht ein Viereck mit einem Flächendurchgang, das reducirbar ist. Es folgt:

Es giebt vier Gattungen reducirter Vierecke. Die erste enthält keine, die zweite eine umlaufende Seite, die dritte und vierte enthalten je zwei; bei den Vierecken dritter Gattung sind sie benachbarte, bei denen der vierten Gattung gegenüberliegende Seiten.

In ähnlicher Weise schliesst man, dass es sieben Gattungen reducirter Fünfecke giebt. Ein Flächendurchgang tritt in ihnen noch nicht auf, aber eine Gattung ist bereits durch eine zweifach umlaufende Seite ausgezeichnet.

Reducirte Polygone mit einem Flächendurchgang treten zuerst für $n = 6$ auf; der Umfang des Polygons muss nämlich so gestaltet sein, dass an keiner Seite zwei Winkel grösser als π auftreten (Fig. 23).



Fig. 23.

Hieraus folgt, dass ein reducirtes Polygon mit p Flächendurchgängen mindestens $4p + 2$ Ecken besitzt. Aus der Winkelrelation folgt zunächst, dass p seinen grössten Werth für $\Sigma v = 0$ erreicht, d. h. wenn alle Seiten endlich sind. Nun ist ein reducirtes Polygon mit p Flächendurchgängen aus p reducirten Polygonen mit je einem Flächendurchgang zu bilden; geht aber die Zusammensetzung der Polygone so vor sich, dass von zwei coincidirenden Eckpunkten Seiten entgegengesetzter Richtung ausgehen, so ist das resultirende Polygon nicht mehr reducirt. Also folgt:

*) Bezüglich der Grenzfälle ist Folgendes zu bemerken. Die Zulässigkeit von ganzzahligen Werthen λ innerhalb der bezüglichen Grenzen versteht sich von selbst. Wirkliche Grenzwerte von λ können nur erreicht werden von λ_1 , resp. λ_2 im zweiten Fall der Vierecke zweiter Gattung und von λ_2 bei den Vierecken dritter Gattung. Es hat keine Mühe, sich die bezüglichen Viereckstypen wirklich herzustellen. Das letztgenannte Viereck hat drei übereinander fallende Punkte; es ist eine doppelt gelegte Halbebene.

Die Maximalzahl der in einem reducirten n -Eck auftretenden Flächendurchgänge ist $E\left(\frac{n-2}{4}\right)$.

Wir fügen zu diesem Satz noch ein weiteres Theorem dieser Art. Wir stellen dazu die Frage, wie viel von den $n - 2$ Dreiecken durch einen Flächendurchgang absorbiert werden, und welcher Art diese Dreiecke sind. Die Zahl ergibt sich, da wir zu jedem Flächendurchgang ein Sechseck nöthig haben, gleich vier. Nun entsteht ein Flächendurchgang bei lauter endlichen Seiten stets durch Zusammensetzung zweier Polygone mit je einer einfach umlaufenden Seite; von den vier Dreiecken haben daher zwei eine umlaufende Seite, zwei andere nicht. Es folgt:

Hat ein reducirtes n -Eck p Flächendurchgänge, so hat es höchstens noch $n - 4p - 2$ umlaufende Seiten und seine Winkelsumme beträgt höchstens $\{3(n - 2) - 4p\} \pi$.

Das Maximum der Winkelsumme wird also nur dann erreicht, wenn $p = 0$, also $\Sigma v = n - 2$ ist; es hat den Werth $3(n - 2)$. Es ist zu beachten, dass die Maximalzahl der möglichen Seitenumläufe für jedes p auch wirklich erreicht werden kann.

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, für jedes n die Zahl und die Natur der möglichen Gattungen von n -Ecken anzugeben. Sie unterscheiden sich nach den Werthen von p und nach der Zahl und Anordnung der umlaufenden Seiten. Die p Flächendurchgänge absorbiren, wie wir sahen, $4p$ Dreiecke; die noch übrigen $m = n - 4p - 2$ Dreiecke können beliebig an das aus den $4p$ Dreiecken gebildete $(4p - 2)$ -Eck angesetzt werden. Wir können in erster Linie an eine und dieselbe Seite ein $(m - 2)$ -Eck ansetzen, dann an eine Seite ein $(m - 3)$ -Eck, an eine andere ein Dreieck u. s. w. u. s. w., so erhalten wir sicher alle die verschiedenen Gattungen reducirter n -Ecke.

Endlich sei noch auf einen letzten Umstand hingewiesen. Es seien \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zwei reducirte Polygone von gleicher Seitenzahl, gleichen Winkeln, sowie von gleicher Zahl und Art der Flächendurchgänge und der umlaufenden Seiten. Derartige Polygone sind durch analoge Zusammensetzung gleichartiger Dreiecke zu bilden; für beide sind gleichviele Dreiecke mit nur endlichen, resp. mit umlaufenden Seiten in gleicher Anordnung zu benutzen. Hat nun \mathfrak{P}_1 resp. \mathfrak{P}_2 in W_1 resp. W_2 je einen Windungspunkt, so tragen zu ihm in beiden Polygonen die nämlichen Dreiecke bei; liegt daher W_1 mit einer Seite s_1 von \mathfrak{P}_1 in einem Blatt, so gilt dies auch für W_2 und s_2 ; d. h.

Alle reducirten n -Ecke derselben Art besitzen die gleiche Art des Zusammenhangs.

Uebrigens brauchen zweien beliebigen Ecken von \mathfrak{P}_1 , die in dem gleichen Blatt liegen, nicht immer zwei Ecken von \mathfrak{P}_2 zu entsprechen, die ebenfalls im gleichen Blatt liegen.

§ 6.

Einfluss unendlichferner Eckpunkte.

Wir beschäftigen uns jetzt mit denjenigen Modificationen der vorstehenden Resultate, die durch das Auftreten unendlichferner Eckpunkte bedingt werden. Zu diesem Zweck denken wir uns das Polygon stereographisch auf die Kugel projicirt; Z sei der Punkt, der dem Unendlichkeitspunkt entspricht, durch den also sämtliche Kugelkreise hindurchgehen.

Es sei ZUV ein derartiges Kreisdreieck, und $\lambda'\pi$, $\lambda_1'\pi$, $\lambda_2'\pi$ seien die bei Z , U , V liegenden Winkel resp. Winkelreste, alsdann zeigt die Figur 24 unmittelbar, dass für die Winkel am Punkte Z

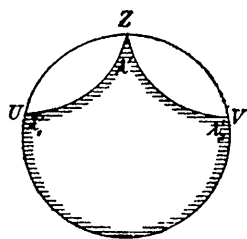


Fig. 24.

$$\lambda' + 1 - \lambda_1' + 1 - \lambda_2' = 1, \text{ d. h.}$$

$$\lambda_1' + \lambda_2' - \lambda' = 1$$

ist. Nun denken wir uns ein Polygon auf der Kugel, dessen eine Ecke in Z liegt, während sich die übrigen Kreisseiten continuirlich um Z herumwinden, das also ebenso durch $n - 2$ in Z zusammenstossende Dreiecke entsteht, wie das analoge n -Eck des § 1 in der Ebene. Für dieses n -Eck ergibt sich durch $(n - 2)$ malige Anwendung der obigen Formel

$$\sum_1^{n-1} \lambda_i - \bar{\lambda} = n - 2,$$

wenn wieder $\lambda_i\pi$ die Winkel des Polygons bedeuten, und $\bar{\lambda}\pi$ der Winkel bei Z ist. Die gleiche Formel besteht daher auch für die den Unendlichkeitspunkt umziehenden ebenen Polygone.

Ist jetzt \mathfrak{P} ein Polygon, von dem beliebig viele Eckpunkte im Unendlichen liegen, so verwandeln wir es, wie in § 2 in ein Elementarpolygon; indem wir zunächst jeden Windungspunkt, und dann jeden dem Umfang oder dem Innern angehörigen Unendlichkeitspunkt durch die bezüglichen einfachen Querschnitte ausschneiden; es folgt dann, genau wie dort, dass die Winkelsumme durch die Relation

$$\text{II)} \quad \sum \lambda - \sum \bar{\lambda} = n - 2 + 2 \sum \nu + 4p$$

gegeben ist. Die Abweichung von der Relation I), die durch un-

endlichferne Ecken bedingt wird, besteht demnach ausschliesslich darin, dass *jeder an einem unendlichfernen Eckpunkt liegende Winkel mit seinem vollen Betrage negativ in Rechnung zu stellen ist*. Nur auf einen Punkt sei noch hingewiesen. Es ist klar, dass von umlaufenden Seiten nur dann die Rede ist, wenn die Seite wirklich durch den Unendlichkeitspunkt hindurchzieht; Seiten, die im Unendlichen endigen, sind deshalb nicht umlaufend, auch dann nicht, wenn beide Eckpunkte im Unendlichen liegen (vgl. den Schlusssatz dieses Paragraphen). Ebenso ist ein Flächendurchgang nur dann vorhanden, wenn der Unendlichkeitspunkt wirklich im Innern der Polygonfläche liegt.

Da die Summe aller n Polygonwinkel unbedingt positiv ist, so ziehen wir aus der obigen Formel den Satz:

In einem n -Eck können höchstens $n - 1$ Eckpunkte im Unendlichen liegen.

Wir fragen jetzt nach Reductionsprozessen, in die unendlichferne Eckpunkte eingehen können. Wir schreiben die obige Relation zu diesem Zweck folgendermassen:

$$\text{II') } \sum \lambda' - \sum \bar{\lambda}' + 2 \sum w - 2 \sum \bar{w} = n - 2 + 2 \sum v + 4p.$$

Sie zeigt, dass von Reductionen, die unendlich ferne Eckpunkte betreffen und überdiess die Ecken und die Winkelreste ungeändert lassen, nur solche existiren können, die ein w gegen ein \bar{w} tilgen, d. h. einen im Endlichen gelegenen Windungspunkt gegen einen unendlich fernen. Dieser Process besteht in der Ausschaltung einer vollen Ebene; es ist aber zu beachten, dass er die Zahlen v und p ungeändert lässt; in der That wird ja der unendlich ferne Windungspunkt nicht als einen Flächendurchgang bedingend angesehen.

Die Ausschaltung einer Halbebene ist, wie auch morphologisch ersichtlich ist, ausgeschlossen, dagegen ist die Anhängung resp. Abtrennung einer Halbebene längs einer im Unendlichkeitspunkt endigenden Seite gestattet; sie ändert die beiden Winkel im entgegengesetzten Sinn um je π , lässt aber wieder die Zahl v ungeändert. (Fig. 25). Also folgt:

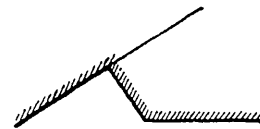


Fig. 25.

Es giebt nur zwei Reductionsprozesse, in die unendlich ferne Eckpunkte eingehen, nämlich die Ausschaltung einer Vollebene und die Abtrennung einer Halbebene. Beide Prozesse lassen den Ausdruck

$$n - 2 + 2 \sum v + 4p$$

ungeändert.

Es fragt sich schliesslich, wie es mit den reducirten Polygonen und ihrer Zerlegung in reducirte Dreiecke steht. Hier bleiben alle

oben gezogenen Schlüsse ohne Weiteres bestehen. Die Theilung bezüglich einer umlaufenden Seite s beruhte auf der Existenz des im Endlichen gelegenen Punktes B . Dies braucht nun allerdings bei Polygonen mit unendlich fernen Eckpunkten nicht Statt zu haben, denn es können beide Punkte einer umlaufenden Seite in's Unendliche fallen. Man hat aber in diesem Fall nur nöthig, das geradlinige Polygon durch ein Kugelpolygon zu ersetzen und man überzeugt sich leicht, dass die oben gezogenen Schlüsse unverändert bestehen bleiben; die Lage von A und B hat hierauf keinen Einfluss. Was endlich die Zerlegung der mit Flächendurchgängen behafteten Polygone betrifft, so wird sie durch die Existenz der unendlich fernen Eckpunkte überhaupt nicht berührt; denn ein Blatt, das den Unendlichkeitspunkt im Innern enthält, kann keine unendlich ferne Ecke besitzen.

Es fragt sich daher nur noch, wie es mit der Zerlegung von Polygonen mit unendlich fernen Ecken steht, die weder umlaufende Seiten, noch Flächendurchgänge besitzen. Für diese versteht sich aber, wenn sie selbst reducirt sind, die Zerlegbarkeit in reducirte Dreiecke von selbst.

Wir können jetzt auch den S. 391 bei Seite gestellten Punkt erledigen, wie man zu verfahren hat, wenn die von B ausgehende Seite v zu s parallel ist. In diesem Fall geht die Verlängerung v' durch den unendlich fernen Punkt Z von s und theilt daher von \mathfrak{P} ein Dreieck ABZ ab, das eine Ecke im Unendlichen enthält*), das aber ebenfalls reducirt ist, und das gleiche ist für das andere Theilpolygon \mathfrak{P}_2 der Fall. Wir können daher jetzt folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Ein reducirtes n -Eck kann, auch wenn es unendlich ferne Eckpunkte hat, in $n - 2$ reducirte Dreiecke zerlegt werden.

Um einige Beispiele beizubringen, lassen wir die reducirten Dreiecke und Vierecke mit unendlich fernen Eckpunkten hier folgen. Um die Vierecke abzuleiten, kann man entweder von den Vierecken mit endlichen Eckpunkten ausgehen, und die Eckpunkte der Reihe nach in's Unendliche rücken lassen, oder aber — und dies scheint zweckmässiger zu sein — man knüpft an die Art der Zusammensetzung an, indem man jedes dabei benutzte Dreieck, soweit möglich, durch ein Dreieck mit unendlich fernen Eckpunkten ersetzt. Dabei ist Folgendes zu beachten. Soll ein Punkt in's Unendliche rücken, und liegt in dem Blatt, dem er angehört, eine umlaufende Seite, so darf er nur von aussen, nicht von innen, in diese Seite hineinfallen (§ 1). Hieraus ist bereits zu folgern, dass aus dem reducirten Dreieck mit einer um-

*) Der Winkel im Unendlichen ist Null. Daraus folgt, dass der Grenzwert Null für unendlich ferne Eckpunkte keine Besonderheit bedingt.

laufenden Seite ein reducirtes Dreieck mit umlaufender Seite und unendlich fernem Eckpunkt nicht abgeleitet werden kann. Ein derartiges Dreieck kann nämlich nach dem Vorstehenden nur noch dadurch entstehen, dass wir einen Endpunkt der umlaufenden Seite in's Unendliche rücken lassen. Geschieht dies in der Richtung der Verlängerung der Seite, so ist das so bestimmte Dreieck nicht reducirt. Andererseits ist es überflüssig, einen Eckpunkt in der Richtung der umlaufenden Seite selbst in's Unendliche rücken zu lassen, denn jedes so entstehende reducirt Dreieck hat keine umlaufende Seite mehr, und muss daher aus einem Dreieck mit lauter endlichen Seiten hervorgehen. Wir brauchen daher auch bei der Bildung der Vierecke nur die Dreiecke mit drei endlichen Eckpunkten durch Dreiecke mit unendlich fernen Eckpunkten zu ersetzen; die Dreiecke mit umlaufender Seite bleiben, sofern sie überhaupt benutzbar sind, unverändert.

Wir schliessen hieraus sofort:

Es giebt nur eine Gattung von Dreiecken mit einem unendlich-fernen Eckpunkt. Ihre Winkelsumme beträgt π ; keine Seite ist umlaufend. (Fig. 26).

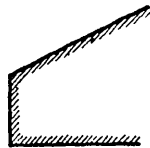


Fig. 26.

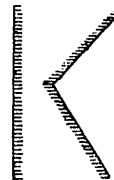


Fig. 27.

Es giebt nur eine Gattung von Dreiecken mit zwei unendlich fernen Punkten; ihre Winkelsumme ist π , keine Seite ist umlaufend. (Fig. 27).

Sind $\lambda_1\pi$ und $\lambda_2\pi$, resp. $\lambda_1\pi$ allein die Winkel an den im Endlichen bleibenden Ecken, dagegen $\bar{\lambda}_1\pi$ resp. $\bar{\lambda}_1\pi$ und $\bar{\lambda}_2\pi$ absolut genommen die Winkel im Unendlichen, so gelten folgende Bedingungen:

$$\lambda_1 < 2, \quad \lambda_2 < 2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 < 2, \quad \bar{\lambda}_1 < 1,$$

resp.

$$1 < \lambda_1 < 3, \quad \bar{\lambda}_1 < 1, \quad \bar{\lambda}_2 < 1.$$

Bei den Dreiecken mit zwei unendlich fernen Ecken kann nämlich der im endlichen bleibende Winkel einen Windungspunkt liefern, ohne dass das Dreieck aufhört, reducirt zu sein. Man sieht dies unmittelbar, wenn man sich vorstellt, dass der Winkel der Fig. 27 wächst, bis er grösser als 2π ist.

Die Vierecke mit einem unendlich fernen Eckpunkt zerfallen in zwei Gattungen; die erste hat keine, die zweite hat eine umlaufende Seite. Die Vierecke dritter Gattung mit endlichen Eckpunkten scheiden

hier aus, da sie mit zwei Dreiecken mit umlaufender Seite gebildet sind. Für die erste Gattung hat die Winkelsumme den Werth 2π , für die zweite beträgt sie 4π . Die Vierecke erster Gattung können bereits Windungspunkte erhalten, ohne dass sie reducirbar werden, nämlich dann, wenn man sie aus zwei Dreiecken mit unendlich fernem Eckpunkt zusammensetzt. (Fig. 28 und 28a*). Die Vierecke mit

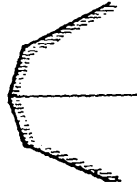


Fig. 28.

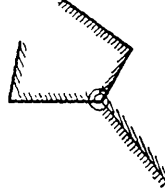


Fig. 28a.

umlaufender Seite können nur so gebildet werden, dass man an ein Dreieck mit umlaufender Seite und endlichen Eckpunkten ein Dreieck mit unendlich fernem Eckpunkt ansetzt; dabei können je nach der Lage dieses Dreiecks noch mannigfache Typen entstehen. Die nebenstehenden Figuren 29, 29a, 29b entsprechen den Figuren 19, 19a, 20 und 20a. Es folgt:

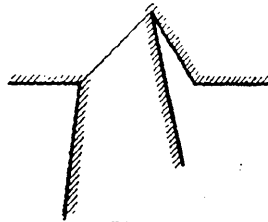


Fig. 29.

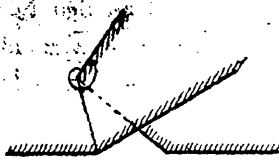


Fig. 29a.



Fig. 29b.

Es giebt zwei Gattungen von Vierecken mit einem unendlich fernem Eckpunkt. Die eine besitzt eine umlaufende Seite, die andere nicht; die bezügliche Winkelsumme beträgt 2π , resp. 4π .

Die bezüglichlichen Winkelbedingungen sind im ersten Falle

$$0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \lambda_3 < 2, \quad \bar{\lambda} < 2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 4,$$

*) Vgl. die Anmerkung zu Figur 21. Es empfiehlt sich, die Figuren mit unendlich fernen Punkten auch als Kreispolygone zu zeichnen.

im zweiten Fall dagegen

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \lambda_4 < 3, \quad \bar{\lambda} < 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 < 5,$$

resp.

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 1 < \lambda_2 < 2, \quad 0 < \lambda_3 < 2, \quad \bar{\lambda} < 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 5.$$

Um Vierecke mit zwei unendlich fernen Eckpunkten zu bilden, können wir Dreiecke mit umlaufender Seite nicht mehr benutzen; denn ein reducirtes Dreieck dieser Art bedingt stets drei im Endlichen gelegene Ecken. Die Vierecke entstehen daher sämtlich durch Zusammensetzung von Dreiecken mit unendlich fernen Eckpunkten. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden. Wir können erstens zwei Dreiecke mit je einem unendlich fernen Punkt benutzen, zweitens ein Dreieck mit einem und ein Dreieck mit zwei unendlich fernen Punkten, und drittens zwei Dreiecke mit je zwei unendlich fernen Punkten. Zwei Dreiecke mit einem unendlich fernen Punkt können nur so aneinander gelegt werden, dass die unendlichen Punkte nicht coincidiren; dadurch

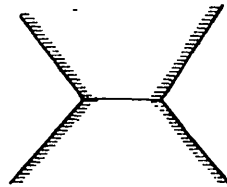


Fig. 30.

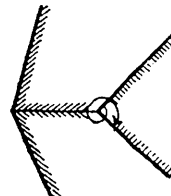


Fig. 30a.

entsteht ein Viereck, in dem die unendlichen Ecken gegenüberliegende Ecken sind. (Fig. 30 und 30a)*). Die Winkel genügen der Bedingung

$$0 < \lambda_1 < 4, \quad 0 < \lambda_2 < 4, \quad 0 < \bar{\lambda}_1 < 1, \quad 0 < \bar{\lambda}_2 < 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 < 4,$$

ihre Summe beträgt 2π .

Wird ein Dreieck mit einem unendlichen Punkt und ein Dreieck mit zwei unendlichen Punkten zusammengesetzt, so entsteht ein Viereck, in dem die unendlichen Eckpunkte benachbarte Punkte sind. (Fig. 31). Die Zusammensetzung kann nämlich nur so erfolgen, dass zwei von einem endlichen nach einem unendlichen Eckpunkt laufende Seiten aufeinanderfallen. Die Winkelbedingung lautet:

$$0 < \lambda_1 < 2, \quad 1 < \lambda_2 < 5, \quad 0 < \bar{\lambda}_1 < 1, \quad 0 < \lambda_2 < 2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 < 5,$$

die Summe der Winkel beträgt wieder 2π .



Fig. 31.

*) Vgl. die Anmerkung zu Figur 21.

Zwei Dreiecke mit je zwei unendlich fernen Punkten sind so zusammenzusetzen, dass die Seiten, die diese beiden Punkte verbinden, mit einander coincidiren. Die so entstehenden Vierecke stellen aber den nämlichen Typus dar, wie die zuerst abgeleiteten Vierecke. (Fig. 32). Wir erhalten demnach:

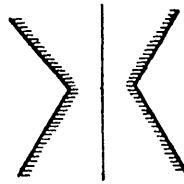


Fig. 32.

Es giebt eine Gattung von Vierecken mit zwei unendlich fernen Punkten; sie enthält zwei verschiedene Typen von Vierecken, die sich danach unterscheiden, ob die unendlich fernen Eckpunkte durch die im Endlichen liegenden Eckpunkte getrennt werden oder nicht.

Vierecke mit drei unendlich fernen Eckpunkten können sich augenscheinlich nur durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken mit zwei unendlich fernen Eckpunkten ergeben; die endlichen Ecken fallen zusammen. (Fig. 33)*. Die Winkelbedingung lautet

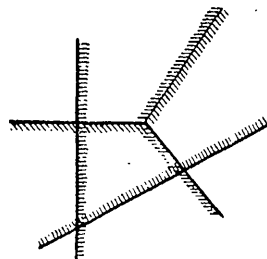


Fig. 33.

$$2 < \lambda_1 < 6, \quad 0 < \bar{\lambda}_1 < 1, \quad 0 < \bar{\lambda}_2 < 2, \\ 0 < \bar{\lambda}_3 < 4;$$

die Winkelsumme beträgt 2π .

Der im Endlichen verbleibende Eckpunkt ist daher nothwendig ein Windungspunkt.

Der Typus des Vierecks ist genau derjenige des im Eingang von § 1 betrachteten Polygons mit einem Windungspunkt. Es folgt:

Es giebt nur eine Gattung von Vierecken mit drei unendlich fernen Eckpunkten.

Es ist klar, dass jedes n -Eck mit $n - 1$ unendlich fernen Eckpunkten vom nämlichen Typus ist.

§ 7.

Polygone, die Windungspunkte im Innern enthalten.

Es erübrigt noch, die vorstehend abgeleiteten Sätze auf solche Polygone auszudehnen, die Windungspunkte in ihrem Innern enthalten. Wir betrachten zu diesem Zweck zunächst den einfachen Fall eines Polygons \mathfrak{P} mit durchaus endlichen Seiten, und ohne Flächendurchgänge, das in seinem Innern einen Windungspunkt erster Ordnung V besitzt. Ziehen wir von V eine geradlinige Transversale t nach der Begrenzung des Polygons und denken uns die Polygonfläche längs dieser Transversalen zerschnitten, so bleibt sie einfach zusammen-

*) Vgl. die Anmerkung zu Figur 21.

hängend, verwandelt sich aber in ein Polygon \mathfrak{P}' , für das V jetzt ein Eckpunkt geworden ist.

Es ist einleuchtend, dass wir auf ähnliche Weise jedes Polygon \mathfrak{P} , das Windungspunkte in seinem Innern enthält, in ein Polygon \mathfrak{P}' überführen können, in dem alle Windungspunkte Eckpunkte geworden sind. Ist wieder V ein solcher Punkt, so ist nur noch zu untersuchen, ob es eine von V ausgehende Transversale giebt, welche die Begrenzung in allen Fällen bereits nach einem endlichen Verlauf treffen muss. Dies braucht nicht immer der Fall zu sein. Wie dem aber auch sei, so muss man immer von V aus einen aus endlichen Strecken bestehenden Linienzug ziehen können, der schliesslich den Polygonumfang erreicht. *Es kann daher jeder innere Windungspunkt von \mathfrak{P} mittelst eines geradlinigen Linienzugs, der nur Strecken von endlicher Länge enthält, in einen Eckpunkt eines Polygons \mathfrak{P}' übergeführt werden.* Dies ist übrigens stets so möglich, dass der Linienzug in einer Ecke von \mathfrak{P} endigt.

Nun sei n die Anzahl der Ecken von \mathfrak{P} , ferner seien $V_1, V_2 \dots V_r$ die im Innern gelegenen Windungspunkte, $w_1', w_2', \dots w_r'$ die zugehörigen Ordnungszahlen und $l_1, l_2 \dots l_r$ die Zahl der Strecken jedes Linienzuges. Wir nehmen an, dass diese Linienzüge sämtlich in Ecken von \mathfrak{P} endigen, so wird das Polygon \mathfrak{P}'

$$n' = n + 2 \sum_1^r l_i$$

Ecken haben. Für seine Winkelsumme $S'\pi$ ergibt sich daher

$$S' = n + 2 \sum l - 2 + 2 \sum v + 4p.$$

Andrerseits ist die Winkelsumme von \mathfrak{P}' um

$$\left\{ 2 \sum_1^r (w_i' + 1) + 2 \sum_1^r (l_i - 1) \right\} \pi$$

grösser als diejenige von \mathfrak{P} ; daher folgt

$$(III) \quad \sum \lambda = n - 2 - 2 \sum w' + 2 \sum v + 4p$$

resp.

$$(IIIa) \quad \sum \lambda' + 2 \sum w + 2 \sum w' = n - 2 + 2 \sum v + 4p.$$

Die hier benutzte Auffassung, nach der das Polygon \mathfrak{P} mit inneren Windungspunkten als Polygon \mathfrak{P}' betrachtet wird, das Windungspunkte nur in den Ecken besitzt, ist für die functionentheoretischen Zwecke durchaus geeignet. Wenn nämlich die Functionentheorie zu Polygonen führt, die innere Windungspunkte V besitzen, so ist es doch gerade für diejenigen Fragen, die von der Gestaltung des Polygons abhängen, sehr nützlich, das bezügliche Polygon morphologisch als

Polygon \mathfrak{P} aufzufassen, für das jeder Punkt V ein innerer Punkt geworden ist. Für diese Aufgaben ist es daher ausreichend, die Polygone \mathfrak{P} mit inneren Windungspunkten in Polygone \mathfrak{P}' zu verwandeln. Als dann können wir aber die in den vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Sätze auf die Polygone \mathfrak{P} ohne Weiteres übertragen. Im Besondern folgt, dass das Polygon \mathfrak{P} , wenn es selbst reducirt ist, aus $n + 2r - 2$ reducirten Dreiecken zusammengesetzt werden kann; man hat nur diese Dreiecke so zu wählen, dass in den Eckpunkten, die innere Windungspunkte werden sollen, die Winkel bezüglich den Werth $2w_1'\pi, 2w_2'\pi, \dots$ erhalten.

Die vorstehende Auffassung wird auch dadurch unterstützt, dass in die Winkelrelation die inneren Windungspunkte in gleicher Weise eingehen, wie diejenigen, die in den Ecken liegen. In der That können auch die inneren Windungspunkte zu Reductionsprocessen benutzt werden: ein principieller Unterschied zwischen beiden Arten von Windungspunkten ist daher geometrisch nicht vorhanden.

Göttingen, im October 1892.