Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke.

Von

A. Schönflies in Göttingen.

§ 1.

Einleitende Definitionen und Festsetzungen.

Die folgenden Sätze über Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke knüpfen an diejenigen Betrachtungen an, die ich kürzlich über geradlinige Polygone in diesen Annalen veröffentlicht habe*). Bei der dort zu Grunde gelegten Auffassung ist unter einem Kreisbogenpolygon ein einfach zusammenhängendes, von Kreisbogen begrenztes Flächenstück zu verstehen. Die Seiten können mehr als eine volle Peripherie betragen, und in den Ecken können Windungspunkte beliebig hoher Ordnung liegen; dagegen will ich annehmen, dass im Innern Windungspunkte nicht enthalten sind. Kreisverwandte Polygone gelten für die hier vorliegenden Zwecke nicht als verschieden. Der Unendlichkeitspunkt der Ebene, dem bei den geradlinigen Polygonen eine Ausnahmestellung zukam, ist daher bei den allgemeinen Polygonen nicht als Punkt besonderer Art zu betrachten; jeder Punkt der Ebene kann durch kreisverwandte Transformation in's Unendliche geworfen werden.

Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, besteht darin, die Gesammtheit aller existirenden Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke so aufzuzählen, dass man sie morphologisch beherrscht. Für die Kreisbogendreiecke ist dies bereits ausgeführt worden. Hier ist zuerst die Arbeit des Herrn Klein**) über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zu nennen, ferner eine demnächst erscheinende Arbeit von Hrn. Schilling***). Ich muss mich jedoch auch meiner-

*) Bd. 42, S. 377.

**) Diese Annalen, Bd. 37, S. 573.

***) Vergl. die demnächst in diesen Annalen erscheinende Abhandlung: Zur Theorie der Schwarz'schen s-Function.

Man vgl. auch die im XX. Band der Abhandlungen der Sächs. Ges. d. Wiss.

seits nochmals mit Kreisbogendreiecken befassen, zumal noch einige Punkte der Erledigung bedürfen, und ich überdies bei den Erörterungen über Kreisbogenvierecke von den Resultaten über Kreisbogendreiecke Gebrauch zu machen habe.

Eine Seite, die mehr als eine volle Peripherie umspannt, nenne ich *umlaufend;* wenn sie mehrere volle Peripherieen enthält, so soll sie *mehrfach umlaufend* heissen. Die Winkel des Polygons bezeichne ich wieder durch $\lambda\pi$ und setze

$$\lambda\pi = 2w\pi + \lambda'\pi; \quad 0 \leqq \lambda' < 2,$$

so dass w die Ordnung des Windungspunktes angiebt; $\lambda'\pi$ heisse wieder der *Winkelrest.* Je nachdem $\lambda' < 1$ oder $\lambda' > 1$ ist, ist der Winkel *concav* oder *convex.*

Für Kreisbogenpolygone bieten Winkel von der Grösse $0, \pi, 2\pi \ldots$ keine Besonderheit dar. Es ist aber zu beachten, dass ein Winkel von der Grösse π bald als concaver, bald als convexer Winkel aufzufassen ist. Ist nämlich BAC ein beliebiger convexer Winkel eines geradlinigen Polygons, so treten die Verlängerungen von BA und CA über A hinaus stets in das Innere des Polygons ein, während dies für concave Winkel nicht der Fall ist. Dies soll als Criterium auch für Kreisbogenwinkel gelten; der im Punkt A an der Seite AB liegende Winkel ist concav oder convex, jenachdem die Verlängerung von BA über A hinaus in das Aeussere (Fig. 1) *) oder in das Innere (Fig. 2)

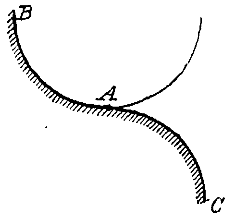

Fig. 1.

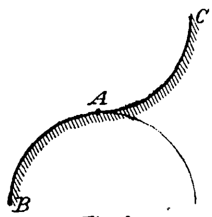

Fig. 2.

des Polygons eintritt. Ich bemerke noch, dass in Fig. 1 der an der Seite CA liegende Winkel CAB convex, in Fig. 2 jedoch concav ist. Der Winkel hat also für seine beiden Schenkel entgegengesetzten Charakter.

---

erschienene Study'sche Abhandlung: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Der Study'sche Dreiecksbegriff deckt sich jedoch nicht mit dem hier benutzten. Herr Study versteht unter einem Dreieck drei Winkelzahlen und drei Seitenzahlen, die durch irgend drei grösste Kreise einer Kugel bestimmt werden, während der Begriff der einfach zusammenhängenden Dreiecksfläche für ihn überhaupt nicht in Frage kommt.

*) Das Polygoninnere ist durch Schraffirung kenntlich gemacht.

§ 2.

Reductions- und Erweiterungsprocesse.

Es ist zweckmässig, sich für die systematische Aufzählung aller Kreisbogenpolygone solcher Reductionsprocesse und Erweiterungsprocesse zu bedienen, wie ich sie a. a. O. bei der Untersuchung der geradlinigen Polygone benutzt habe. Ich habe dort mit zwei Processen operirt, die ein Polygon durch Tilgung von Vollebenen oder Halbebenen auf ein anderes zurückführten, das die nämlichen Eckpunkte, die nämlichen Winkelreste und die nämlichen Seitenrichtungen besass, wie das ursprüngliche. Der erste Process bestand in der *Ausschaltung einer Vollebene;* er besteht in der gleichen Weise für beliebige Kreisbogenpolygone und vermindert die Windungspunkte des Polygons um zwei. Der zweite bestand in der Abtrennung einer Halbebene; er tilgt einen Windungspunkt und einen Seitenumlauf und geht für beliebige Kreisbogenpolygone in die *Ausschaltung einer Kreisscheibe* über. Ich bemerke, dass die Kreisscheibe sowohl das vom Kreis eingeschlossene, als auch das durch ihn ausgeschlossene Stück der Ebene bedeuten kann. Hierzu kommt für Kreisbogenpolygone noch ein dritter Process, der zwei Seitenumläufe tilgt, und den ich als *Ausschaltung eines Kreisringes* bezeichne. Alle diese Processe sind von Herrn Klein eingeführt und in seinen Vorlesungen wiederholentlich benutzt worden. Es empfiehlt sich, sie an einigen einfachen Beispielen klarzustellen.

Es sei (Fig. 3) $ABCD$ ein Kreisbogenviereck, und t eine in ihm verlaufende Diagonale AC. Man lege das Viereck $ABCD$ auf eine Vollebene, und schneide die Vollebene und das Viereck längs t auf; alsdann hefte man die übereinander liegenden Stücke beider Flächen über Kreuz zusammen. Dadurch entsteht ein einfach zusammenhängendes Viereck $ABCD$, das in A und C je einen Windungspunkt besitzt. Wir sagen, dass dieses Viereck aus dem ursprünglichen durch *Einschaltung einer Vollebene* hervorgeht, ebenso kann man umgekehrt durch Ausschaltung der Vollebene zu dem ursprünglichen Viereck zurückgelangen.

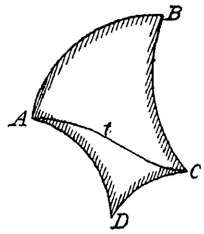

Fig. 3.

Es sei zweitens (Fig. 4) $ABCD$ ein Viereck, in welchem der Punkt A innerhalb derjenigen durch BC bestimmten Kreisscheibe s liegt, die das Innere des Vierecks ausmacht; ferner sei t eine von A nach BC verlaufende Transversale, die innerhalb des Vierecks und zugleich innerhalb von s bleibe. Wir legen nun das Viereck auf eine zu s congruente Kreisscheibe s', schneiden beide Flächen wieder längs t auf und heften ihre Theile über Kreuz zusammen, so ist jetzt ein Viereck $ABCD$ entstanden,

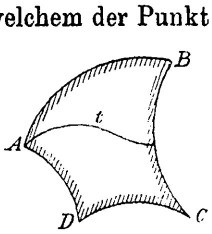

Fig. 4.

das in A einen Windungspunkt besitzt, und dessen Seite BC umlaufend geworden ist. Dieses Viereck betrachten wir als erzeugt durch *Einschaltung einer Kreisscheibe;* umgekehrt geht man von ihm durch Ausschaltung einer Kreisscheibe zu dem ursprünglichen Viereck zurück.

Es sei drittens (Fig. 5) $ABCD$ ein Viereck von der Art, dass der durch AB bestimmte Kreis s den durch CD bestimmten Kreis u einschliesst, und es sei wieder t irgend eine Transversale des Vierecks, die von einem Punkte der Seite AB nach einem Punkt der Seite CD läuft. Die beiden Kreise s und u bestimmen einen Kreisring; ihn lege man auf einen congruenten Kreisring, und schneide diesen sowie das Viereck $ABCD$ längs t auf; alsdann hefte man beide Flächentheile wieder über Kreuz zusammen, so entsteht ein einfach zusammenhängendes Viereck, das die Fläche $ABCD$ doppelt bedeckt und in AB und CD zwei umlaufende Seiten besitzt. Dieses Viereck geht aus dem ursprünglichen durch *Einschaltung eines Kreisringes* hervor; von ihm steigt man durch Ausschaltung des Kreisringes zu dem ursprünglichen herab.

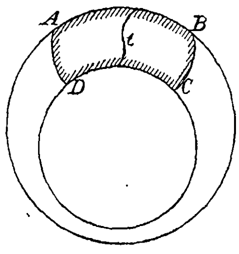

Fig. 5.

Für geradlinige Polygone wird dieser letzte Process augenscheinlich illusorisch.

Die drei genannten Reductionsprocesse sind dadurch charakterisirt, dass der erste zwei Windungspunkte tilgt, der zweite einen Windungspunkt und einen Seitenumlauf, der dritte zwei Seitenumläufe. Man kann beweisen, dass *sie die einzigen Processe sind, die die Ecken, die Winkelreste und die Seitenrichtungen unverändert lassen.* Ich unterlasse es, dies weiter auszuführen, weil die Reductionsprocesse für die morphologische Structur eines Polygons an sich keine wesentliche Bedeutung haben (vgl. § 8); sie sind ja nur Hilfsmittel, deren wir uns bedienen, um uns die Aufzählung der Polygone zu erleichtern, und wir können uns daher einfach auf den Standpunkt stellen, dass wir andere Processe, die die Winkelreste unverändert lassen, nicht nöthig haben.

Zu ihnen kommt noch ein Reductionsprocess anderer Art, nämlich ein solcher, der zwar die Ecken, aber nicht die Winkelreste unverändert lässt. Es ist derjenige, den Herr Klein a. a. O. ausführlich erörtert hat. Er besteht in der *Abtrennung einer Kreisscheibe* längs einer Polygonseite, er vermindert die an ihren Endpunkten liegenden Winkel um je π und ersetzt die Seite selbst durch ihr Complement. Der umgekehrte Process besteht in der *Anhängung einer Kreisscheibe.* Dieser Process ist nur für solche Seiten zulässig, die nicht umlaufend sind.

Ich bemerke noch, dass zwei Transversalen, längs deren eine

Vollebene, oder eine Kreisscheibe, oder ein Kreisring eingeschaltet werden sollen, sich nicht schneiden dürfen. Hier bestehen die nämlichen Sätze, die ich für geradlinige Polygone abgeleitet habe.*)

Ein Kreisbogenpolygon, das Reductionsprocesse zulässt, soll wieder *reducirbar* heissen; im andern Fall heisst es *reducirt.***)

§ 3.

Einige Hilfssätze.

Ist AB eine Polygonseite, so kann längs AB sowohl das Innere, als das Aeussere des durch AB bestimmten Kreises s das Polygoninnere ausmachen. Es ist aber klar, dass wir durch kreisverwandte Transformation das Polygon $\mathfrak{K}$ so in ein Polygon $\mathfrak{K}'$ überführen können, dass längs $A'B'$ die Polygonfläche innerhalb des durch $A'B'$ bestimmten Kreises s' liegt. *Wir setzen fest, dass dies für alle im Folgenden zu betrachtenden umlaufenden Seiten erfüllt ist.*

Sei jetzt (Fig. 6, S. 111) $AB = c$ eine nicht umlaufende Seite eines Kreisbogenpolygons $\mathfrak{K}$ und es seien die an ihren Endpunkten liegenden Winkel beide convex. Wir betrachten die Gesammtheit aller Kreisbogen c', die durch A und B gehen und im Innern des durch AB bestimmten Kreises s liegen. Diejenigen von ihnen, die nahe bei c verlaufen, liegen sicher mit allen ihren Punkten innerhalb des Polygons. Nun sind zwei Fälle möglich; die genannten Kreisbogen c' bleiben nämlich entweder alle innerhalb des Polygons oder diese Eigenschaft kommt nur einem Theil von ihnen zu. Im ersten Fall lässt sich von $\mathfrak{K}$ die durch AB begrenzte Kreisscheibe abtrennen, und das Polygon ist reducirbar. Im zweiten Fall giebt es unter den Kreisen c' nothwendig einen bestimmten ersten Kreis, der nicht mehr ganz innerhalb des Polygons liegt; es ist derjenige Kreis, der die Polygoncontour zuerst erreicht, und den wir daher den *Grenzkreis* nennen. Wir bezeichnen ihn durch k_{ab}.

Aehnliche Verhältnisse liegen vor, wenn AB eine umlaufende Seite ist. Nach der oben getroffenen Festsetzung ist das Innere des durch AB bestimmten Kreises s zugleich das Innere des Polygons. Wir betrachten jetzt (Fig. 9, S. 113) die Kreise s', die AB im Punkte A von innen berühren; sie treten bei A in das Polygoninnere ein und endigen in dem unter A liegenden Punkt A' der Seite AB, der von A um eine volle Peripherie entfernt ist. Diejenigen dieser Kreise, die nahe bei s verlaufen, liegen sicher innerhalb des Polygons. Andrerseits

*) Vgl. a. a. O. S. 387 ff.

**) Der hier eingeführte Begriff eines reducirten Polygons deckt sich nicht ganz mit demjenigen, den Herr Klein a. a. O. benutzt.

können nicht alle diese Kreise s' dem Polygoninnern angehören; denn ein geschlossener Linienzug, der in zwei unter einander liegenden Punkten A und A' endigt und im Innern verläuft, kann nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden, und zugleich dauernd im Innern verbleiben. Wir gelangen damit wieder zu dem Resultat, dass unter den Kreisen s' nothwendig ein *Grenzkreis* existirt, der die Polygoncontour zuerst erreicht. Wir bezeichnen ihn durch k_a.

Der Grenzkreis wird entweder einen Eckpunkt des Polygons enthalten, oder er berührt eine Polygonseite. Im ersten Fall nennen wir ihn einen *Diagonalkreis*, im zweiten einen *Tangentialkreis* (Fig. 11, S. 116). Liegt z. B. ein Viereck $ABCD$ vor, so wird der Kreis k_a entweder die Seite CD berühren, oder aber er geht durch einen der beiden Eckpunkte C und D. Geht er durch C, so soll er ein *eigentlicher Diagonalkreis* heissen, wenn er dagegen durch den auf A folgenden Punkt D hindurchzieht, so soll er *uneigentlicher Diagonalkreis* heissen.

Es ist zu beachten, dass der Grenzkreis im besondern eine ganze Polygonseite enthalten kann; dies ist z. B. der Fall, wenn AD und AB den Winkel Null einschliessen, und D ein convexer Winkel ist. Alsdann enthält der Kreis doch den Punkt D und ist als uneigentlicher Diagonalkreis anzusehen. Ebenso gilt er immer dann als eigentlicher Diagonalkreis, wenn er den Punkt C enthält.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass wenn der Grenzkreis k_a oder k_{ab} ein Diagonalkreis ist, an dem von ihm getroffenen Eckpunkt ein *convexer* Winkel liegt.

§ 4.

Kreisbogendreiecke ohne umlaufende Seiten.

Herr Klein hat a. a. O. gezeigt, dass man für jedes beliebige Dreieck eine arithmetische Reduction vornehmen kann, die einer geometrischen Erzeugung des Dreiecks aus gewissen einfachen Dreieckstypen äquivalent ist; er hat ferner auf Grund functionentheoretischer Betrachtungen geschlossen, dass zu drei beliebigen Winkelzahlen $\alpha\ \beta\ \gamma$ auch stets ein Kreisbogendreieck gehört. Ich halte es für nützlich, diese Resultate auch geometrisch abzuleiten. Ich werde also zeigen, dass erstens *jedes existirende Dreieck aus einem reducirten Dreieck durch Erweiterungsprocesse ableitbar ist, und dass zweitens zu allen Winkeltripeln $\alpha\ \beta\ \gamma$ auch wirklich Dreiecke gehören.**)

Ich theile die Untersuchung in zwei Theile und betrachte zuerst Dreiecke *ohne umlaufende Seiten.* Von ihnen gilt der Satz:

Jedes Dreieck ohne umlaufende Seiten, das zwei convexe Winkel enthält, ist reducirbar.

*) Vgl. hierzu die in der Einleitung genannte Schilling'sche Arbeit.

Es seien (Fig. 6) A und B die convexen Winkel, so fasse man die das Innere des Dreiecks durchziehenden Kreise c' in's Auge, die durch A und B gehen. Giebt es unter ihnen einen Grenzkreis nicht, so ist die durch AB bestimmte Kreisscheibe abtrennbar. Ist dies nicht der Fall, so geht der Grenzkreis k_{ab} nothwendig durch C und es ist C ein convexer Winkel. Ich behaupte, dass in diesem Fall die durch AC bestimmte Kreisscheibe u abtrennbar ist. Aus dem vorstehenden folgt, dass dies immer dann zutrifft, wenn der Punkt B ausserhalb dieser Kreisscheibe liegt. Der kleinste Werth, den α annehmen kann, ist $\alpha = 1$; alsdann berührt der Kreis AC den Kreis AB in A von innen und B liegt daher sicher ausserhalb u. Lassen wir jetzt α wachsen, während wir A und C festhalten, so behält der Kreis u die genannte Eigenschaft, bis AC mit dem Grenzkreis k_a zusammenfällt, und wenn α noch weiter wächst, so tritt B in das Innere des Kreises u ein. Dies ist aber doch nur scheinbar der Fall; denn jetzt liegen B und u in verschiedenen Blättern, es liegt also wirklich B ausserhalb des Gebietes, das von der durch u begrenzten einfachen Kreisscheibe erfüllt wird. Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Es folgt noch:

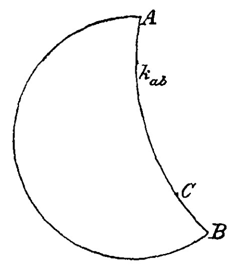

Fig. 6.

Jedes Dreieck ohne umlaufende Seiten geht aus einem analogen reducirten Dreieck durch Anhängung von Kreisscheiben hervor.

Wir haben nun zweitens zu fragen, für welche Werthe von α, β, γ reducirte Dreiecke ohne umlaufende Seiten existiren. Wir können jedes derartige Dreieck so in ein kreisverwandtes verwandeln, dass die drei Eckpunkte in beliebige Punkte der Ebene fallen; wir dürfen daher die Eckpunkte beliebig wählen. A und B seien die beiden concaven Winkel. Wir nehmen überdies zunächst an, dass sie beide spitz sind, so handelt es sich genauer um die Frage, für welche Werthe von γ reducirte Dreiecke der betrachteten Art existiren. Wir zeichnen (Fig. 7) zwei beliebige Kreise, die sich von aussen berühren, so können wir einen Kreis beschreiben, der den einen von ihnen unter dem Winkel $\alpha\pi$, den andern unter dem Winkel $\beta\pi$ schneidet; diese Kreise bestimmen also bereits ein Dreieck ABC, in dem α und β vorgeschriebene Werthe haben, während $\gamma = 0$ ist. Die drei Dreiecksseiten seien a, b, c.

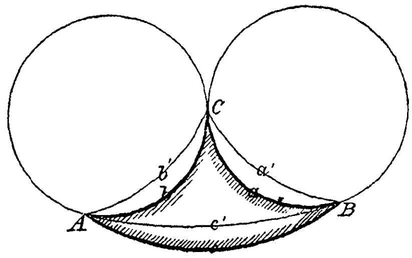

Fig. 7.

Nun ersetzen wir die Seite $AB = c$ durch einen auf der inneren

Seite von AB verlaufenden Kreisbogen c', der mit c in A und B den Winkel $\omega\pi$ bestimmt, und zeichnen sodann zwei Kreisbogen $BC = a'$ und $AC = b'$ so dass die Winkel $(b'c') = \alpha\pi$ und $(c'a') = \beta\pi$ sind, so bestimmen a', b', c' ein Dreieck dessen Winkel $\alpha\pi, \beta\pi, 2\omega\pi$ sind. Hiermit können wir fortfahren, bis der Kreis c' durch C geht. Sobald nämlich c' den Punkt C erreicht oder überschreitet, so entsteht ein Dreieck ABC von verändertem morphologischen Charakter; es kann nur dann ein einfach zusammenhängendes Flächenstück repräsentiren, wenn man ihm in A und B Windungspunkte beilegt.

Die vorstehenden Schlüsse bleiben ohne Weiteres in Kraft, wenn wir von einem Dreieck ausgehen, dessen Winkel A und B beide stumpf sind, wie es in Fig. 8 dargestellt ist. Dasselbe gilt für Dreiecke, in denen der eine Winkel spitz, der andere stumpf ist; wir haben zu diesem Zweck die beiden sich von aussen berührenden Kreise durch Kreise mit innerer Berührung zu ersetzen.

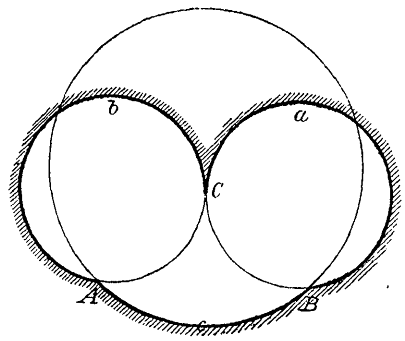

Fig. 8.

Man sieht leicht, dass, wenn der Kreis c' durch C geht, in allen Fällen die Relation

$$2\omega' = 1 + \alpha + \beta$$

besteht, und daraus folgt, dass reducirte Dreiecke ohne umlaufende Seiten, und mit concaven Winkeln A und B stets und nur für solche Werthe γ existiren, für die

$$\gamma < 1 + \alpha + \beta$$

ist; d. h.

Reducirte Dreiecke ohne umlaufende Seite und mit Winkeln

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 1$$

existiren für jeden Werth

$$0 \leqq \gamma < 1 + \alpha + \beta \leqq 3$$

d. h. für

$$\gamma - \alpha - \beta < 1.$$

Die Formel zeigt, dass wenn $\alpha + \beta > 1$ ist, bei C zuletzt ein Windungspunkt entsteht, wie dies auch aus dem geometrischen Process unmittelbar hervorgeht.

Hat einer der beiden Winkel α und β den Werth Null, so ist $\gamma < 1 + \beta$, es ist daher γ nothwendig kleiner als 2.

§ 5.

Die Kreisbogendreiecke mit umlaufender Seite.

Es sei jetzt (Fig. 9)*) ABC ein Dreieck, in dem die Seite AB umlaufend ist; andere Voraussetzungen über die Art der Seiten und Winkel machen wir nicht. Zur Seite AB gehört ein Grenzkreis k_a; dieser Kreis ist nothwendig ein Diagonalkreis und geht daher durch C. Hieraus folgt bereits, dass der Winkel C sicher convex ist. Weiter schliessen wir, dass die Seite AC nicht umlaufend ist, denn sie endet in zwei Punkten A und C, die in einem und demselben Blatt enthalten sind. Das Gleiche folgt für die Seite BC unter Benutzung des Grenzkreises k_b. Es folgt:

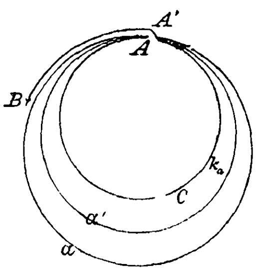

Fig. 9.

In einem Dreieck kann nur eine Seite umlaufend sein.

Wir beweisen ferner, dass sich vom Dreieck ABC stets eine Kreisscheibe abtrennen lässt, wenn der Winkel A convex ist. Wir haben eben gesehen, dass die Seite AC nicht umlaufend ist; demnach schliessen wir aus § 4, dass sich die Kreisscheibe längs AC nur dann nicht abtrennen lässt, wenn der Punkt B in ihrem Innern enthalten ist. Dies trifft aber hier nicht zu; denn denkt man sich den Bogen CA' des Grenzkreises als Theilungslinie des Dreiecks, so zerfällt das Dreieck in zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke, $A'CB$ und $A'CA$, von denen das eine den Punkt B, das andere die bezügliche Kreisscheibe enthält. Wir erhalten daher:

Jedes Dreieck mit einer umlaufenden Seite geht durch Anhängung von Kreisscheiben aus einem Dreieck hervor, in dem die Winkel an der umlaufenden Seite concav sind.

Wir betrachten jetzt ein Dreieck mit umlaufender Seite AB und concaven Winkeln in A und B. Nun kann C an und für sich ein Windungspunkt sein. Alsdann kann man aber, wie unmittelbar einleuchtet, aus dem Dreieck eine Kreisscheibe ausschalten, so dass AB einen Umlauf verliert, und der Winkel C um 2π vermindert wird**); jedes Dreieck mit umlaufender Seite AB kann demnach aus einem Dreieck erzeugt werden, in dem der Winkel C kleiner als 2π ist. Ist in diesem Dreieck die Seite AB nicht mehr umlaufend, so ist es ein Dreieck des § 4, ist AB umlaufend, so repräsentirt es einen neuen Typus reducirter Dreiecke. Weiter folgt noch, dass AB nur einfach

*) Um anzudeuten, dass $A'B$ in einem andern Blatt verläuft, als AA', ist der Radius von $A'B$ vergrössert worden.

**) Man kann dies auch durch Anbringung einer von C ausgehenden Theilungslinie in aller Form beweisen.

umlaufend ist. Der Bogen CA' des Grenzkreises k_a schneidet nämlich von ABC ein Dreieck $A'BC$ ab, in dem jetzt der Winkel $A'CB$ concav ist; daher kann $A'B$ nicht umlaufend sein. Also:

Die reducirten Dreiecke zweiter Art enthalten eine einfach umlaufende Seite. Ihr Gegenwinkel liegt zwischen π und 2π, die anliegenden Winkel liegen zwischen 0 *und π.*

Wir haben nun wieder zu zeigen, dass auch wirklich für jeden Werth $1 \leqq \gamma < 2$ derartige Dreiecke existiren. Wir gehen wieder von zwei sich berührenden Kreisen aus, die von einem dritten geschnitten werden. Diese bestimmen uns (Fig. 10) ein Dreieck ABC mit umlaufender Seite AB und dem Winkel $\gamma = 2$. Dieses Dreieck ist allerdings reducirbar, da ja $\gamma = 2$ ist. Wir ersetzen nun wieder den Kreis $AB = c$ durch einen ebenfalls durch A und B ziehenden Kreis c', der längs AB ausserhalb des Dreiecks verläuft, und mit AB den Winkel $\omega'\pi$ bestimmt und construiren wie in § 4, die Kreise $a' = CB$ und $b' = CA$, so dass $(b'c') = \alpha\pi$ und $(c'a) = \beta\pi$ ist, so hat das so bestimmte Dreieck

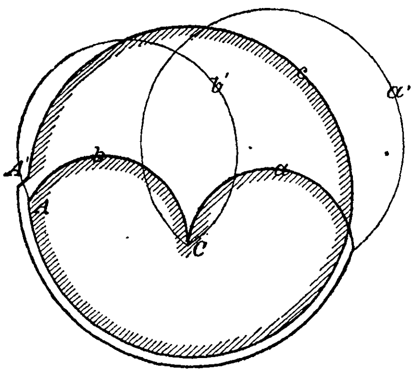

Fig. 10.

eine umlaufende Seite AB, die gleichen Winkel $\alpha\pi$ und $\beta\pi$, aber es ist $\gamma = 2 - 2\omega'$. Hiermit können wir wieder so lange fortfahren, bis der Kreis $c' = AB$ den Punkt C überstreicht, denn C tritt dadurch in das Aeussere des Kreises c' hinaus, was für die hier betrachteten Dreiecke nicht zulässig ist. Für den so bestimmten Grenzwerth von ω' ergiebt sich

$$2\omega' = 1 - \alpha - \beta$$

und daraus folgen für γ die Grenzen

$$1 + \alpha + \beta < \gamma < 2; \text{ d. h.}$$

Reducirte Dreiecke mit umlaufender Seite existiren für jeden Werth

$$1 + \alpha + \beta < \gamma < 2;$$

d. h. für

$$\gamma - \alpha - \beta > 1.$$

Verbinden wir dies Resultat mit dem von § 4, so folgt, dass nur für $\gamma - \alpha - \beta = 1$ ein Dreieck mit einer von Null verschiedenen Fläche sich nicht einstellt; wir haben hier einen *Grenzfall*, den wir jeder der beiden Dreiecksarten zurechnen können. Die reducirten Dreiecke enthalten eine umlaufende Seite, oder nicht, je nachdem

$$\gamma - \alpha - \beta - 1$$

positiv oder negativ ist. Beachtet man nun, dass bei jeder *Einschaltung* einer Kreisscheibe, resp. bei jedem Umlauf von AB die Grösse

$$\gamma - \alpha - \beta$$

um je zwei Einheiten zunimmt, und dass *Anhängungen* von Kreisscheiben nur längs solcher Seiten möglich sind, die nicht umlaufend sind, so ergeben sich die von Herrn Klein a. a. O. aufgestellten Sätze über die Abhängigkeit der Zahl der Umläufe von den Winkelzahlen.

Es folgt weiter, dass *für beliebige Werthe der Winkel Dreiecke wirklich existiren, und zwar, wenn wir kreisverwandte Dreiecke nicht unterscheiden, immer nur eins.*

§ 6.

Vierecke ohne umlaufende Seiten.

Für die geradlinigen Vierecke besteht der Satz, dass sich jedes von ihnen aus zwei Dreiecken zusammensetzen lässt. Durch geeignete Zusammensetzung zweier Kreisbogendreiecke ergiebt sich zwar auch immer ein Kreisbogenviereck, man gelangt aber auf diese Weise nicht zu jedem Viereck.*) Dieselbe Differenz tritt für beliebige geradlinige und Kreisbogen-n-ecke auf; sie macht es nothwendig, dass wir bei den allgemeinen Kreisbogenpolygonen besondere Wege einschlagen müssen.

Es sei $ABCD$ ein Viereck ohne umlaufende Seiten, von dem wir annehmen, dass die Winkel A und B beide convex sind. Es ist wieder die Frage, ob dieses Viereck nothwendig reducirbar ist. Der Grenzkreis k_{ab} ist entweder Diagonalkreis oder Tangentialkreis. Ist er Diagonalkreis, so stellt er für einen der beiden Punkte A und B eine eigentliche Diagonale dar. Wir nehmen an, dies sei A, so geht k_{ab} durch C und es zerfällt das Viereck durch die Diagonale AC in die beiden Dreiecke ADC und ABC. Nun ist nothwendig ACB ein convexer Winkel, vom Dreieck ABC ist daher die durch BC bestimmte Kreisscheibe abtrennbar. Wir folgern:

Ein reducirtes Viereck, das einen Diagonalkreis als Grenzkreis besitzt, existirt nicht.

Wir erhalten demgemäss drei verschiedene Typen von reducirten Vierecken, die sich durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken ergeben, je nach der Art, wie wir die Dreiecke aneinander legen. Die bezüglichen Winkelrelationen sind

1) $0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 2, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad 0 \leqq \delta < 2 + \alpha + \beta + \gamma < 6,$
2) $0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta < 1 + \alpha + \gamma < 3, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha + \gamma < 3,$
3) $0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta < 4, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad 0 \leqq \delta < 4.$

*) Vgl. z. B. S. 14 Anmerkung.

Wir haben jetzt zweitens den Fall zu betrachten, dass der Grenzkreis k_{ab} ein Tangentialkreis ist. Alsdann (Fig. 11) berührt er die Seite CD. Ist T der Berührungspunkt, so zerfällt das Viereck durch k_{ab} in zwei Dreiecke ADT und BDT und in ein Zweieck AB. Da die Winkel am Punkte T den Werth Null haben, so können die Dreiecke längs der Seiten AD, resp. BC reducirbar sein, alsdann gilt das gleiche vom Viereck selbst. Das Viereck ist daher sicher reducirbar, wenn z. B. $\delta > 1$ und zugleich der Winkel DAT selbst noch convex ist. Man kann aber noch weiter nachweisen, dass das Viereck immer reducirbar ist, falls einer der Winkel D oder C convex ist. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten, indem man das Viereck so in ein kreisverwandtes transformirt, dass der Punkt T in's Unendliche fällt; alsdann werden $A'T'$ und $D'T'$ parallel, und die Figur zeigt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar. Wir schliessen:

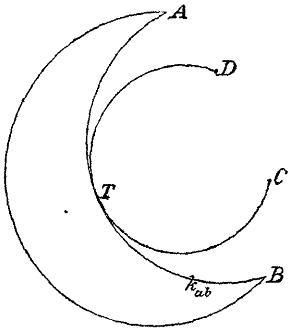

Fig. 11.

Wenn in einem reducirten Viereck ohne umlaufende Seiten der Grenzkreis ein Tangentialkreis ist, so sind die beiden nicht vom Grenzkreis getroffenen Winkel nothwendig concav.

Es fragt sich noch, bis zu welchen Werthen die convexen Winkel A und B anwachsen können, ohne dass das Viereck reducirbar wird. Wir erhalten nach dem Vorstehenden alle bezüglichen Vierecke, wenn wir das Zweieck AB so verändern, dass wir seinen Winkel vergrössern. Man sieht leicht, dass diese Vergrösserung zulässig ist, bis der Kreis AB in das Complement des Grenzkreises übergeht; bei weiterem Wachsen des Zweiecks wird das Viereck durch Abtrennung der durch AB bestimmten Kreisscheibe reducirbar. Mit Rücksicht auf die Schlussbemerkung von § 4 erhalten wir daher als Winkelrelation

$$4)\quad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad 0 \leqq \delta \leqq 1, \quad 1 \leqq \alpha < 2 + \delta < 3,$$
$$1 \leqq \beta < 2 + \gamma < 3.$$

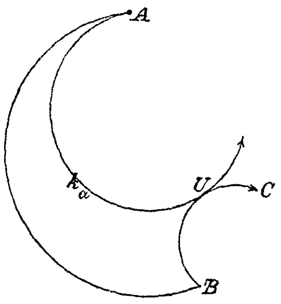

Fig. 12.

Es ist schliesslich noch zu untersuchen, ob es Vierecke ohne umlaufende Seiten giebt, die nicht in zwei Dreiecke zerfallen, und nur *einen* convexen Winkel an jeder Seite enthalten. Wir nehmen an, es sei (Fig. 12) in dem Viereck $ABCD$ A convex, so dass nothwendig B concav ist. Jetzt fassen wir die in A berührenden Kreise und ihren Grenzkreis k_a in's Auge. Diese Kreise endigen zunächst in einem Punkte der

Seite BC, nahe bei B. Der Grenzkreis k_a kann kein Diagonalkreis AD sein, da sonst D convex wäre, was ausgeschlossen ist. Er ist also Tangentialkreis und berührt daher entweder CD oder BC. Berührt er CD in T, so liegt der eben erörterte Fall vor, es ist (Fig. 11) nothwendig der Winkel D concav und $\alpha < 2 + \delta$; ferner existirt ein Dreieck TBC, das einen concaven Winkel B und in T einen Winkel Null enthält, also ist nach § 4 Schluss $\gamma < 1 + \beta < 2$; die Winkelrelationen stimmen daher mit denen der oben abgeleiteten Typen 1), 2), 3) überein.

Berührt der Grenzkreis k_a die Seite BC, so sei U der Berührungspunkt. Wir denken uns AU als Theilungslinie; sie zerlegt das Viereck in ein Dreieck ABU und ein Viereck $AUCD$ ohne umlaufende Seiten, in dem jetzt die an der Seite AU liegenden Winkel beide convex sind. Es folgt daher aus den obenstehenden Erörterungen sofort, dass dieses Viereck immer auf ein solches reducirt werden kann, in dem die Winkel C und D beide concav sind. Als Grenze für A ergiebt sich $\alpha < 2 + \delta$, es ordnen sich daher auch die hier gefundenen Vierecke bezüglich der Winkelrelationen unter die früher gefundenen unter.

Als Resultat können wir den folgenden Satz aussprechen:

Jedes Viereck ohne umlaufende Seiten kann aus einem reducirten Viereck durch Anhängung von Kreisscheiben erzeugt werden. Die reducirten Vierecke zerfallen rücksichtlich der Winkelrelationen in die oben angegebenen vier Typen.

§ 7.

Vierecke mit umlaufenden Seiten.

Es sei $ABCD$ ein Viereck, in dem die Seite AB umlaufend ist. Der Grenzkreis k_a ist entweder Diagonalkreis oder Tangentialkreis. Ist er eigentlicher Diagonalkreis, geht er also durch C, so ist $ABCD$ ein Viereck, das durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken entsteht, die längs einer nicht umlaufenden Seite an einander stossen.

Eine derartige Zusammensetzung ist auf folgende Arten möglich. Enthält nur eines der beiden reducirten Dreiecke, z. B. ABC, eine umlaufende Seite AB, so erhalten wir eine der drei Winkelrelationen

$$\left.\begin{array}{llll} 0 \leqq \alpha < 2, & 0 \leqq \beta < 1, & 1 \leqq \gamma < 3, & 0 \leqq \delta < 3 \\ 0 \leqq \alpha < 4, & 0 \leqq \beta < 1, & 1 \leqq \gamma < 3, & 0 \leqq \delta < 1 \\ 0 \leqq \alpha < 2, & 0 \leqq \beta < 1, & 1 \leqq \gamma < 5, & 0 \leqq \delta < 1 \end{array}\right\}.$$

Uebrigens sind diese Vierecke, die durch Zusammensetzung von zwei reducirten Dreiecken entstehen, keineswegs immer selber reducirt (Vgl. § 8).

Zwei reducirte Dreiecke, von denen jedes eine umlaufende Seite enthält, können entweder so zusammengesetzt werden, dass die umlaufenden Seiten nebeneinander liegen oder so, dass sie gegenüber liegen. In beiden Fällen gelangen wir zu Vierecken, die nicht immer reducirt sind (vgl. § 8). Die Winkelrelationen sind

$$0 \leqq \alpha < 2; \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1, \quad 2 \leqq \gamma < 2 + \alpha + \beta + \delta$$

und

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 1 \leqq \beta < 3, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 1 \leqq \delta < 3;$$

im ersten Fall sind AB und AD, im zweiten AB und CD die umlaufenden Seiten.

Es bleiben noch die Fälle, in denen k_a kein eigentlicher Diagonalkreis ist, resp. in denen ein derartiger Diagonalkreis auch für keine andere umlaufende Seite existirt. Hier haben wir folgende Möglichkeiten gesondert zu betrachten. Es können erstens k_a und k_b Tangentialkreise sein, es kann einer von ihnen ein Tangentialkreis sein, und es können drittens beide Kreise uneigentliche Diagonalkreise sein.

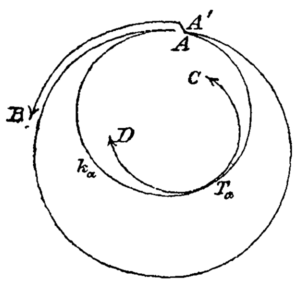

Fig. 13.

Sind beide Kreise k_a und k_b (Fig. 13) Tangentialkreise, so liegt der Kreis $CD =$ ganz innerhalb des Kreises $AB = s$. Sina T_a und T_b die Berührungspunkte von k_a und k_b mit CD, so folgt sofort aus § 4, dass AD und BC nicht umlaufend sind, und dass sich, wenn A und D, resp. B und C beide convex sind, das Viereck durch Abtrennung von Kreisscheiben längs AD resp. BC reduciren lässt.

Die Seite CD kann umlaufend sein, dann lässt sich aber aus dem Viereck im Allgemeinen ein Kreisring ausschalten; dies hört ersichtlich erst dann auf, wenn entweder AB (Fig. 14) und CD beide einfach umlaufend sind und AD und BC sich zwischen s und t kreuzen oder wenn nur eine der beiden Seiten umlaufend bleibt. Dem ersten Fall entspricht *ein reducirtes Viereck mit zwei einfach umlaufenden Gegenseiten*)*.

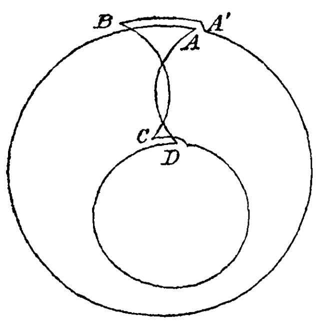

Fig. 14.

Um die Grenzen für die Winkel zu bestimmen, transformiren wir das Viereck so in ein kreisverwandtes, dass der Kreuzungspunkt von AD und BC ins Unendliche fällt. Man erkennt auf diese Weise leicht, dass

*) Dies Viereck lässt sich auf keine Weise in weniger als vier Dreiecke zerlegen (vgl. S. 11).

$$0 \leqq \alpha + \beta < 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \gamma + \delta < 1$$

die bezüglichen Winkelrelationen sind.

Im besondern folgt also, dass es reducirte Vierecke mit zwei umlaufenden Seiten giebt, in denen jeder Winkel den Werth Null hat.

Ist die Seite CD nicht umlaufend, so ist im Viereck $ABCD$ nur AB umlaufend. Alsdann können wir, wie wir bereits wissen, von den Winkeln A und D, B und C mindestens je einen durch Reductionsprocesse concav machen. Sind D und C concav, so können A und B convex sein; wir erhalten ein *reducirtes Viereck mit einfach umlaufender Seite*, dessen Winkel den Relationen

$$0 \leqq \alpha < 1 + \delta, \quad 0 \leqq \beta < 1 + \gamma, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1$$

genügen. Ist von den Winkeln D und C einer, z. B. D convex, aber C concav, so erhalten wir die Relationen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta < 1 + \gamma, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1, \quad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha$$

und wenn schliesslich C und D beide convex sind, so folgt

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 0 \leqq \gamma < 1 + \beta, \quad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha.$$

Ist zweitens der Kreis k_a ein Diagonalkreis, so geht er (Fig. 15) durch D, und da A und D in dem nämlichen Blatt liegen, so kann AD nicht umlaufend sein. Der Winkel D ist convex. Weiter folgt, dass, wenn beide Winkel A und D convex sind, längs AD eine Kreisscheibe abgetrennt werden kann, daher kann man das Viereck so lange reduciren, bis der Winkel A concav geworden ist. Der Winkel D kann an und für sich noch jede beliebige Grösse erhalten. Es ist aber zu bemerken, dass wenn D ein Windungspunkt ist, das Viereck im Allgemeinen durch Ausschaltung einer Kreisscheibe längs einer von D nach AB gehenden Transversalen reducirt werden kann. Wir erhalten im Einzelnen folgende Vierecke:

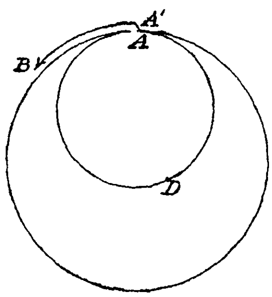

Fig. 15.

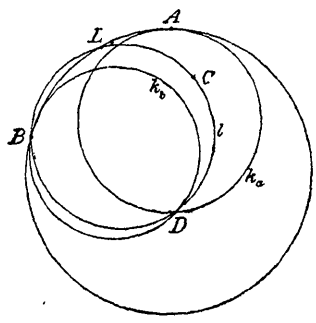

Fig. 16.

Sind zunächst (Fig. 16) k_a und k_b Diagonalkreise, so sind D und C beide convex, A und B concav. Wir beweisen zunächst, dass in diesem

Fall CD nicht umlaufend ist. Ist nämlich CD umlaufend, so kann zunächst der Kreis $CD = u$ nicht innerhalb des Kreises $AB = s$ liegen, da sonst einer der eben betrachteten Fälle vorliegen muss, dass k_a und k_b Tangentialkreise sind. Der Kreis $CD = u$ müsste daher den Kreis $AB = s$ nothwendig schneiden, und dies könnte nur in einem Punkt der Verlängerung von AB über B hinaus geschehen, da eigentliches Schneiden ausgeschlossen ist. Wir können aber auch B mit D durch einen in B berührenden Kreis k*) verbinden, und es liegt C sicher ausserhalb dieses Kreises, da sonst k ein eigentlicher Diagonalkreis wäre; der Kreis k_b schliesst daher den Kreis k vollständig ein. Hieraus folgt, dass der Kreis l, der durch B, C und D geht, bei B zunächst ausserhalb des Kreises s verläuft; er schneidet daher zwischen B und C den Kreis s noch einmal in L. Demnach muss auch jeder Kreis, der durch C und D geht, und nicht ganz innerhalb s liegt, die Seite AB in einem zwischen A und B gelegenen Punkt treffen; und damit ist bewiesen, dass die Seite CD nicht umlaufend ist.

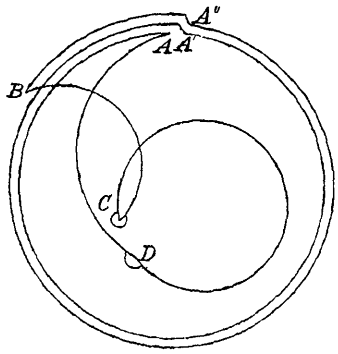

Fig. 17.

Das Viereck ist stets reducirbar, so lange einer der Punkte D resp. C ein Windungspunkt ist. Andrerseits kann die Seite AB, wie man leicht nachweisen kann, und wie überdies Fig. 17 veranschaulicht, zweifach umlaufend werden.

Wir sind somit zu einem *reducirten Viereck mit einer eventuell zweifach umlaufenden Seite* gelangt, dessen Winkel den Relationen genügen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq 1, \quad 1 \leqq \gamma < 2, \quad 1 \leqq \delta \leqq 2.$$

Es bleibt endlich noch der Fall zu erledigen, dass k_b ein Diagonalkreis und k_a ein Tangentialkreis ist. Die Seite CD (Fig. 13, S. 14) verläuft jetzt nothwendig innerhalb des Kreises $AB = s$ und kann daher nicht umlaufend sein. Ist der Punkt C ein Windungspunkt, so lässt sich das Viereck durch Ausschaltung einer Kreisscheibe reduciren. Wir gelangen daher zu einem *reducirten Viereck mit einfach umlaufender Seite*, dessen Winkel den Relationen genügen

$$0 \leqq \alpha \leqq 1, \qquad 0 \leqq \delta < 1 + \alpha, \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 1 \leqq \gamma < 2$$

oder

$$0 \leqq \alpha \leqq 1 + \delta, \quad 0 \leqq \delta < 1, \qquad 0 \leqq \beta < 1, \quad 1 \leqq \gamma < 2.$$

Die hier gefundenen Relationen sind nun aber sämmtlich Specialfälle der Relationen, die wir für die durch Zusammensetzung entstehen-

*) In Fig. 16 ist k_b durch k zu ersetzen.

den Vierecke gefunden haben. Wir gelangen damit zu folgendem Schlussresultat:

Es giebt reducirte Vierecke mit einer und mit zwei einfach umlaufenden Seiten; diese sind entweder anliegend oder gegenüberliegend; überdies giebt es eine Gattung reducirter Vierecke mit einer doppelt umlaufenden Seite. Jedes nicht reducirte Viereck mit umlaufenden Seiten kann aus einem reducirten Viereck — mit oder ohne umlaufende Seiten — durch Erweiterungsprocesse abgeleitet werden.

§ 8.

Die Stellung der reducirten Polygone.

Bereits im Eingang dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, dass wir von den Reductionsprocessen besonders deshalb Gebrauch machen, weil sie ein bequemes Hilfsmittel der Untersuchung darbieten. Es kommt ihnen jedoch insofern eine darüber hinaus gehende geometrische Bedeutung zu, als sie lehren, dass Umlaufszahlen und Windungszahlen immer *zugleich* um zwei Einheiten wachsen.

Betrachten wir z. B. ein Dreieck ABC und ändern, wie in § 3 nur den Winkel C, indem wir A und B constant lassen, so erhalten wir continuirlich alle Dreiecke, von $\gamma = 0$ bis $\gamma < 1 + \alpha + \beta$; und wenn nun γ noch weiter wachsen soll, so treten in A und B gleichzeitig Windungspunkte auf, d. h. es wächst α und β sprungweise um je 2. Ebenso ist ersichtlich, dass wenn wir γ festhalten, und α und β zugleich wachsen lassen, ein Wachsthum von α um 2 nothwendig ein gleichzeitiges Wachsthum von β um 2 bewirkt. Denken wir uns andrerseits, dass, die Seite BC und gleichzeitig der Winkel A eines Dreiecks sich vergrössert, während die übrigen Winkel constant bleiben, so wird, sobald die Seite um einen vollen Umlauf zugenommen hat, sich der Winkel gerade um 2π vergrössert haben. Betrachten wir endlich wieder das Viereck $ABCD$, das wir in § 2 benutzten, um die Einhängung eines Kreisringes zu erläutern, so können wir das Viereck mit den beiden umlaufenden Seiten AB und CD auch dadurch erzeugen, dass wir unter Festhaltung der Winkel die Seiten AB und CD stetig wachsen lassen, bis beide um je einen vollen Umlauf zugenommen haben.

Neben den Polygonen mit umlaufenden Seiten, die wir uns aus den reducirten Polygonen durch Einhängung von Kreisscheiben und Kreisringen erzeugt dachten, sind wir auf Polygone gestossen, die umlaufende Seiten enthalten, und einen Reductionsprocess nicht zulassen. Wir wollen versuchen, ob wir von einem höheren Gesichtspunkte beide Arten von Polygonen einheitlich auffassen können. Man denke sich

z. B. (Fig. 18) ein Viereck $ABCD$. Wir variiren jetzt, indem wir die Eckpunkte festhalten, die Seiten, wie es in § 4 geschehen ist.

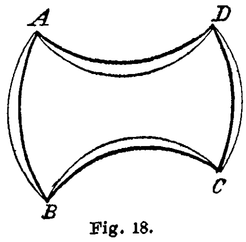

Fig. 18.

Dabei tritt zum Unterschied von den Dreiecken die Thatsache auf, dass wenn die Winkel A, B und C constant bleiben, auch der vierte Winkel seinen Werth behält*). Diese Variation können wir fortsetzen, bis die ins Innere hinein sich ausbreitenden Bogen AD und BC zusammentreffen, und über einander hinweggehen. Alsdann stellen die vier einfachen Kreisbogen AB, BC, CD, DA nicht mehr ein einfach zusammenhängendes Viereck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vor; wir erhalten eine einfach zusammenhängende Fläche mit den gegebenen Winkeln nur so, indem wir analog wie in § 3 beim Dreieck ABC, in zwei benachbarten Punkten, z. B. A und D Windungspunkte annehmen oder indem wir die Seiten AB und CD als einfach umlaufende Seiten betrachten. Wann das eine und das andere zutrifft, hängt davon ab, ob die Kreise AB und CD einander einschliessen oder nicht. Das zuletzt erhaltene Viereck ist dasjenige, das wir in § 7 als reducirtes Viereck abgeleitet haben. Wir können aber auch diese Vierecke in gewissem Sinn als reducirbar betrachten, wenn wir *Vierecke mit negativen Flächentheilen* zulassen**); rechnen wir das zwischen den beiden Seiten AD und BC liegende Stück negativ, so entsteht aus dem so bestimmten Viereck $ABCD$ dasjenige, das in A und D Windungspunkte hat, durch Einhängung einer Vollebene längs AD, das andere dagegen durch Einhängung eines Kreisringes. Umgekehrt sind diese Vierecke jetzt reducirbar und gestatten die Ausschaltung einer Vollebene, resp. eines Kreisringes, wodurch sie in die Vierecke übergehen, die Fig. 19 und 20 darstellen.

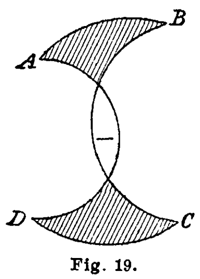

Fig. 19.

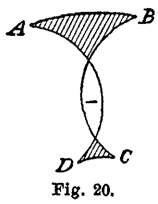

Fig. 20.

Analog können wir die reducirten Dreiecke mit umlaufender Seite deuten; auch sie werden reducirbar, wenn wir Dreiecke mit negativen

*) Dies gilt allgemein für Polygone von gerader Seitenzahl.

**) Diese naheliegende Begriffsbestimmung findet sich in analoger Form bei Herrn Poincaré; vgl. Acta math. Bd. 1, S. 18.

Flächentheilen zulassen. So entsteht aus dem Dreieck der Fig. 21, indem wir das zwischen den Kreisbogen liegende Gebiet als negativ

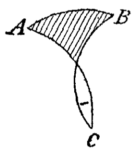

Fig. 21.

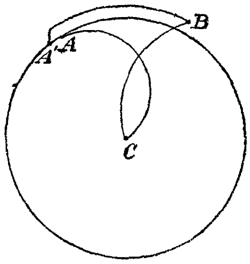

Fig. 22.

betrachten, das Dreieck der Fig. 22 durch Einschaltung einer Kreisscheibe und umgekehrt, und wir können daher in diesem Sinne alle Dreiecke mit umlaufenden Seiten als reducirbar betrachten.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesem Dreieck und einem andern reducirten Dreieck ohne umlaufende Seite ist allerdings vorhanden. In einem gewöhnlichen reducirten Dreieck ohne umlaufende Seiten kann *jede* Seite durch Einschaltung von Kreisscheiben umlaufend gemacht werden; in einem Dreieck mit negativen Flächentheilen ist dies jedoch nur für diejenige Seite der Fall, die dem negativen Winkel gegenüberliegt; für die andern sind die allgemeinen morphologischen Bedingungen, die hierfür nöthig sind, nicht erfüllt. Um dies zu ermitteln, hat man natürlich das Dreieck zunächst in ein Dreieck mit durchaus positivem Gebiet zu verwandeln.

Aehnliche Verhältnisse liegen nun bei allen reducirten Vierecken vor, die umlaufende Seiten enthalten. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die in § 7 abgeleiteten Vierecke mit umlaufenden Seiten, die sich durch Zusammensetzung von zwei Dreiecken ergeben, nicht immer reducirt sind. Sie werden sogar bei beliebiger Zeichnung im Allgemeinen reducirbar ausfallen; will man ein reducirtes Viereck erhalten, so bedarf es bereits besonderer Aufmerksamkeit, und durch stetige Variation der Seiten gehen, wie oben, auch diese Vierecke wieder in reducirbare über. In Folge dessen empfiehlt es sich auch hier, diese Vierecke durch Vierecke ohne umlaufende Seiten, und mit negativen Gebietstheilen zu ersetzen.

Wir können von dieser Auffassung noch nach einer anderen Richtung Nutzen ziehen. Wir wollen zeigen, wie sich im Anschluss hieran die in § 7 abgeleiteten reducirten Vierecke mit umlaufenden Seiten durch eine sehr einfache Ueberlegung ergeben. In einem beliebigen Viereck $ABCD$ können wir — wir setzen die morphologischen Bedingungen als erfüllt voraus — folgende Einschaltungsprocesse vornehmen. Wir können einerseits Transversalen ziehen, die von C oder von C und D nach AB laufen und längs derselben Kreisscheiben einschalten, alsdann sind andere Transversalen morphologisch ausgeschlossen. Wir können zweitens zwei Transversalen nach zwei verschiedenen Seiten ziehen; wir können einerseits AB und BC mit D verbinden, andrerseits AB mit C oder D und CD mit A oder B, und wiederum Einhängungen von Kreisscheiben vornehmen; ist dies geschehen, so sind wiederum weitere Transversalen unzulässig. Endlich können wir auch zwischen AB und CD einen Kreisring einschalten; und es sind auch damit weitere Einschaltungsprocesse unmöglich gemacht. Dies sind aber dieselben Möglichkeiten für die Seitenumläufe, der reducirten Vierecke, die wir in § 7 abgeleitet haben; und in der That ist ersichtlich, dass sich die in § 7 beschriebenen Polygontypen ergeben, wenn wir die Gestalt des Viereckes $ABCD$ unter Festhaltung der Winkel so variiren, dass es negative Flächentheile erhält, so dass erst durch die genannten Einschaltungsprocesse ein Viereck mit durchaus positivem Gebiet entsteht. *Jedem dieser Einschaltungsprocesse entspricht daher einer der in § 7 abgeleiteten Viereckstypen mit umlaufenden Seiten; man kann daher die bezüglichen Vierecke ohne Weiteres aufstellen, wenn die bezüglichen Einschaltungsprocesse bekannt sind.* Wann diese Einschaltungsprocesse morphologisch möglich sind, hängt einerseits von den Winkeln, andrerseits von der Lage der nämlichen Hilfskreise ein Viereck ab, die wir oben als Grenzkreise bezeichnet haben.

In dieser Hinsicht sind alsdann die Resultate des § 7 in dem Sinne zu deuten, dass gerade sie uns die Bedingungen liefern, die für die morphologische Zulässigkeit der Einschaltungstransversalen bestehen.

Es ist klar, dass diese Bemerkungen für beliebige Kreisbogenpolygone Geltung behalten und damit eine Methode liefern, die für die Aufstellung aller reducirten Polygontypen angewandt werden kann.

Göttingen, Anfang August 1893.