Про одну задачу Сакса

Олександр Єременко

Задача (Станіслав Сакс, 8 лютого, 1940. Приз: 1 кіло бекону).

Нехай субгармонічна функція ϕ має всюди часткові похідні $\partial^2\phi/\partial x^2$, $\partial^2\phi/\partial y^2$. Чи випливає звідси що $\Delta\phi \geq 0$?

Зауваження: очевидно що $\Delta\phi \geq 0$ в усіх точках неперервності $\partial^2\phi/\partial x^2$, $\partial^2\phi/\partial y^2$, отже на всюди щільнії множині.

Теорема. Нехай u - субгармонічна функція в площині і припустимо що перші часткові похідні $u_x(x,0)$ і $u_y(0,y)$ існують на осях, а другі похідні $u_{xx}(0,0)$, $u_{yy}(0,0)$ існують в точці $(0,0)$. Тоді

$$u_{xx}(0,0) + u_{yy}(0,0) \geq 0.$$

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що

$$u_{xx}(0,0) + u_{yy}(0,0) < 0. \qquad (1)$$

Тоді можна додати гармонічний поліном так щоби $u(0,0)$ і обидві перші похідні в початку координат стали нулями а другі похідні стали від'ємними:

$$v(x,y) := u(x,y) + a + bx + cy + d(x^2 - y^2),$$

$$v(0,0) = 0, \quad v_x(0,0) = 0, \quad v_y(0,0) = 0, \quad v_{xx}(0,0) < 0, \quad v_{yy}(0,0) < 0.$$

З означення похідних випливає що

$$v(x,0) \leq -kx^2, \quad v(0,y) \leq -ky^2 \qquad (2)$$

для досить малих x, y і деякого $k < 0$. Використовуючи полярні і комплексні координати

$$z = x + iy, \quad r = |z|, \quad \theta = \arg z,$$

порівняємо v з гармонічною функцією $Cr^2|\sin 2\theta|$, де C – досить велика додатня стала, так щоби $v(x,y) \leq Cr^2|\sin 2\theta|$ на колі $r = \epsilon$, для деякого $\epsilon > 0$. Тоді з принципу максимума випливає що

$$v(x,y) \leq Cr^2, \quad |z| \leq \epsilon. \qquad (3)$$

Розглянемо сімейство субгармоічних функцій

$$v_r(z) := r^{-2}v(rz), \quad |z| < \epsilon/r.$$

Коли r прямує до 0, ці функції визначені у все більших і більших кругах які вичерпують площину. З (3) випливає що коли $r \to 0$, сімейство v_r обмежене зверху на кожному компакті в площині. Осільки $v_r(0) = 0$, то можна вибрати послідовність v_{r_n}, $r_n \to 0$ цих функцій яка збігається в топологіі Шварца D' в усій площині до деякої субгармонічної функції v_0. За відомою теоремою, збіжність також відбуваєтся в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ і в $L^1_{\mathrm{loc}}(i\mathbf{R})$. З нерівностей (2) і (3) одержуємо для граничної функції

$$v_0(z) \leq C|z|^2, \quad z \in \mathbf{C}; \qquad v_0(z) \leq -k|z|^2, \quad z \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}.$$

Але це суперечить теоремі Фрагмена і Ліндельофа, що доводить Теорему.