



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y
GEOFÍSICAS

TESIS DE GRADO

Resolución numérica de la ecuación acústica con
Elementos Finitos Galerkin Discontinuos

GABRIEL ALEJANDRO CASTROMÁN

Director:

DR. FABIO I. ZYSERMAN

Codirector:

DRA. PATRICIA M. GAUZELLINO

2013

ÍNDICE GENERAL

Resumen	2
1. La ecuación de onda acústica en medios elásticos	3
1.1. Breve revisión de la Teoría de la Elasticidad	3
1.2. Condiciones de borde y condiciones iniciales	9
1.3. Modelo de deslizamiento lineal para la representación de una fractura . .	9
2. El método de Elementos Finitos Galerkin Discontinuo	12
2.1. El método de Elementos Finitos	12
2.2. El método Galerkin Discontinuo	13
2.3. Formulación débil del problema de borde absorbente con el método Galerkin Discontinuo	14
2.4. Formulación débil del problema de Dirichlet nulo con el método Galerkin Discontinuo	19
2.5. Los métodos IIPG, SIPG y NIPG	20
3. Implementación del método	21
3.1. Desarrollo del sistema lineal para el problema de borde absorbente	21
3.2. Cálculo de la matriz global	23
3.3. Desarrollo del sistema lineal para el problema de borde de Dirichlet nulo	30
4. Simulación numérica de ejemplos de interés	32
4.1. Implementación del algoritmo numérico	32
4.2. Solución analítica para un medio homogéneo	37
4.3. Ejemplos numéricos	39
5. Conclusiones	49
Bibliografía	50

ÍNDICE DE FIGURAS

4.1. Ondícula de Ricker de $30Hz$ de frecuencia dominante y $33ms$ de retraso temporal. . .	34
4.2. Espectro de amplitud $ \hat{f}_R(x, f) $ de la ondícula de Ricker de $30Hz$ de frecuencia dominante y $33ms$ de retraso temporal.	37
4.3. Traza correspondiente al problema de Dirichlet nulo (rojo) y solución analítica (azul).	40
4.4. Espectro de amplitud $ \hat{u}(x_{rec}, f) $ de la traza resultado de la simulación para el problema de Dirichlet nulo.	41
4.5. Solución numérica correspondiente al problema de borde absorbente (rojo) y solución analítica (azul).	41
4.6. Trazas obtenidas para $n_{pwl} = 8, 12, 16, 20$ y una penalidad $\sigma = 1000$, y solución analítica.	42
4.7. Trazas obtenidas para $n_{pwl} = 8, 12, 16, 20$ y una penalidad $\sigma = 1000k$, y solución analítica.	43
4.8. Trazas obtenidas para $\sigma = 1000, k, 1000k$ y solución analítica.	44
4.9. Trazas obtenidas para $\epsilon = -1$ (SIPG), $\epsilon = 0$ (IIPG) y $\epsilon = 1$ (NIPG), con penalidad $\sigma = 1000$; y solución analítica.	45
4.10. Trazas obtenidas para $\epsilon = -1$ (SIPG), $\epsilon = 0$ (IIPG) y $\epsilon = 1$ (NIPG), con penalidad $\sigma = 1000k$; y solución analítica.	45
4.11. Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 850m$	46
4.12. Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 1200m$ para una fuente de $f_p = 30Hz$	47
4.13. Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 1200m$ para una fuente de $f_p = 15Hz$	48
4.14. Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 1200m$ para una fuente de $f_p = 45Hz$	48

RESUMEN

Las ondas sísmicas que se propagan en el interior terrestre aportan información valiosa sobre las propiedades mecánicas y físicas del mismo. Su estudio y análisis permite inferir las estructuras presentes en el subsuelo, así como los distintos tipos de roca que lo componen y la presencia de fluidos. Es por lo tanto, un tema de profundo interés en el ambiente académico y con numerosas aplicaciones en la industria del petróleo y la ingeniería.

La simulación numérica es una herramienta de gran utilidad en este estudio. La resolución de la ecuación de onda de forma numérica permite predecir el comportamiento de las ondas sísmicas en su propagación a través de medios heterogéneos de gran complejidad como lo es el subsuelo terrestre, si se cuenta con modelos apropiados para el mismo. Es por este motivo que se busca desarrollar métodos numéricos que permitan obtener soluciones estables y de gran precisión para estos problemas.

A raíz de esta motivación se plantea el objetivo global propuesto para esta Tesis. El mismo consiste en el análisis e implementación computacional del método numérico Elementos Finitos Galerkin Discontinuo para la construcción de una solución aproximada a la ecuación de onda acústica unidimensional. La elección de este método radica en su eventual capacidad para poder simular la presencia de fracturas en el subsuelo de forma natural, en lugar de utilizar medios equivalentes para su representación. Este tópico es de gran relevancia en la actualidad dada la importancia del desarrollo de los reservorios no convencionales en la industria del petróleo, los cuales están fuertemente vinculados a medios fracturados.

El trabajo se completa con la validación del método, un análisis paramétrico del mismo y el estudio de la respuesta obtenida al implementar el modelo de medio fracturado. Los resultados obtenidos en la mayoría de los casos son muy satisfactorios y alientan a continuar profundizando la línea de trabajo iniciada considerando el modelado bi- y tri-dimensional.

CAPÍTULO 1

LA ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA EN MEDIOS ELÁSTICOS

Este capítulo tiene como objetivo plantear la ecuación que describe la propagación de ondas sísmicas en medios elásticos heterogéneos para el caso unidimensional. Comenzaremos con un repaso de los conceptos básicos de la teoría de la elasticidad [Landau y Lifschitz, 1974]. Luego, desarrollando estos conceptos en la ecuación de movimiento de una partícula del medio, obtendremos la ecuación acústica sobre el campo de los desplazamientos en los dominios espacio-tiempo y espacio-frecuencia. Esta última será la ecuación a resolver con el método Galerkin Discontinuo, y para ello se propondrán dos tipos de condiciones de borde: Dirichlet nulas y absorbentes. Por último, se introducirá el modelo de deslizamiento lineal, que representará la presencia de una fractura en el medio elástico.

1.1. Breve revisión de la Teoría de la Elasticidad

Aproximación de medio continuo, cuerpo deformable y vector desplazamiento.

Para describir el fenómeno de propagación de ondas sísmicas en el interior de la Tierra, es necesario en principio asumir la simplificación de que el subsuelo terrestre se comporta como un medio continuo para poder aplicar en él las ecuaciones de la mecánica.

Un medio continuo es la idealización de un material en donde las partículas que lo componen se encuentran muy próximas entre sí y por lo tanto, la distancia entre ellas puede asumirse infinitesimalmente pequeña. De esta forma, la densidad y las propiedades mecánicas del medio pueden ser consideradas como funciones continuas y diferenciables de las coordenadas espaciales y del tiempo. En esta idealización, la estructura atómica o molecular del material no es tenida en cuenta. Cada partícula o elemento de volumen contiene un gran número de moléculas, despreciándose las interacciones entre ellas a escala microscópica[Udías, 1999].

Dentro de los medios continuos, se define un cuerpo sólido deformable como aquel en

el cual la distancia entre las partículas que lo componen puede variar bajo la acción de fuerzas externas aplicadas al cuerpo o por cambios en las condiciones internas del mismo; por lo tanto puede cambiar su forma y su volumen. Si esto sucede, se dice entonces que el cuerpo sufre una *deformación*. Para analizar este fenómeno tomemos un sistema de coordenadas cartesiano cuyo origen sea arbitrario. La ubicación de una partícula del cuerpo en el espacio queda definida por un radio vector cuyas componentes son las coordenadas del punto geométrico (x_1, x_2, x_3) que ocupa dicha partícula en el sistema antes descripto. Llamamos a este vector, el vector posición \vec{r} :

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.1)$$

Consideremos ahora un elemento de volumen del cuerpo cuya posición sea \vec{r} . Luego de la deformación, dicho elemento cambiará su ubicación en el espacio y pasará a ocupar la posición $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, es decir, se verá desplazado. Definimos entonces el vector *desplazamiento* \vec{u} de la siguiente forma:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (1.2)$$

donde cada componente del mismo vendrá dada por $u_i = x'_i - x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Debido a que la posición \vec{r}' depende de las coordenadas del elemento antes de la deformación, el vector desplazamiento será también función de estas coordenadas y cada una de sus componentes será de la forma:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.3)$$

definiendo de esta forma el campo de desplazamientos en todo punto del cuerpo.

El tensor de las deformaciones. Recordando la definición de sólido deformable, la distancia entre elementos del cuerpo puede cambiar luego de la deformación. Tomemos dos elementos de volumen cercanos que antes de la deformación se encuentren separados una distancia $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$, donde dx_i es la diferencia entre las coordenadas de ambos. Después de la deformación, dichos elementos se verán desplazados de forma diferencial dependiendo de su posición original, y la distancia entre ellos pasará a ser $dl' = \sqrt{(dx'_1)^2 + (dx'_2)^2 + (dx'_3)^2}$. Se puede demostrar [Landau y Lifschitz, 1974] que, valiendo la notación de Einstein:

$$(dl')^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.4)$$

donde ε_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, es una magnitud tensorial que se denomina *tensor de deformaciones*. Este tensor da cuenta de la variación relativa de las longitudes en cada punto del cuerpo y por lo tanto, caracteriza su estado de deformación. Si consideramos que los desplazamientos son pequeños, el tensor de deformaciones toma la forma [Landau y Lifschitz, 1974]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

El tensor de las tensiones. En su estado original sin deformar, el cuerpo se encuentra en equilibrio térmico y mecánico y la disposición de las moléculas en el mismo es tal que, sobre cada elemento de volumen, la fuerza neta resultante producto de la interacción con los demás elementos es nula. Pero, luego de la deformación, esta disposición molecular cambia y aparecen fuerzas que intentan restituir al cuerpo a su estado de equilibrio. Estas fuerzas tienen su origen en la interacción entre las moléculas y por lo tanto son de corto alcance, ya que su magnitud es considerable sólo a distancias del orden del espaciamiento intermolecular. Como el estudio de los medios continuos no tiene en cuenta interacciones a tan pequeña escala, se considera que estas fuerzas sólo actúan sobre la superficie de separación entre las distintas partes del sólido. Se denomina a estas fuerzas, *fuerzas internas*.

Consideremos ahora un volumen cerrado Ω del cuerpo y llamemos \vec{F} a la fuerza interna por unidad de volumen. La fuerza interna neta que se ejerce sobre Ω será la sumatoria de las fuerzas internas aplicadas a cada uno de los elementos de volumen dV que lo componen:

$$\iiint_{\Omega} \vec{F} dV. \quad (1.6)$$

El par de fuerzas internas entre elementos adyacentes se cancela por el principio de acción y reacción, quedando de esta sumatoria sólo la contribución de la porción del cuerpo que rodea al volumen considerado. Esta fuerza interna neta, como vimos anteriormente, se aplica solamente sobre la superficie que envuelve a Ω . Llamemos a esta superficie S , donde $S = \partial\Omega$. Entonces cada componente de la fuerza interna neta, en lugar de escribirse como una integral de volumen sobre Ω , puede expresarse de forma equivalente como una integral sobre la superficie cerrada S . Para ello, cada componente de la fuerza interna por unidad de volumen debe escribirse como la divergencia de una magnitud tensorial de segundo rango de la siguiente forma [Landau y Lifschitz, 1974]:

$$F_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.7)$$

donde τ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, se conoce como el *tensor de tensiones*. Cada una de sus componentes representan el valor de la componente i -ésima de la fuerza interna por unidad de área perpendicular a la dirección x_j y por lo tanto, son denominadas *tensiones internas*. Las componentes de la fuerza neta quedan entonces:

$$\iiint_{\Omega} F_i dV = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_S \tau_{ij} ds_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.8)$$

donde ds_j es la j -ésima componente del vector elemento de superficie, dirigido según la normal exterior a la superficie.

Relaciones constitutivas. Para estudiar el campo de desplazamientos en un medio continuo, es necesario caracterizar dicho medio a partir de una relación entre las deformaciones que se producen en él y las tensiones internas que aparecen producto de dicha deformación. Esta relación se denomina *relación constitutiva*. Para determinarla, es preciso establecer ciertas características del medio en cuestión.

Si un cuerpo es deformado al aplicarse una fuerza externa sobre él, pero al desaparecer dicha fuerza recobra de forma inmediata su forma original, se define a este cuerpo como un *cuerpo elástico*. En los cuerpos elásticos, el estado de tensiones internas en un punto para un instante dado es función únicamente del punto considerado y del estado de deformaciones allí en ese instante, es decir, no depende de la historia de deformaciones del cuerpo. Si además esta relación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones es lineal, se denomina al comportamiento del cuerpo como *linealmente elástico*, y se representa matemáticamente mediante la *ley de Hooke generalizada* [Udías, 1999]:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3;$$

donde C_{ijkl} es una magnitud tensorial de cuarto rango y se conoce como *tensor de los parámetros elásticos*. Este tensor representa las propiedades elásticas del medio que ante el estado de deformaciones ε_{kl} generan el estado de tensiones τ_{ij} y sus valores dependen del punto del cuerpo considerado. Dadas las simetrías de ambos tensores y considerando además que el medio es isótropo (no presenta variaciones de sus propiedades con la dirección en la cual son consideradas), la ley de Hooke queda simplificada de la siguiente forma [Udías, 1999]:

$$\tau_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.9)$$

donde λ y μ son llamados *coeficientes de Lamé* y dependen del punto del cuerpo, δ_{ij} es la delta de Kronecker y θ es la traza del tensor de las deformaciones, que representa la

variación relativa de volumen del cuerpo antes y después de la deformación. Esta ecuación es la relación constitutiva para medios elásticos heterogeneos e isótropos en el rango de elasticidad lineal.

Ecuación de movimiento. La deformación de un cuerpo elástico puede producirse por la acción de fuerzas externas aplicadas a todos los puntos del cuerpo, llamadas fuerzas volumétricas externas, o por cambios en las condiciones termodinámicas internas del mismo. Este último efecto puede despreciarse si el tiempo en el que se produce la deformación es lo suficientemente pequeño como para que no haya cambios en la temperatura del cuerpo y el proceso pueda aproximarse a un proceso adiabático. Suponiendo que se cumple esta condición, llamemos \vec{f} a la densidad de fuerza volumétrica externa (fuerza volumétrica externa por unidad de volumen). Recordando la expresión volumétrica equivalente para las componentes de las fuerzas internas dada por (1.7), las componentes de la sumatoria de todas las fuerzas actuantes en el proceso de deformación serán:

$$f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

Si el cuerpo no se encuentra en equilibrio, el vector desplazamiento además de ser función de las coordenadas espaciales será función del tiempo. La aceleración de un elemento de volumen del cuerpo durante la deformación estará dada por:

$$a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

con lo cual la ecuación de movimiento (por unidad de volumen) para dicho elemento vendrá dada por:

$$f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

donde ρ es la densidad de masa del cuerpo, que supondremos es función únicamente de la posición. A partir de la ley de Hooke (1.9) y la expresión para el tensor de las deformaciones dada por la ecuación (1.5), puede escribirse τ_{ij} en función de los desplazamientos u_i , quedando entonces la ecuación de movimiento como:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.11)$$

Supongamos que los vectores \vec{u} y \vec{f} poseen componentes únicamente en la dirección $x_1 = x$. Llamemos a estas componentes $u_1 = u$, $f_1 = f$. Supongamos además que, así como la

densidad y los parámetros de Lamé, dependen espacialmente sólo de dicha coordenada. En virtud de estas consideraciones, obtendremos una única ecuación de la forma:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\lambda(x) + 2\mu(x) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = f(x, t), \quad (1.12)$$

que corresponde a una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden sobre el campo de desplazamientos $u(x, t)$, que se conoce con el nombre de ecuación de onda unidimensional o ecuación acústica. Esto nos indica que ante la acción de una fuerza volumétrica externa, los desplazamientos se propagarán a través del cuerpo como ondas, conocidas como *ondas sísmicas*. En el caso particular unidimensional, donde los desplazamientos se dan en la dirección de propagación de la onda, esta última recibe el nombre de *onda longitudinal* u *onda de presión* y su velocidad de propagación v_l , viene dada por:

$$v_l = \sqrt{\frac{\lambda(x) + 2\mu(x)}{\rho(x)}} = \sqrt{\frac{k(x)}{\rho(x)}}, \quad (1.13)$$

donde $k(x) = \lambda(x) + 2\mu(x)$ se conoce como el módulo de onda longitudinal.

Si conocemos la densidad y las propiedades elásticas del medio, y conocemos además la forma de la fuente (la fuerza volumétrica externa aplicada), podremos resolver esta ecuación de forma numérica y así obtener el campo de desplazamientos y su evolución temporal.

Ecuación de onda unidimensional en el dominio espacio-frecuencia. El análisis de Fourier establece que cualquier función puede representarse como una superposición de funciones armónicas de una única frecuencia angular ω . Si llamamos $\hat{u}(x, \omega)$ y $\hat{f}(x, \omega)$ a las transformadas de Fourier de los desplazamientos $u(x, t)$ y la fuente $f(x, t)$ respectivamente, podremos escribir:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.14a)$$

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.14b)$$

Reemplazando estas expresiones en (1.12) e introduciendo la notación primada para referirnos a las derivadas espaciales, obtenemos para cada frecuencia ω la siguiente ecuación:

$$-\omega^2 \rho(x) \hat{u}(x, \omega) - (k(x) \hat{u}'(x, \omega))' = \hat{f}(x, \omega), \quad (1.15)$$

que es la ecuación de onda acústica unidimensional en el dominio espacio-frecuencia. Resolviendo esta ecuación para cada frecuencia ω obtendremos el campo de desplazamientos a través de la integral de Fourier (1.14a).

1.2. Condiciones de borde y condiciones iniciales

La ecuación de onda acústica unidimensional como fue planteada en la sección anterior posee infinitas soluciones. Para obtener una solución única deben establecerse *condiciones iniciales* e imponerse restricciones a dicha solución en la frontera del dominio espacial acotado $\Omega = [a, b]$ que representará al medio elástico, conocidas como *condiciones de borde*. En esta Tesis se resolverá la ecuación antes mencionada considerando condiciones iniciales nulas, y dos tipos de condiciones de borde distintas: condiciones de borde de Dirichlet nulas y condiciones de borde absorbente.

Condiciones de borde de Dirichlet nulas. Estas condiciones se obtienen anulando el valor de la solución en los bordes a y b :

$$\begin{cases} \hat{u}(x, \omega) = 0, & x = a, & \omega > 0, \\ \hat{u}(x, \omega) = 0, & x = b, & \omega > 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Condiciones de borde absorbente. Estas condiciones se obtienen imponiendo a los bordes del dominio que sean transparentes para la incidencia de ondas normales a los mismos. Adaptando la ecuación propuesta en [Gauzellino et al., 2001] al caso unidimensional obtenemos las siguientes condiciones de borde en el dominio espacio-frecuencia:

$$\begin{cases} k(x)\hat{u}(x, \omega) = i\omega(k(x)\rho(x))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x, \omega), & x = a, & \omega > 0, \\ -k(x)\hat{u}(x, \omega) = i\omega(k(x)\rho(x))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x, \omega), & x = b, & \omega > 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

1.3. Modelo de deslizamiento lineal para la representación de una fractura

En un medio elástico homogéneo, la densidad y las propiedades elásticas serán constantes y en todo punto del mismo los desplazamientos y las tensiones serán continuos. En los medios elásticos heterogéneos, en cambio, la densidad y el módulo de onda longitudinal dependerán del punto donde se los considere, pero conservando la hipótesis de continuidad de las tensiones y desplazamientos, incluso en las interfaces que separen dos porciones del mismo de distintas características.

Cuando existe una fractura en el medio elástico, estas condiciones no se satisfacen de manera completa. En efecto, mientras las tensiones se mantienen continuas, los des-

plazamientos dejan de serlo. De esta forma, podemos definir el *deslizamiento* como la diferencia entre los valores del desplazamiento a uno y otro lado de la fractura de la siguiente manera:

$$[\hat{u}(x_\gamma, \omega)] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\hat{u}(x_\gamma - \delta, \omega) - \hat{u}(x_\gamma + \delta, \omega) \right), \quad (1.18)$$

donde x_γ corresponde a la posición de dicha fractura en el medio. Si suponemos una relación lineal entre el deslizamiento y el valor de la tensión en la fractura, obtenemos un modelo conocido como *modelo de deslizamiento lineal* [Schoenberg, 1980], que establece como condición en el caso particular unidimensional:

$$[\hat{u}(x_\gamma, \omega)] = -Zk(x_\gamma)\hat{u}'(x_\gamma, \omega), \quad (1.19)$$

donde Z es un parámetro que caracteriza a la fractura, y lo denominaremos coeficiente de elasticidad normal. Este modelo fue validado experimentalmente por [Hsu y Schoenberg, 1993].

Estamos en condiciones ahora de formular los problemas de borde de Dirichlet nulo y de borde absorbente a ser resueltos en esta Tesis, incluyendo la presencia de fracturas dentro del medio elástico.

Problema de Dirichlet nulo. Dado un medio elástico con una fractura representado por el dominio $\Omega = [a, b]$, y dado x_γ el punto correspondiente a la fractura en el mismo; encontrar el campo de desplazamientos $\hat{u}(x, \omega)$, $\omega > 0$, continuo en $\Omega_\gamma = \Omega/\{x_\gamma\}$ tal que:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho(x) \hat{u}(x, \omega) - (k(x) \hat{u}'(x, \omega))' &= \hat{f}(x, \omega) & x \in \Omega_\gamma, \\ [\hat{u}(x, \omega)] &= -Zk(x) \hat{u}'(x, \omega), & x = x_\gamma, \\ \hat{u}(x, \omega) &= 0, & x = a, \\ \hat{u}(x, \omega) &= 0, & x = b; \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde las tensiones $k(x) \hat{u}'(x, \omega)$ son continuas en todo el dominio Ω .

Problema de borde absorbente. Dado un medio elástico con una fractura representado por el dominio $\Omega = [a, b]$, y dado x_γ el punto correspondiente a la fractura en el mismo; encontrar el campo de desplazamientos $\hat{u}(x, \omega)$, $\omega > 0$, continuo en $\Omega_\gamma = \Omega/\{x_\gamma\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \rho(x) \hat{u}(x, \omega) - (k(x) \hat{u}'(x, \omega))' &= \hat{f}(x, \omega), & x \in \Omega_\gamma, \\
 [\hat{u}(x, \omega)] &= -Z k(x) \hat{u}'(x, \omega), & x = x_\gamma, \\
 k(x) \hat{u}(x, \omega) &= i\omega (k(x) \rho(x))^{\frac{1}{2}} \hat{u}(x, \omega), & x = a, \\
 -k(x) \hat{u}(x, \omega) &= i\omega (k(x) \rho(x))^{\frac{1}{2}} \hat{u}(x, \omega), & x = b;
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde las tensiones $k(x) \hat{u}'(x, \omega)$ son continuas en todo el dominio Ω .

CAPÍTULO 2

EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GALERKIN DISCONTINUO

Los problemas de borde absorbente y Dirichlet nulo planteados en el capítulo anterior serán resueltos de forma numérica mediante el método de Elementos Finitos Galerkin Discontinuo. En este capítulo se hará una introducción general al método de Elementos Finitos y sus ideas básicas, para después desarrollar las particularidades del caso discontinuo. Luego se reformularán los problemas originales de manera tal de obtener una formulación variacional de los mismos que permita la implementación computacional del método antes descrito.

2.1. *El método de Elementos Finitos*

Una gran cantidad de problemas de la física y la ingeniería pueden ser descriptos a través de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de borde apropiadas. El método de Elementos Finitos es una técnica numérica general utilizada para construir soluciones aproximadas a estas ecuaciones.

La idea básica de este método es particionar el dominio donde se desea encontrar la solución en un número finito de subdominios llamados *elementos*, para después, utilizando herramientas del análisis variacional, construir aproximaciones a la solución de la ecuación general en cada uno de ellos. La ventaja que presenta este método, con respecto tanto a los métodos analíticos como a otros métodos numéricos, radica en el buen manejo de geometrías complejas para los dominios donde se realiza el análisis del problema en cuestión y en la fácil implementación de las condiciones de borde en la resolución.

El espacio de funciones al que pertenece la solución exacta del problema es generalmente de dimensión infinita. Por lo tanto, se necesitan infinitos coeficientes para poder expresar de manera unívoca a esta solución como una combinación lineal de los elementos de la base de dicho espacio. Es en base a esta idea que se construye la aproximación con

el método de Elementos Finitos. La solución aproximada se construirá como una combinación lineal de los elementos de la base de un espacio de dimensión finita, subespacio del original. Esta aproximación es conocida como aproximación de Galerkin [Becker et al., 1981].

Al establecer las ecuaciones diferenciales que describen un sistema físico de interés junto con las condiciones de borde correspondientes, se genera una formulación al problema conocida como *forma fuerte*. Generalmente, este tipo de problemas así formulados admiten sólo funciones solución muy suaves, es decir, imponen fuertes restricciones a las mismas. De esta forma se deja de lado una gran cantidad de problemas en Geofísica donde los parámetros de interés presentan variaciones bruscas. Para salvar este inconveniente, debe reformularse el problema de manera tal que requiera de condiciones más débiles sobre la solución y sus derivadas. Se busca entonces expresar el problema de forma integral y con el menor orden posible de derivación. Dicha formulación se conoce como *forma débil* del problema y es a partir de ella que se desarrollará el método.

Al reemplazar la función solución en la forma débil por una combinación lineal de los elementos de la base del espacio finito dimensional, se obtiene una forma débil discreta que podrá ser desarrollada para obtener un sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas sean los coeficientes de dicha combinación. Una vez obtenidos los mismos, se construye la aproximación a la solución buscada.

2.2. El método Galerkin Discontinuo

El método Galerkin discontinuo es una de las múltiples variantes existentes del método de Elementos Finitos anteriormente descripto. Además de contar con las ventajas de los métodos continuos (buen manejo de dominios con geometrías complejas, soluciones aproximadas estables y de gran precisión en cada elemento, entre otras), permite a la solución aproximada global poseer discontinuidades en los bordes entre elementos sin introducir oscilaciones numéricas espurias [Hesthaven y Warburton, 2010]. Esto se debe a que las soluciones aproximadas locales en cada uno de los elementos son independientes entre sí debido al soporte local de la base del espacio finito dimensional. La univaluación de la solución en cada uno de los bordes se impone en la forma débil del problema a través de la incorporación de términos adicionales conocidos como *términos de penalidad* y constituyen la principal característica de este método.

A continuación se postularán las formas débiles correspondientes a los problemas estudiados en esta tesis, en base al método recién descripto.

2.3. Formulación débil del problema de borde absorbente con el método Galerkin Discontinuo

Para la implementación del método de Elementos Finitos Galerkin Discontinuo en el problema de borde absorbente planteado en (1.21), se realiza en primera instancia una partición del dominio en un número finito de subintervalos como ya hemos planteado. Siguiendo la notación y metodología dadas por [Riviere, 2008], consideremos una partición \mathcal{E}_h del dominio $\Omega = (a, b)$ de la siguiente forma:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b ,$$

donde cada n -ésimo elemento, para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, viene dado por el subintervalo

$$I_n = (x_n, x_{n+1}) ,$$

y posee una longitud h_n definida como

$$h_n = x_{n+1} - x_n .$$

Los bordes entre los elementos quedan entonces definidos por los valores $x_n, n = 0, 1, \dots, N$, y se conocen como *nodos*.

Una vez realizada la partición, el siguiente paso consiste en definir el espacio finito dimensional donde se buscará la solución aproximada del problema. En este trabajo utilizaremos el espacio de los polinomios cuadráticos continuos a trozos dado por:

$$\mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h) = \{v(x) : v(x)|_{I_n} \in \mathbb{P}_2(I_n); \forall n = 0, 1, \dots, N - 1\} ,$$

donde $\mathbb{P}_2(I_n)$ es el espacio de los polinomios cuadráticos en el intervalo I_n .

Dadas las características de este espacio, las funciones $v(x)$ pueden ser discontinuas en cada uno de los nodos. Se definen entonces los valores para el *salto* y el *promedio* de dichas funciones en los nodos interiores como se muestra a continuación:

$$[v(x_n)] = v(x_n^-) - v(x_n^+), \tag{2.1a}$$

$$\{v(x_n)\} = \frac{v(x_n^-) + v(x_n^+)}{2}; \tag{2.1b}$$

para $n = 1, 2, \dots, N - 1$, y por convención se extiende la definición a los nodos exteriores quedando:

$$\begin{aligned} [v(x_0)] &= -v(x_0^+), & \{v(x_0)\} &= v(x_0^+), \\ v[(x_N)] &= v(x_N^-), & \{v(x_N)\} &= v(x_N^-), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde, para ambos casos, los valores $v(x_n^+)$ y $v(x_n^-)$ se definen:

$$v(x_n^+) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} v(x_n + \delta), \quad v(x_n^-) = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} v(x_n + \delta).$$

Estamos en condiciones ahora de reformular el problema (1.21) de forma variacional. En el siguiente desarrollo, y a fines de simplificar la notación, la dependencia con la frecuencia angular ω de las funciones \hat{u} y \hat{f} no se hará explícita. Reescribimos entonces la ecuación (1.15) como:

$$-\omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) - \left(k(x) \hat{u}'(x) \right)' = \hat{f}(x). \quad (2.3)$$

Multiplicando esta ecuación por una función arbitraria $v(x) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h)$ e integrando sobre cada elemento I_n , se obtiene:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} -\omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) v(x) dx - \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \left(k(x) \hat{u}'(x) \right)' dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \hat{f}(x) dx. \quad (2.4)$$

Integrando por partes el segundo término a la izquierda de la igualdad y reagrupando las integrales, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x) \hat{u}'(x) v'(x) - \omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) v(x) \right) dx - k(x_{n+1}) \hat{u}'(x_{n+1}) v(x_{n+1}^-) \\ + k(x_n) \hat{u}'(x_n) v(x_n^+) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \hat{f}(x) dx, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N - 1; \end{aligned} \quad (2.5)$$

y sumando estas N expresiones:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x) \hat{u}'(x) v'(x) - \omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) v(x) \right) dx - \sum_{n=0}^{N-1} k(x_{n+1}) \hat{u}'(x_{n+1}) v(x_{n+1}^-) \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} k(x_n) \hat{u}'(x_n) v(x_n^+) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} v(x) \hat{f}(x) dx = \int_{a=x_0}^{b=x_N} v(x) \hat{f}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dado que la función $k(x) \hat{u}'(x)$ es continua en todo punto del dominio, se cumple:

$$k(x_n^-) \hat{u}'(x_n^-) = k(x_n^+) \hat{u}'(x_n^+), \quad \forall n = 1, 2, \dots, N-1; \quad (2.7)$$

y en virtud de la definiciones (2.1a), (2.1b) y (2.2), puede escribirse:

$$- \sum_{n=0}^{N-1} k(x_{n+1}) \hat{u}'(x_{n+1}) v(x_{n+1}^-) + \sum_{n=0}^{N-1} k(x_n) \hat{u}'(x_n) v(x_n^+) = - \sum_{n=0}^N \{k(x_n) \hat{u}'(x_n)\} [v(x_n)]. \quad (2.8)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x) \hat{u}'(x) v'(x) - \omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) v(x) \right) dx \\ & - \sum_{n=0}^N \{k(x_n) \hat{u}'(x_n)\} [v(x_n)] = \int_{x_0}^{x_N} v(x) \hat{f}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

El modelo de deslizamiento lineal propuesto en el capítulo anterior se incorpora en la forma débil de la siguiente manera. Asociemos la posición de la fractura en el medio x_γ , al nodo $n = \gamma$. La solución exacta $\hat{u}(x)$ no es continua en este punto, y de acuerdo al modelo mencionado, el salto de la función viene dado por:

$$[\hat{u}(x_\gamma)] = -Zk(x_\gamma) \hat{u}'(x_\gamma).$$

Reemplazando esta expresión en (2.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x) \hat{u}'(x) v'(x) - \omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) v(x) \right) dx \\ - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \gamma}}^N \{k(x_n) \hat{u}'(x_n)\} [v(x_n)] + \frac{1}{Z} [\hat{u}(x_\gamma)] [v(x_\gamma)] = \int_{x_0}^{x_N} v(x) \hat{f}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En el resto de los puntos del dominio la solución exacta $\hat{u}(x)$ es continua y por lo tanto, los saltos de la función en cada nodo distinto de x_γ son nulos:

$$[\hat{u}(x_n)] = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N-1, n \neq \gamma.$$

De esta forma, podemos adicionar a la expresión (2.10) los siguientes términos:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \frac{\sigma_n}{h_n} [v(x_n)] [\hat{u}(x_n)] = 0, \quad (2.11)$$

$$\epsilon \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \{k(x_n) v'(x_n)\} [\hat{u}(x_n)] = 0, \quad (2.12)$$

donde (2.11) son los llamados *términos de penalidad* incluidos en la forma débil del problema para imponer la continuidad sobre la solución. En ellos, σ_n , $n = 1, 2, \dots, N-1$, $n \neq \gamma$, son los *parámetros de penalidad* internos del método, que en este caso pueden ser distintos para cada nodo. El parámetro ϵ en (2.12), puede en principio tomar cualquier valor real y su elección caracteriza distintos tipos de métodos discontinuos como se verá al final del capítulo.

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x) \hat{u}'(x) v'(x) - \omega^2 \rho(x) \hat{u}(x) v(x) \right) dx + \frac{1}{Z} [\hat{u}(x_\gamma)] [v(x_\gamma)] \\ - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \gamma}}^N \{k(x_n) \hat{u}'(x_n)\} [v(x_n)] + \epsilon \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \{k(x_n) v'(x_n)\} [\hat{u}(x_n)] \\ + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \frac{\sigma_n}{h_n} [v(x_n)] [\hat{u}(x_n)] = \int_{x_0}^{x_N} v(x) \hat{f}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Recordando además que la solución exacta $\hat{u}(x)$ en este problema debe satisfacer las condiciones de borde absorbentes dadas por:

$$\begin{aligned} k(x_0)\hat{u}'(x_0) &= i\omega(k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x_0), \\ -k(x_N)\hat{u}'(x_N) &= i\omega(k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x_N); \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta las definiciones dadas en (2.2), la expresión (2.13) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x)\hat{u}'(x)v'(x) - \omega^2\rho(x)\hat{u}(x)v(x) \right) dx + i\omega(k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x_0)v(x_0) \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \{k(x_n)\hat{u}'(x_n)\}[v(x_n)] + \epsilon \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \{k(x_n)v'(x_n)\}[\hat{u}(x_n)] + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \frac{\sigma_n}{h_n}[v(x_n)][\hat{u}(x_n)] \\ &+ i\omega(k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x_N)v(x_N) + \frac{1}{Z}[\hat{u}(x_\gamma)][v(x_\gamma)] = \int_{x_0}^{x_N} v(x)\hat{f}(x)dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A partir de esta expresión se define la forma bilineal $a_\epsilon : \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h) \times \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\hat{u}(x), v(x)) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x)\hat{u}'(x)v'(x) - \omega^2\rho(x)\hat{u}(x)v(x) \right) dx + \frac{1}{Z}[\hat{u}(x_\gamma)][v(x_\gamma)] \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \left(\{k(x_n)\hat{u}'(x_n)\}[v(x_n)] + \epsilon\{k(x_n)v'(x_n)\}[\hat{u}(x_n)] + \frac{\sigma_n}{h_n}[v(x_n)][\hat{u}(x_n)] \right) \\ &+ i\omega(k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x_0)v(x_0) + i\omega(k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}}\hat{u}(x_N)v(x_N) \end{aligned} \quad (2.15)$$

y por lo tanto, la formulación débil para el problema de borde absorbente planteado en esta Tesis con el método Galerkin Discontinuo queda propuesta de la siguiente forma:

Encontrar $\hat{u}^{DG}(x) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h)$, tal que:

$$\forall v(x) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h), \quad a_\epsilon(\hat{u}^{DG}(x), v(x)) = \mathcal{L}(v(x)), \quad (2.16)$$

donde la forma lineal $\mathcal{L} : \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ queda definida por:

$$\mathcal{L}(v(x)) = \int_{x_0}^{x_N} v(x)\hat{f}(x)dx.$$

2.4. Formulación débil del problema de Dirichlet nulo con el método Galerkin Discontinuo

Para obtener la formulación débil del problema de Dirichlet nulo planteado en (1.20) con el método Galerkin Discontinuo, los pasos a seguir son similares a los ya desarrollados para el caso anterior. En efecto, tomemos la ecuación (2.13) dada en dicho desarrollo y sumemos a ambos lados de la igualdad los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \epsilon\{k(x_0)v'(x_0)\}[\hat{u}(x_0)] + \frac{\sigma_0}{h_0}[v(x_0)][\hat{u}(x_0)] &= -\epsilon k(x_0)v'(x_0)\hat{u}(x_0) - \frac{\sigma_0}{h_0}v(x_0)\hat{u}(x_n), \\ \epsilon\{k(x_N)v'(x_N)\}[\hat{u}(x_N)] + \frac{\sigma_N}{h_{N-1}}[v(x_N)][\hat{u}(x_N)] &= \\ &= -\epsilon k(x_N)v'(x_N)\hat{u}(x_N) - \frac{\sigma_N}{h_{N-1}}v(x_N)\hat{u}(x_N); \end{aligned}$$

donde se introdujeron los parámetros de penalidad externos σ_0 y σ_N . Dadas las condiciones de borde de Dirichlet nulas, la solución exacta $\hat{u}(x)$ debe anularse en x_0 y x_N . Por lo tanto, los términos a la derecha de la igualdad en estas expresiones son nulos y resulta entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x)\hat{u}'(x)v'(x) - \omega^2 \rho(x)\hat{u}(x)v(x) \right) dx + \frac{1}{Z}[\hat{u}(x_\gamma)][v(x_\gamma)] \\ - \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \gamma}}^N \{k(x_n)\hat{u}'(x_n)\}[v(x_n)] + \epsilon \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \gamma}}^N \{k(x_n)v'(x_n)\}[\hat{u}(x_n)] + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \frac{\sigma_n}{h_n}[v(x_n)][\hat{u}(x_n)] \\ + \frac{\sigma_0}{h_0}[v(x_0)][\hat{u}(x_0)] + \frac{\sigma_N}{h_{N-1}}[v(x_N)][\hat{u}(x_N)] = \int_{x_0}^{x_N} v(x)\hat{f}(x)dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Definimos de esta manera la forma bilineal $a_\epsilon : \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h) \times \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\hat{u}(x), v(x)) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x)\hat{u}'(x)v'(x) - \omega^2 \rho(x)\hat{u}(x)v(x) \right) dx + \frac{1}{Z}[\hat{u}(x_\gamma)][v(x_\gamma)] \\ &+ \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq \gamma}}^N \left(\{k(x_n)\hat{u}'(x_n)\}[v(x_n)] + \epsilon\{k(x_n)v'(x_n)\}[\hat{u}(x_n)] \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{N-1} \frac{\sigma_n}{h_n}[v(x_n)][\hat{u}(x_n)] \right) + \frac{\sigma_0}{h_0}[v(x_0)][\hat{u}(x_0)] + \frac{\sigma_N}{h_{N-1}}[v(x_N)][\hat{u}(x_N)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

De acuerdo a la ecuación (2.17), vemos que la formulación débil del problema de borde de Dirichlet nulo es análoga a la dada para el problema de borde absorbente.

2.5. Los métodos IIPG, SIPG y NIPG

Al tomar el parámetro ϵ diferentes valores, se obtienen distintas formas bilineales a_ϵ para las formulaciones débiles planteadas. Esto da pie a diversos métodos Galerkin Discontinuos. En este trabajo se tendrán en cuenta los siguientes métodos [Riviere, 2008]:

- $\epsilon = -1$; método de penalidad interna Galerkin simétrico (SIPG),
- $\epsilon = 0$, método de penalidad interna Galerkin incompleto (IIPG),
- $\epsilon = 1$; método de penalidad interna Galerkin no simétrico (NIPG).

CAPÍTULO 3

IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO

Las formulaciones débiles propuestas en el capítulo anterior para los problemas planteados en esta Tesis serán desarrolladas de manera tal que puedan obtenerse sistemas lineales de ecuaciones para su resolución. En este capítulo nos ocuparemos de forma explícita de la discretización y del cálculo de las matrices involucradas en estos sistemas lineales.

3.1. Desarrollo del sistema lineal para el problema de borde absorbente

Para la derivación del sistema lineal correspondiente a la formulación débil del problema de borde absorbente propuesta en el Capítulo 2, en primer término deben elegirse bases apropiadas para los espacios $\mathbb{P}_2(I_n)$ y $\mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h)$. En este trabajo utilizaremos, siguiendo a [Riviere, 2008]:

$$\mathbb{P}_2(I_n) = \text{span}\{\phi_0^n(x), \phi_1^n(x), \phi_2^n(x)\}$$

con:

$$\phi_0^n(x) = 1, \quad \phi_1^n(x) = 2 \left(\frac{x - x_{n+1/2}}{x_{n+1} - x_n} \right), \quad \phi_2^n(x) = 4 \left(\frac{x - x_{n+1/2}}{x_{n+1} - x_n} \right)^2, \quad (3.1)$$

donde $\phi_i^n(x)$ representa la i -ésima componente de la base en el n -ésimo elemento del dominio; y $x_{n+1/2} = x_n + h_n/2$ corresponde al punto medio del intervalo I_n . Estas funciones se denominan *funciones base locales*.

Las componentes de la base del espacio $\mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h)$ se denominan *funciones base globales* y son obtenidas a partir de la extensión por cero a todo el dominio de las funciones base locales de la siguiente forma:

$$\Phi_i^n(x) = \begin{cases} \phi_i^n(x), & x \in I_n, \\ 0, & x \notin I_n, \end{cases} \quad i = 0, 1, 2; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

De acuerdo con esto se construye la aproximación a la solución $\hat{u}^{DG}(x) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h)$ como una combinación lineal de los elementos de la base de dicho espacio:

$$\hat{u}^{DG}(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m \Phi_j^m(x), \quad \forall x \in (x_0, x_N), \quad (3.3)$$

donde α_j^m es el coeficiente que acompaña a la j -ésima función de la base en el m -ésimo elemento del dominio. Estos coeficientes son los que caracterizan a la función solución y serán las incógnitas a obtener.

Reemplacemos ahora la expresión (3.3) en la ecuación dada en la formulación débil (2.16):

$$a_\epsilon \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m \Phi_j^m(x), v(x) \right) = \mathcal{L}(v(x)), \quad (3.4)$$

y en virtud de la bilinealidad de a_ϵ resulta:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m a_\epsilon (\Phi_j^m(x), v(x)) = \mathcal{L}(v(x)). \quad (3.5)$$

Debido a que $v(x) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{E}_h)$, puede entonces expresarse también como combinación lineal de los elementos de la base (3.2) y por lo tanto, recordando que esta ecuación debe cumplirse $\forall v(x)$, el esquema planteado puede reescribirse como:

Encontrar α_j^m , $j = 0, 1, 2$, $m = 0, 1, \dots, N-1$ tal que:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m a_\epsilon (\Phi_j^m(x), \Phi_i^n(x)) = \mathcal{L}(\Phi_i^n(x)), \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1; \quad \forall i = 0, 1, 2; \quad (3.6)$$

De esta manera queda planteado un sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes $\alpha_j^m, m = 0, 1, \dots, N-1, j = 0, 1, 2$ que puede ser representado en forma matricial como:

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}, \quad (3.7)$$

donde $\vec{\alpha}$ es un vector columna de $3N$ elementos con las incógnitas dispuestas de la siguiente manera:

$$\vec{\alpha} = (\alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_0^1, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_0^{N-1}, \alpha_1^{N-1}, \alpha_2^{N-1})^T; \quad (3.8)$$

A es una matriz de $3N \times 3N$ cuyos coeficientes vienen dados por $a_\epsilon(\Phi_j^m(x), \Phi_i^n(x))$; y \vec{b} es un vector columna de longitud $3N$ con coeficientes $\mathcal{L}(\Phi_i^n(x))$.

En la siguiente sección desarrollaremos los pasos necesarios para obtener la matriz A de forma explícita.

3.2. Cálculo de la matriz global

Debido al soporte local de las funciones base globales, la matriz A (que de ahora en adelante llamaremos *matriz global*) puede construirse a partir de matrices de menor tamaño -llamadas *matrices locales*- calculadas en cada elemento .

Para obtener las matrices locales, reescribamos en un primer paso el término a la izquierda de la igualdad en la ecuación (3.6) como:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m a_\epsilon(\Phi_j^m(x), \Phi_i^n(x)) = \mathcal{R}_i^n + \mathcal{S}_i^n + \mathcal{T}_i^n, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1; \quad \forall i = 0, 1, 2; \quad (3.9)$$

donde:

$$\mathcal{R}_i^n = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m \sum_{s=0}^{N-1} \int_{x_s}^{x_{s+1}} \left(k(x) (\Phi_i^n)'(x) (\Phi_j^m)'(x) - \alpha(x) \Phi_i^n(x) \Phi_j^m(x) \right) dx, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{S}_i^n = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m \left(\frac{1}{Z} [\Phi_j^m(x_\gamma)] [\Phi_i^n(x_\gamma)] + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq \gamma}}^{N-1} \left(\epsilon \{k(x_s)(\Phi_i^n)'(x_s)\} [\Phi_j^m(x_s)] \right. \right. \\ \left. \left. - \{k(x_s)(\Phi_j^m)'(x_s)\} [\Phi_i^n(x_s)] + \frac{\sigma_s}{h_s} [\Phi_i^n(x_s)] [\Phi_j^m(x_s)] \right) \right) \quad (3.11)$$

$$\mathcal{T}_i^n = i\omega \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m \left((k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}} \Phi_j^m(x_0) \Phi_i^n(x_0) + (k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}} \Phi_j^m(x_N) \Phi_i^n(x_N) \right). \quad (3.12)$$

En estas expresiones:

1. \mathcal{R}_i^n corresponde a la sumatoria de las integrales sobre los elementos del dominio,
2. \mathcal{S}_i^n corresponde a la sumatoria de los términos evaluados en los nodos interiores,
3. y \mathcal{T}_i^n corresponde a los términos evaluados en los nodos exteriores x_0 y x_N .

A continuación desarrollaremos estos términos de forma explícita para obtener los sistemas lineales que involucran a las matrices locales en cada elemento.

Cálculo de \mathcal{R}_i^n . Tomemos el término \mathcal{R}_i^n , $\forall i = 0, 1, 2$ para un dado n fijo. Dado que las funciones $\Phi_i^n(x)$, $i = 0, 1, 2$, son no nulas sólo en el intervalo I_n y sus expresiones allí vienen dadas por las funciones base locales $\phi_i^n(x)$, $i = 0, 1, 2$, los únicos términos no nulos de las sumatorias correspondientes a este término se obtienen cuando $m = s = n$ y por lo tanto:

$$\mathcal{R}_i^n = \sum_{j=0}^2 \alpha_j^n \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x)(\phi_i^n)'(x)(\phi_j^n)'(x) - \alpha(x)\phi_i^n(x)\phi_j^n(x) \right), \quad \forall i = 0, 1, 2. \quad (3.13)$$

Estas expresiones constituyen un sistema lineal local de la forma:

$$A_n \vec{\alpha}^n \quad (3.14)$$

donde:

$$\bar{\alpha}^n = \begin{pmatrix} \alpha_0^n \\ \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

y los coeficientes de la matriz local A_n vienen dados por:

$$(A_n)_{ij} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(k(x)(\phi_j^n)'(x)(\phi_i^n)'(x) - \alpha(x)\phi_j^n(x)\phi_i^n(x) \right) dx.$$

Utilizando la definición para las funciones base locales dada en la expresión (3.1) y desarrollando estas integrales teniendo en cuenta que dentro de cada elemento las funciones $k(x)$ y $\rho(x)$ son constantes:

$$k(x) = k_n, \quad \rho(x) = \rho_n, \quad \forall x \in I_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

se obtiene:

$$A_n = \begin{pmatrix} -\omega^2 \rho_n h_n & 0 & -\frac{1}{3} \omega^2 \rho_n h_n \\ 0 & 4 \frac{k_n}{h_n} - \frac{1}{3} \omega^2 \rho_n h_n & 0 \\ -\frac{1}{3} \omega^2 \rho_n h_n & 0 & \frac{16}{3} \frac{k_n}{h_n} - \frac{1}{5} \omega^2 \rho_n h_n \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Cálculo de \mathcal{S}_i^n . Calculemos ahora el término \mathcal{S}_i^n , $\forall i = 0, 1, 2$, considerando los siguientes tres casos particulares: $n = 0$, $1 \leq n \leq N-2$, y $n = N-1$.

Desarrollando estos términos teniendo en cuenta las definiciones de salto y promedio dadas por las ecuaciones (2.1a) y (2.1b) respectivamente, y reemplazando las funciones base globales por su definición dada en la ecuación (3.2), encontramos para los distintos casos:

$$\mathcal{S}_i^0 = \sum_{j=0}^2 \left(\alpha_j^0 (C_1)_{ij} + \alpha_j^1 (D_1)_{ij} \right), \quad \forall i = 0, 1, 2, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{S}_i^n = \sum_{j=0}^2 \left(\alpha_j^{n-1} (E_n)_{ij} + \alpha_j^n (B_n)_{ij} + \alpha_j^n (C_{n+1})_{ij} + \alpha_j^{n+1} (D_{n+1})_{ij} \right),$$

$$1 \leq n \leq N-2, \quad \forall i = 0, 1, 2, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{S}_i^{N-1} = \sum_{j=0}^2 \left(\alpha_j^{N-2} (E_{N-1})_{ij} + \alpha_j^{N-1} (B_{N-1})_{ij} \right), \quad \forall i = 0, 1, 2. \quad (3.19)$$

Cada una de estas expresiones constituyen sistemas lineales locales de la forma:

$$\begin{aligned} & C_1 \vec{\alpha}^0 + D_1 \vec{\alpha}^1, \\ & E_n \vec{\alpha}^{n-1} + B_n \vec{\alpha}^n + C_{n+1} \vec{\alpha}^n + D_{n+1} \vec{\alpha}^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-2; \\ & E_{N-1} \vec{\alpha}^{N-2} + B_{N-1} \vec{\alpha}^{N-1}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde los coeficientes de las matrices locales B_l , C_l , D_l y E_l , $l = 1, 2, \dots, N-1$, $l \neq \gamma$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} (B_l)_{ij} = & \frac{1}{2} k(x_l^+) (\phi_j^l)'(x_l^+) \phi_i^l(x_l^+) - \frac{1}{2} \epsilon k(x_l^+) (\phi_i^l)'(x_l^+) \phi_j^l(x_l^+) \\ & + \frac{\sigma_l}{h_l} \phi_j^l(x_l^+) \phi_i^l(x_l^+); \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} (C_l)_{ij} = & -\frac{1}{2} k(x_l^-) (\phi_j^{l-1})'(x_l^-) \phi_i^{l-1}(x_l^-) + \frac{1}{2} \epsilon k(x_l^-) (\phi_i^{l-1})'(x_l^-) \phi_j^{l-1}(x_l^-) \\ & + \frac{\sigma_l}{h_l} \phi_j^{l-1}(x_l^-) \phi_i^{l-1}(x_l^+); \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} (D_l)_{ij} = & -\frac{1}{2} k(x_l^+) (\phi_j^l)'(x_l^+) \phi_i^{l-1}(x_l^-) - \frac{1}{2} \epsilon k(x_l^-) (\phi_i^{l-1})'(x_l^-) \phi_j^l(x_l^+) \\ & - \frac{\sigma_l}{h_l} \phi_j^l(x_l^+) \phi_i^{l-1}(x_l^+); \end{aligned} \quad (3.21c)$$

$$\begin{aligned} (E_l)_{ij} = & \frac{1}{2} k(x_l^-) (\phi_j^{l-1})'(x_l^-) \phi_i^l(x_l^+) + \frac{1}{2} \epsilon k(x_l^+) (\phi_i^l)'(x_l^+) \phi_j^{l-1}(x_l^-) \\ & - \frac{\sigma_l}{h_l} \phi_j^{l-1}(x_l^-) \phi_i^l(x_l^+); \end{aligned} \quad (3.21d)$$

y para el caso particular $l = \gamma$:

$$(B_\gamma)_{ij} = \frac{1}{Z} \phi_j^\gamma(x_\gamma^+) \phi_i^\gamma(x_\gamma^+); \quad (3.22a)$$

$$(C_\gamma)_{ij} = \frac{1}{Z} \phi_j^{\gamma-1}(x_\gamma^-) \phi_i^{\gamma-1}(x_\gamma^+); \quad (3.22b)$$

$$(D_\gamma)_{ij} = -\frac{1}{Z} \phi_j^\gamma(x_\gamma^+) \phi_i^{\gamma-1}(x_\gamma^+); \quad (3.22c)$$

$$(E_\gamma)_{ij} = -\frac{1}{Z} \phi_j^{\gamma-1}(x_\gamma^-) \phi_i^\gamma(x_\gamma^+). \quad (3.22d)$$

Desarrollando estos coeficientes según la definición de las funciones base locales y recorriendo nuevamente que la función $k(x)$ es constante dentro de cada elemento, encontramos las siguientes expresiones:

$$B_l = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_l}{h_l} & \frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} & -2\frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} \\ -\epsilon \frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_l}{h_l} + \epsilon \frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} & 2\frac{k_l}{h_l} - \epsilon \frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} \\ 2\epsilon \frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} & \frac{k_l}{h_l} - 2\epsilon \frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} & -2\frac{k_l}{h_l} + 2\epsilon \frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$C_l = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -2\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} \\ \epsilon \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \epsilon \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -2\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \epsilon \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} \\ 2\epsilon \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + 2\epsilon \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -2\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + 2\epsilon \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$D_l = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} & 2\frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} \\ -\epsilon\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_l}{h_l} + \epsilon\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & 2\frac{k_l}{h_l} - \epsilon\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - \frac{\sigma_l}{h_l} \\ -2\epsilon\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_l}{h_l} + 2\epsilon\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \frac{\sigma_l}{h_l} & 2\frac{k_l}{h_l} - 2\epsilon\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - \frac{\sigma_l}{h_l} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$E_l = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_l}{h_l} & \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - \frac{\sigma_l}{h_l} & 2\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - \frac{\sigma_l}{h_l} \\ \epsilon\frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \epsilon\frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} & -2\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} + \epsilon\frac{k_l}{h_l} + \frac{\sigma_l}{h_l} \\ -2\epsilon\frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} & \frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - 2\epsilon\frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} & 2\frac{k_{l-1}}{h_{l-1}} - 2\epsilon\frac{k_l}{h_l} - \frac{\sigma_l}{h_l} \end{pmatrix}; \quad (3.26)$$

$$B_\gamma = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_\gamma = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$D_\gamma = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_\gamma = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cálculo de \mathcal{T}_i^n . Dado el soporte local de las funciones base globales, los únicos términos \mathcal{T}_i^n , $i = 0, 1, 2$, no nulos resultan ser los correspondientes a $n = 0$ y $n = N - 1$:

$$\mathcal{T}_i^0 = i\omega \sum_{j=0}^2 \alpha_j^0 (k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}} \phi_j^0(x_0)\phi_i^0(x_0), \quad \forall i = 0, 1, 2; \quad (3.28)$$

$$\mathcal{T}_i^{N-1} = i\omega \sum_{j=0}^2 \alpha_j^{N-1} (k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}} \phi_j^{N-1}(x_N)\phi_i^{N-1}(x_N), \quad \forall i = 0, 1, 2. \quad (3.29)$$

Estas expresiones constituyen dos sistemas lineales de la forma:

$$F_0 \vec{\alpha}^0, \quad F_N \vec{\alpha}^{N-1}, \quad (3.30)$$

donde los coeficientes de las matrices locales en los bordes, F_0 y F_N , vienen dados por:

$$\begin{aligned} (F_0)_{ij} &= i\omega (k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}} \phi_j^0(x_0)\phi_i^0(x_0), \\ (F_N)_{ij} &= i\omega (k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}} \phi_j^{N-1}(x_N)\phi_i^{N-1}(x_N). \end{aligned}$$

Evaluando las funciones base locales se obtienen entonces las siguientes expresiones:

$$F_0 = i\omega (k(x_0)\rho(x_0))^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_N = i\omega (k(x_N)\rho(x_N))^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, reagrupando los sistemas locales obtenidos en (3.14), (3.20) y (3.30), de acuerdo a la disposición de los coeficientes α_j^m en el vector $\vec{\alpha}$, podemos expresar de forma explícita el sistema lineal (3.7) como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} M_0 & D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ E_1 & M_1 & D_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & E_{N-2} & M_{N-2} & D_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & E_{N-1} & M_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}^0 \\ \vec{\alpha}^1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}^{N-2} \\ \vec{\alpha}^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}^0 \\ \vec{b}^1 \\ \vdots \\ \vec{b}^{N-2} \\ \vec{b}^{N-1} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0 + F_0 + C_1; \\ M_n &= A_n + B_n + C_{n+1}, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N-2; \\ M_{N-1} &= A_{N-1} + B_{N-1} + F_N. \end{aligned}$$

Los vectores de inhomogeneidades locales \vec{b}^n vienen dados por:

$$\vec{b}^n = \begin{pmatrix} b_0^n \\ b_1^n \\ b_2^n \end{pmatrix}, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1; \quad (3.32)$$

donde:

$$b_i^n = \mathcal{L}(\Phi_i^n(x)) = \int_{x_0}^{x_N} \Phi_i^n(x) \hat{f}(x) dx. \quad (3.33)$$

De esta manera hemos encontrado un sistema lineal de ecuaciones equivalente al esquema numérico planteado para el problema de borde absorbente con el método Galerkin discontinuo, cuya resolución nos dará los coeficientes con los cuales construiremos la solución aproximada. Este sistema posee la característica de ser tridiagonal a bloques, donde cada uno de los elementos no nulos de la matriz global A corresponden a matrices locales de 3×3 . En el siguiente capítulo se darán los pasos necesarios para resolver este sistema de forma numérica utilizando el método de factorización en bloque LU.

3.3. Desarrollo del sistema lineal para el problema de borde de Dirichlet nulo

Para desarrollar de forma explícita el sistema lineal correspondiente a la forma débil del problema de borde de Dirichlet nulo, los pasos a seguir son análogos a los ya mencionados para el problema de borde absorbente. La diferencia entre ambos radica en la expresión de las matrices locales F_0 y F_N . Veamos cómo es la forma de los términos \mathcal{T}_i^n , $i = 0, 1, 2$, en este caso. Del desarrollo de la forma bilineal para el problema de Dirichlet nulo se obtiene ahora el término \mathcal{T}_i^n :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i^n = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=0}^2 \alpha_j^m & \left(k(x_0)(\Phi_j^m)'(x_0)\Phi_i^n(x_0) + \epsilon \{k(x_0)(\Phi_i^n)'(x_0)\} [\Phi_j^m(x_0)] \right. \\ & + \frac{\sigma_0}{h_0} [\Phi_j^m(x_0)] [\Phi_i^m(x_0)] - k(x_N)(\Phi_j^m)'(x_N)(\Phi_i^n)'(x_N) \\ & \left. + \epsilon \{k(x_N)(\Phi_i^n)'(x_N)\} [\Phi_j^m(x_N)] + \frac{\sigma_N}{h_N} [\Phi_j^m(x_N)] [\Phi_i^m(x_N)] \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Los únicos términos no nulos corresponden a \mathcal{T}_i^0 y \mathcal{T}_i^{N-1} y evaluando las funciones base globales resultan:

$$\mathcal{T}_i^0 = \sum_{j=0}^2 \alpha_j^0 (F_0)_{ij}, \quad \mathcal{T}_i^{N-1} = \sum_{j=0}^2 \alpha_j^{N-1} (F_N)_{ij}, \quad \forall i = 0, 1, 2. \quad (3.35)$$

Estas ecuaciones constituyen sistemas lineales locales al igual que los dados en la expresión (3.30) para la condición de borde absorbente, donde los coeficientes de las matrices F_0 y F_N en este caso vienen dados por:

$$\begin{aligned} (F_0)_{ij} &= k(x_0)(\phi_j^0)'(x_0)\phi_i^0(x_0) - \epsilon k(x_0)(\phi_i^0)'(x_0)\phi_j^0(x_0) \\ &\quad + \frac{\sigma_0}{h_0}\phi_j^0(x_0)\phi_i^0(x_0), \\ (F_N)_{ij} &= -k(x_N)(\phi_j^{N-1})'(x_N)\phi_i^{N-1}(x_N) + \epsilon k(x_N)(\phi_i^{N-1})'(x_N)\phi_j^{N-1}(x_N) \\ &\quad + \frac{\sigma_N}{h_N}\phi_j^{N-1}(x_N)\phi_i^{N-1}(x_N). \end{aligned}$$

Por último, evaluando las funciones base locales en estos coeficientes, se obtiene:

$$F_0 = \frac{1}{h_0} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 2k_0 - \sigma_0 & -4k_0 - \sigma_0 \\ -2\epsilon k_0 - \sigma_0 & -2k_0 + 2\epsilon k_0 + \sigma_0 & 4k_0 - 2\epsilon k_0 - \sigma_0 \\ 4\epsilon k_0 + \sigma_0 & 2k_0 - 4\epsilon k_0 - \sigma_0 & -4k_0 + 4\epsilon k_0 + \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$F_N = \frac{1}{h_{N-1}} \begin{pmatrix} \sigma_N & -2k_N + \sigma_N & -4k_N + \sigma_N \\ 2\epsilon k_N + \sigma_N & -2k_N + 2\epsilon k_N + \sigma_N & -4k_N + 2\epsilon k_N + \sigma_N \\ 4\epsilon k_N + \sigma_N & -2k_N + 4\epsilon k_N + \sigma_N & -4k_N + 4\epsilon k_N + \sigma_N \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

CAPÍTULO 4

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE EJEMPLOS DE INTERÉS

El método Galerkin Discontinuo desarrollado anteriormente fue implementado dentro de un código escrito en lenguaje Fortran 90, con el objetivo de generar un simulador numérico para la propagación de ondas sísmicas. En este capítulo detallaremos algunas consideraciones para la implementación de este algoritmo, como el armado de la geometría del modelo, la implementación de la fuente, la resolución de los sistemas lineales obtenidos y la construcción de la solución en el dominio del tiempo. Para validar los resultados se obtendrá una solución analítica simple para el caso de un medio homogéneo. Por último, se mostrarán y analizarán los resultados obtenidos para distintos parámetros numéricos del método y distintos modelos, incluyendo medios fracturados.

4.1. Implementación del algoritmo numérico

Discretización espacial. La elección del tamaño y forma de los elementos del dominio como paso previo a la resolución del problema con el método de Elementos Finitos es un procedimiento que se conoce como *mallado*. En este caso, al tratarse de un problema unidimensional, el único parámetro a tener en cuenta es la longitud de los subintervalos que representan a cada elemento. Si bien el método permite a éstos poseer distintos tamaños h_n , $n = 0, 1, \dots, N - 1$, en este trabajo consideraremos un mallado uniforme, es decir, todos los elementos tendrán el mismo tamaño h . Para la elección de este parámetro tendremos en cuenta el siguiente criterio:

$$h = \frac{\lambda_{min}}{n_{pwl}}, \quad (4.1)$$

donde λ_{min} es la longitud de onda espacial mínima presente en el problema, y n_{pwl} es el número de puntos por longitud de onda elegido para la discretización, es decir, la cantidad de nodos por longitud de onda mínima. Llamemos v_{min} a la velocidad de propagación

mínima presente en el problema y f_p a la frecuencia dominante de la fuente, que será definida más adelante. Dado que $\lambda_{min} = v_{min}/f_p$ resulta:

$$h = \frac{v_{min}}{f_p n_{pwl}}. \quad (4.2)$$

En la sección *Ejemplos numéricos* se obtendrán los resultados para distintos valores del parámetro n_{pwl} .

Implementación de la fuente. Es usual en una gran cantidad de aplicaciones en geofísica trabajar con modelos de fuentes puntuales para caracterizar la fuerza externa $f(x, t)$. En este trabajo utilizaremos una fuente con una distribución espacial dada por la derivada de la Delta de Dirac $\delta'(x)$, representación de una fuerza compresional en una dimensión. La forma en tiempo corresponderá a una ondícula de Ricker $f_R(t)$ dada por la siguiente expresión:

$$f_R(t) = \left(1 - 2(\pi f_p)^2(t - dr)^2\right) e^{-(\pi f_p)^2(t - dr)^2}, \quad (4.3)$$

donde f_p es la frecuencia dominante de la misma (frecuencia a la cual su espectro de amplitud alcanza el valor máximo) y dr es su retraso temporal. En la Fig. 4.1 puede verse la forma en tiempo de la ondícula de Ricker para una frecuencia dominante de $30Hz$ y un retraso temporal de $33ms$. De esta manera obtenemos la fuente puntual:

$$f(x, t) = \delta'(x - x_f) f_R(t) = \delta'(x - x_f) \left(1 - 2(\pi f_p)^2(t - dr)^2\right) e^{-(\pi f_p)^2(t - dr)^2}, \quad (4.4)$$

donde x_f es la posición donde se encuentra la fuente.

Elegida entonces la fuente podemos desarrollar de forma explícita el vector de inhomogeneidades \vec{b} del sistema lineal. Para el problema de borde absorbente, reemplazando la expresión (4.4) en la ecuación (3.33) obtenemos:

$$b_i^n = \int_{x_0}^{x_N} \Phi_i^n(x) \delta'(x - x_f) \hat{f}_R(\omega) dx, \quad (4.5)$$

donde $\hat{f}_R(\omega)$ es la transformada de Fourier de la ondícula de Ricker $f_R(t)$. Utilizando para resolver esta integral la siguiente expresión [Arfken y Weber, 2005]:

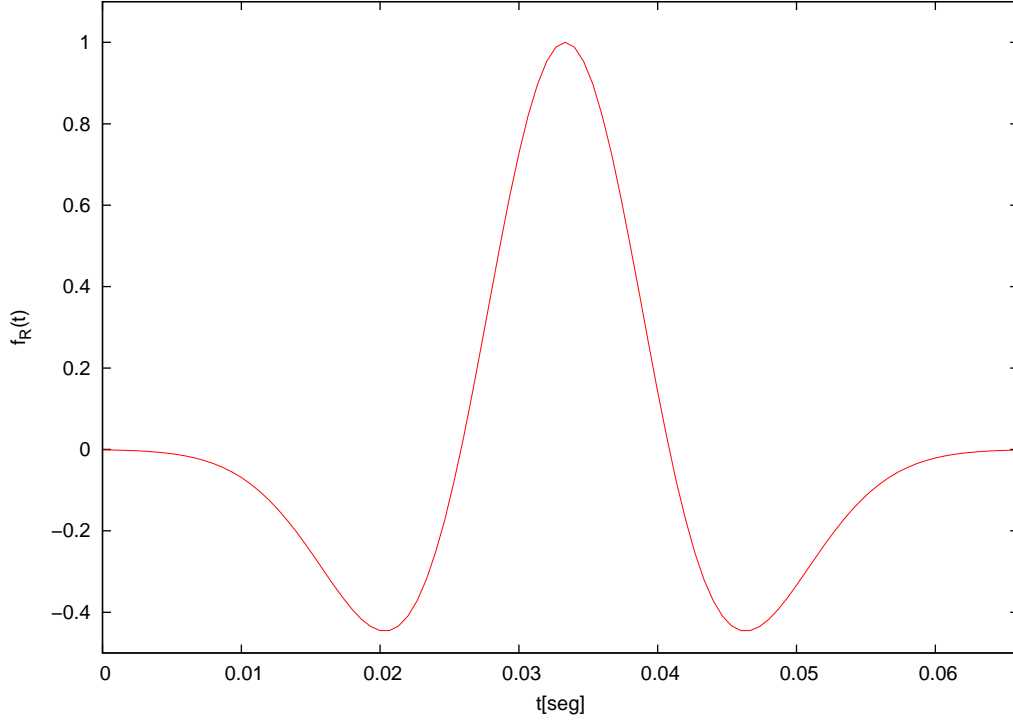


Figura 4.1: Ondícula de Ricker de 30Hz de frecuencia dominante y 33ms de retraso temporal.

$$\int_a^b \delta'(x - x')g(x)dx = -g'(x'), \quad a < x' < b; \quad (4.6)$$

resulta:

$$b_i^n = -\hat{f}_R(\omega)(\Phi_i^n)'(x_f), \quad (4.7)$$

y en virtud de la definición de las funciones base globales, los únicos coeficientes no nulos del vector corresponden a $b_i^{n_f}$, $i = 0, 1, 2$, donde n_f corresponde al número de elemento donde se encuentra alojada la fuente:

$$b_i^{n_f} = -\hat{f}_R(\omega)(\phi_i^{n_f})'(x_f), \quad i = 0, 1, 2. \quad (4.8)$$

Desarrollando las funciones base locales obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} b_0^{n_f} &= 0, \\ b_1^{n_f} &= -\frac{2}{h} \hat{f}_R(\omega), \\ b_2^{n_f} &= -\frac{8}{h^2} \left(x_f - x_{n_f} - \frac{h}{2} \right) \hat{f}_R(\omega). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Resolución del sistema lineal. Dadas las simetrías del sistema lineal planteado en (3.31), este será resuelto numéricamente utilizando el método de factorización LU tri-diagonal en bloque [Golub y Van Loan, 1996]. Para ello, en primera instancia la matriz global A deberá ser factorizada de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ L_1 & I & \ddots & \vdots \\ 0 & L_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & I & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & L_{N-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 & D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_1 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & U_{N-2} & D_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & U_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde I es la matriz identidad de 3×3 . Las matrices L_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, y U_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$ son también matrices de 3×3 y se obtienen siguiendo el procedimiento iterativo que se detalla a continuación:

1. $U_0 = M_0$,
2. $i = 1$,
3. se resuelve el sistema $L_i U_{i-1} = E_i$ para obtener la matriz L_i ,
4. se calcula $U_i = M_i - L_i D_i$,
5. $i = i + 1$; si $i < N$ se repite el procedimiento desde el paso 3, si $i = N$ se termina el procedimiento.

Una vez realizada la factorización, se realizan las sustituciones en bloque hacia adelante y hacia atrás para obtener el vector solución $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}^0 & \vec{\alpha}^1 & \cdots & \vec{\alpha}^{N-1} \end{pmatrix}^T$ de la siguiente manera:

1. $\vec{y}^0 = \vec{b}^0$,
2. $i = 1$,
3. se calcula $\vec{y}^i = \vec{b}^i - L_i \vec{y}^{i-1}$,
4. $i = i + 1$; si $i < N$ se repite el procedimiento desde el paso 3, si $i = N$ se sigue hacia el paso 5,
5. se resuelve el sistema $U_{N-1} \vec{\alpha}^{N-1} = \vec{y}^{N-1}$ para obtener el vector $\vec{\alpha}^{N-1}$,
6. $i = i - 1$,
7. se resuelve el sistema $U_{i-1} \vec{\alpha}^{i-1} = \vec{y}^{i-1} - D_i \vec{\alpha}^i$ para obtener el vector $\vec{\alpha}^{i-1}$,
8. si $i > 0$ se repite el procedimiento desde el paso 6, si $i = 0$ se termina el procedimiento.

Construcción de la solución en tiempo. Del algoritmo recién descrito se obtiene una solución del sistema lineal para una frecuencia angular ω_k determinada, que se utiliza para construir una componente en frecuencia particular del desplazamiento $\hat{u}(x, \omega_k)$. Es necesario por lo tanto resolver este sistema para ω_k , $k = 1, 2, \dots, n_{pf}$, donde n_{pf} es el número de puntos en los cuales se muestrea el espectro de amplitud de la fuente $|\hat{f}_R(x, \omega)|$. De esta manera se contará con las n_{pf} componentes en frecuencia del campo de desplazamientos con las cuales, a través de la expresión discreta de la transformada inversa de Fourier (1.14a), se obtendrá $u(x, t)$.

El criterio utilizado en este trabajo para obtener la frecuencia angular máxima ω_{cut} que definirá qué porción del espectro de amplitud de la fuente será utilizado para resolver el sistema es el siguiente:

$$\omega_{cut} = 3\omega_p = 6\pi f_p, \quad (4.11)$$

donde $\omega_p = 2\pi f_p$ es la frecuencia angular correspondiente a la frecuencia dominante f_p de la fuente. El espectro de amplitud de la fuente decae dos órdenes de magnitud respecto de su valor máximo para la frecuencia de corte ω_{cut} , y por ello las componentes para frecuencias mayores no se toman en cuenta en el cálculo. La Fig. 4.2 muestra el espectro de amplitud para la ondícula de Ricker antes mencionada en función de la frecuencia f . Vemos que el espectro toma valores muy pequeños para frecuencias mayores a $3f_p$. El número de puntos en frecuencia n_{pf} se escoge de manera tal que el espectro de amplitudes en el rango considerado resulte muestreado de manera adecuada.

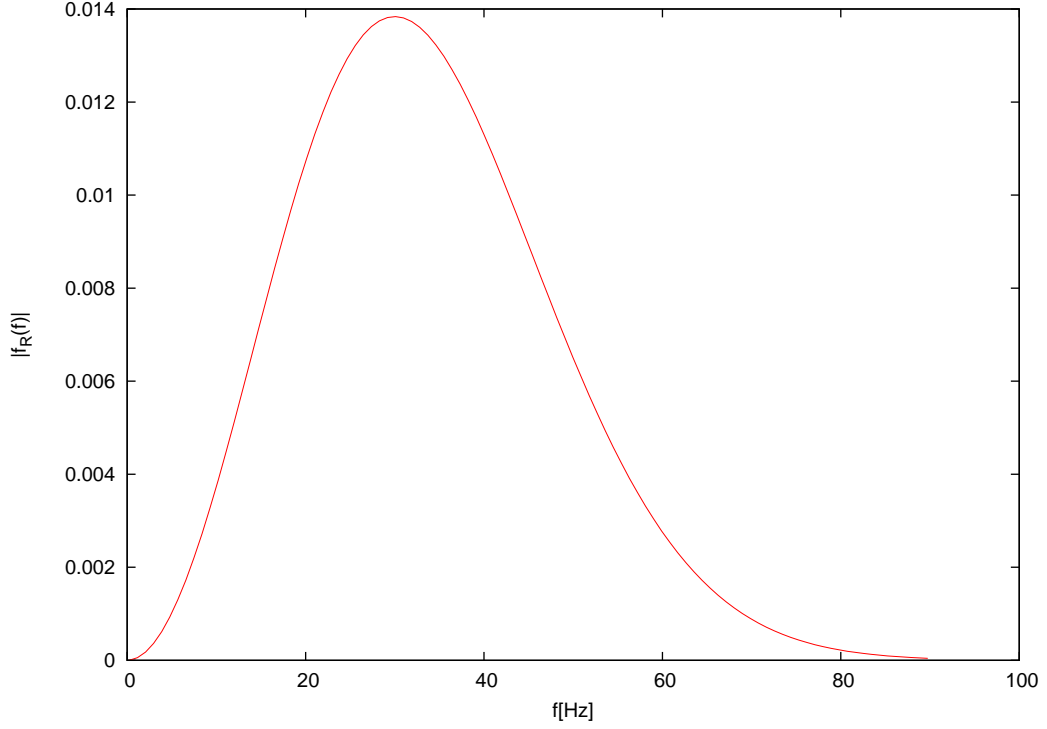


Figura 4.2: Espectro de amplitud $|\hat{f}_R(x, f)|$ de la ondícula de Ricker de $30Hz$ de frecuencia dominante y $33ms$ de retraso temporal.

4.2. Solución analítica para un medio homogéneo

La solución a la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = F(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.12a)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.12b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.12c)$$

viene dada por la siguiente expresión [Jeffrey, 2002]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s)ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(z, s)dzds. \quad (4.13)$$

Utilizando este resultado puede obtenerse una solución analítica al problema planteado en esta Tesis, para el caso simple de un medio elástico y homogéneo. Este resultado servirá luego para validar los resultados obtenidos con el método numérico.

Recordando la ecuación diferencial original del problema en el dominio espacio-tiempo y, teniendo en cuenta que en un medio con las características mencionadas la densidad y los parámetros elásticos son constantes, se tiene que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t). \quad (4.14)$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por la densidad ρ , encontramos una expresión análoga a la dada en (4.12a), donde $a^2 = (2\mu + \lambda)/\rho = v_l^2$ y $F(x, t) = f(x, t)/\rho$. Dado que en este trabajo se asumieron condiciones iniciales nulas, se obtiene entonces para la solución analítica de la ecuación (4.14) la siguiente expresión:

$$u(x, t) = \frac{1}{2v_l\rho} \int_0^t \int_{x-v_l(t-s)}^{x+v_l(t-s)} f(z, s) dz ds. \quad (4.15)$$

Para encontrar esta solución de forma explícita, reemplacemos la fuente f por su expresión dada en (4.4) y reagrupemos las integrales de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2v_l\rho} \int_0^t \left[\int_{x-v_l(t-s)}^{x+v_l(t-s)} \delta'(z - x_f) dz \right] f_R(s) ds. \quad (4.16)$$

La integral entre corchetes resulta ser la evaluación de la Delta de Dirac en los extremos de integración. Resolviendo y separando ambos términos, obtenemos las integrales:

$$u(x, t) = \frac{1}{2v_l\rho} \int_0^t \delta(x + v_l(t-s) - x_f) f_R(s) ds - \frac{1}{2v_l\rho} \int_0^t \delta(x - v_l(t-s) - x_f) f_R(s) ds. \quad (4.17)$$

Reescribamos el argumento de la Delta de Dirac en la primera integral como:

$$x + v_l(t-s) - x_f = -v_l \left(s - \left(t + \frac{x - x_f}{v_l} \right) \right), \quad (4.18)$$

y en la segunda integral como:

$$x - v_l(t-s) - x_f = v_l \left(s - \left(t - \frac{x - x_f}{v_l} \right) \right). \quad (4.19)$$

Utilizando la propiedad $\delta(ax) = (1/|a|)\delta(x)$, obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{2v_l^2\rho} \int_0^t \delta\left(s - \left(t + \frac{x - x_f}{v_l}\right)\right) f_R(s) ds - \frac{1}{2v_l^2\rho} \int_0^t \delta\left(s - \left(t - \frac{x - x_f}{v_l}\right)\right) f_R(s) ds. \quad (4.20)$$

Dado que la Delta de Dirac verifica:

$$\int_{x'-a}^{x'+a} g(x)\delta(x - x')dx = f(x'), \quad \forall a > 0; \quad (4.21)$$

obtenemos finalmente para la solución analítica el siguiente resultado:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2v_l^2\rho} f_R\left(t + \frac{x - x_f}{v_l}\right), & x < x_f, \quad t > 0; \\ -\frac{1}{2v_l^2\rho} f_R\left(t - \frac{x - x_f}{v_l}\right), & x > x_f, \quad t > 0; \end{cases} \quad (4.22)$$

que corresponde a dos ondículas de Ricker $f_R(t)$ de polaridad inversa viajando a velocidad v_l en direcciones opuestas, alejándose mutuamente de la fuente que las generó. Esto se condice con el modelo propuesto para la fuente.

4.3. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para los problemas planteados en esta Tesis, comenzando con la resolución del problema de borde de Dirichlet nulo. Luego, considerando el problema de borde absorbente, se evaluarán los distintos parámetros del método numérico para el análisis de su estabilidad y precisión. Por último se mostrarán los resultados para un modelo de medio elástico unidimensional con la inclusión de una fractura y la utilización de distintas fuentes.

Problema de borde de Dirichlet nulo. Se realizaron una gran cantidad de simulaciones numéricas para el problema de borde de Dirichlet nulo, considerando distintos modelos y parámetros numéricos, y en ninguna de ellas los resultados fueron satisfactorios. La Fig. 4.3 muestra una traza (la variación en el tiempo de la amplitud del desplazamiento en una posición fija del espacio) obtenida en $x_{rec} = 6000m$ para un medio homogéneo de espesor $L = 10000m$, densidad $\rho = 2gr/cm^3$, módulo de onda longitudinal $k = 23,33GPa$

y velocidad $v_l = 3416m/s$. La fuente, de $f_p = 30Hz$, fue ubicada en $x_f = 4500m$. Los parámetros del método utilizados fueron $\sigma_n = \sigma = 1000$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$, $\epsilon = -1$, $n_{pwl} = 20$ y $n_{pf} = 180$.

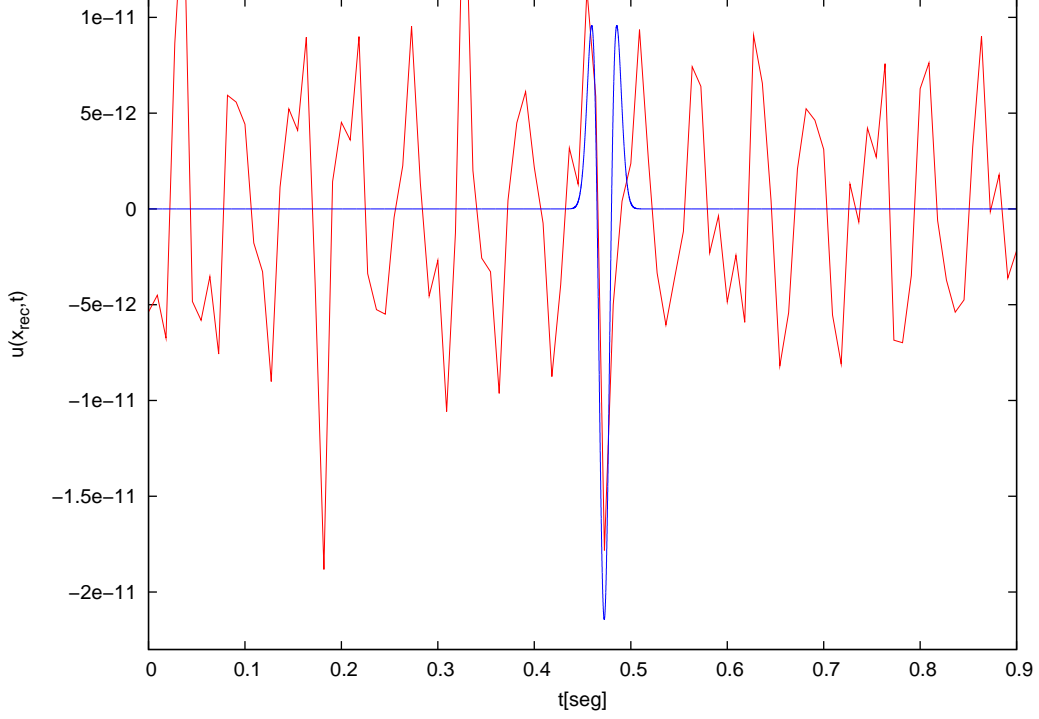


Figura 4.3: Traza correspondiente al problema de Dirichlet nulo (rojo) y solución analítica (azul).

Este resultado es comparado con la solución analítica para dicho modelo, y como puede observarse, no existe correlación entre ambos. Mientras el resultado analítico muestra una ondícula arribando a los $(x_{rec} - x_f)/v_l = 0,44seg$, el resultado de la simulación muestra un comportamiento oscilatorio. Analizando el espectro de amplitud $|\hat{u}(x_{rec}, f)|$ de la traza obtenida con la simulación (Fig. 4.4), podemos ver que la oscilación mencionada corresponde a la superposición de un número pequeño de frecuencias discretas. Trabajos previos realizados en el tema por [Skajaa, 2007] muestran que una inestabilidad de este tipo puede atribuirse a un mal condicionamiento del problema. El método por lo tanto no puede proveer de una solución adecuada al mismo.

Problema de borde absorbente. La Fig. 4.5 corresponde a los resultados obtenidos con condiciones de borde absorbente para el modelo físico propuesto anteriormente y la misma configuración paramétrica del método numérico.

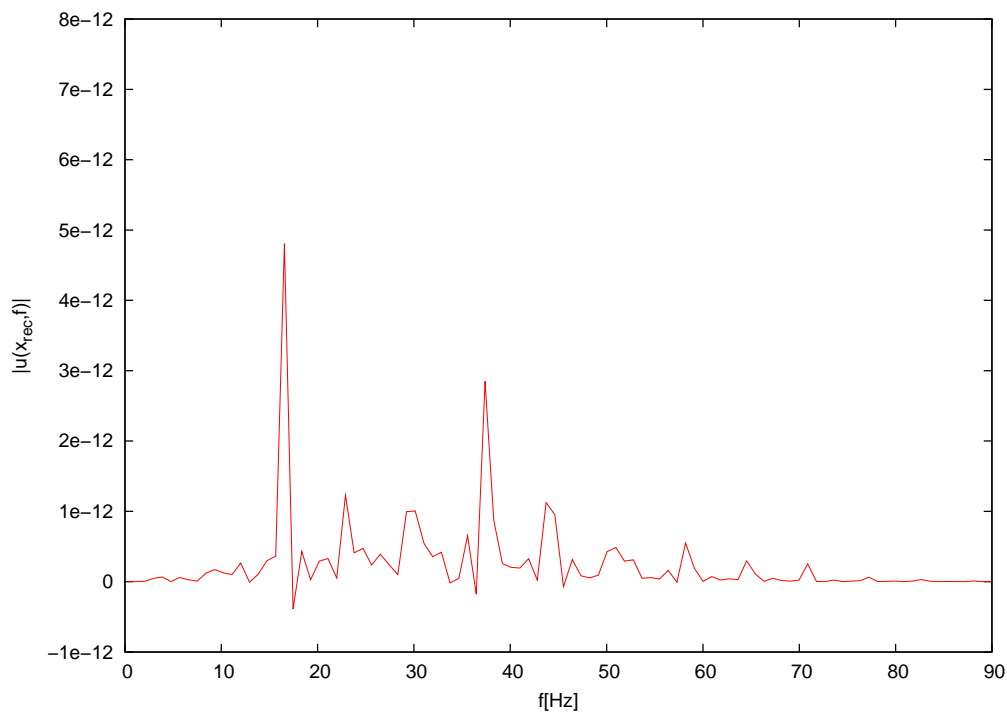


Figura 4.4: Espectro de amplitud $|\hat{u}(x_{rec}, f)|$ de la traza resultado de la simulación para el problema de Dirichlet nulo.

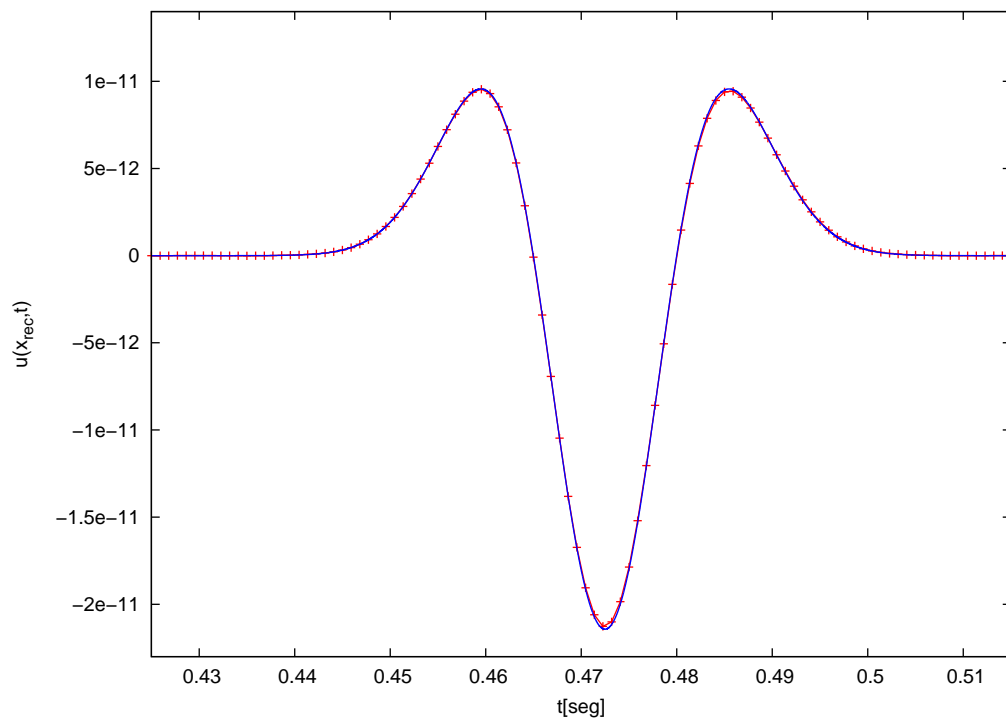


Figura 4.5: Solución numérica correspondiente al problema de borde absorbente (rojo) y solución analítica (azul).

Vemos entonces el muy buen ajuste de los resultados de la simulación con respecto a la solución analítica dada. Esto nos llevará a utilizar de ahora en adelante las condiciones de borde absorbente para el análisis de las penalidades y otros parámetros numéricos de interés, y para el análisis de la propagación en un medio con la presencia de una fractura.

Análisis del número de puntos por longitud onda n_{pwl} . En la Fig. 4.6 se muestran las trazas obtenidas en simulaciones con distintos números de puntos por longitud de onda para el modelo ya mencionado, además de la solución analítica al mismo. El parámetro de penalidad utilizado fue $\sigma = 1000$.

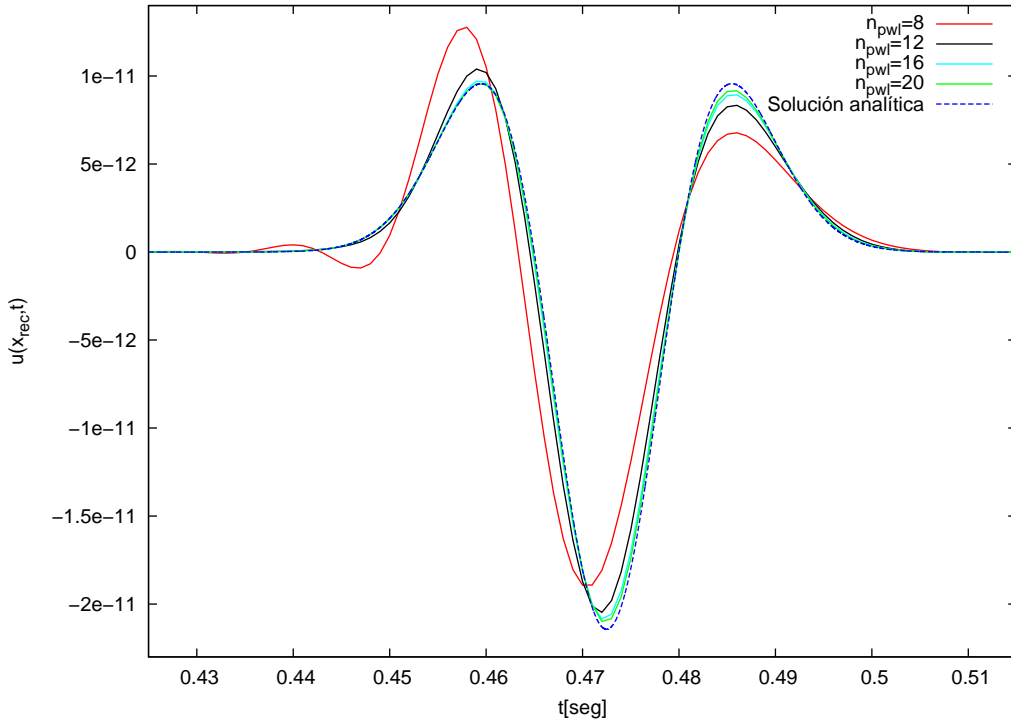


Figura 4.6: Trazas obtenidas para $n_{pwl} = 8, 12, 16, 20$ y una penalidad $\sigma = 1000$, y solución analítica.

Puede observarse que para valores cercanos a $n_{pwl} = 8$ el método posee baja precisión y, al estar mal discretizado el problema, la ondícula original es deformada. Para valores mayores a $n_{pwl} = 12$, el método presenta una gran mejora en su precisión y la ondícula conserva su forma, representando bien las amplitudes para valores a partir de $n_{pwl} = 16$.

Sin embargo, si consideramos el mismo análisis para una penalidad de $\sigma = 1000k$, donde k es el módulo de onda longitudinal, los resultados cambian apreciablemente como puede observarse en la Fig. 4.7. La deformación de la ondícula para $n_{pwl} = 8$ disminuye de forma notable y ya para valores de $n_{pwl} = 12$ se obtiene un resultado de mayor precisión que el logrado con $n_{pwl} = 20$ para la penalidad $\sigma = 1000$.

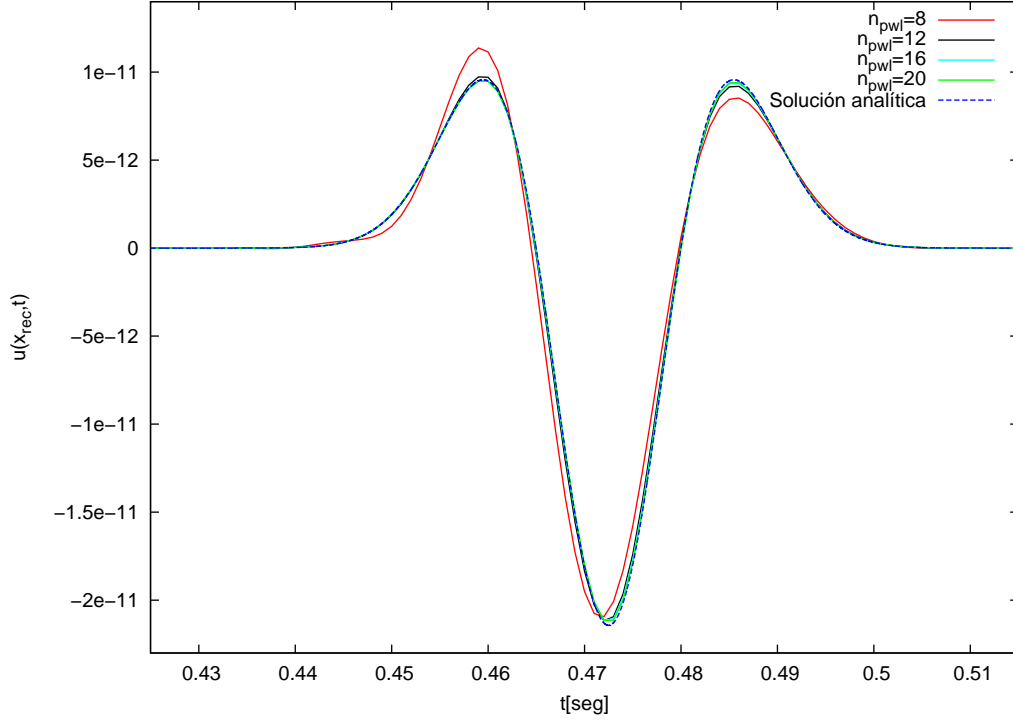


Figura 4.7: Trazas obtenidas para $n_{pwl} = 8, 12, 16, 20$ y una penalidad $\sigma = 1000k$, y solución analítica.

Puede verse entonces la influencia de ambos parámetros en la precisión del método. El número de puntos por longitud de onda tomará de ahora en adelante el valor $n_{pwl} = 20$ para garantizar una correcta discretización espacial. La diferencia en los resultados para las distintas penalidades nos llevará a seguir profundizando el análisis en esta dirección.

Análisis de los parámetros de penalidad para los métodos NIPG, SIPG e IIPG.

Se mostrarán ahora los resultados obtenidos de una serie de simulaciones realizadas para distintos valores de los parámetros de penalidad y para cada uno de los métodos discontinuos especificados en el Capítulo 2, de manera tal de poder realizar una comparación entre los mismos. El modelo a utilizar es el medio homogéneo detallado al principio de la sección.

La Fig. 4.8 muestra las trazas correspondientes a tres simulaciones realizadas con $\sigma = 1000$, $\sigma = k = 23,3GPa$ y $\sigma = 1000k$; $\epsilon = -1$ (método SIPG) y además la solución analítica. Puede observarse que el mejor resultado corresponde al tercer caso mencionado, para una penalidad varios órdenes de magnitud mayor que el módulo de onda longitudinal k . Un resultado similar, pero de menor calidad, se consigue para una penalidad varios órdenes de magnitud menor que el módulo de onda longitudinal del medio. El peor resultado se consigue con una penalidad del orden de k .

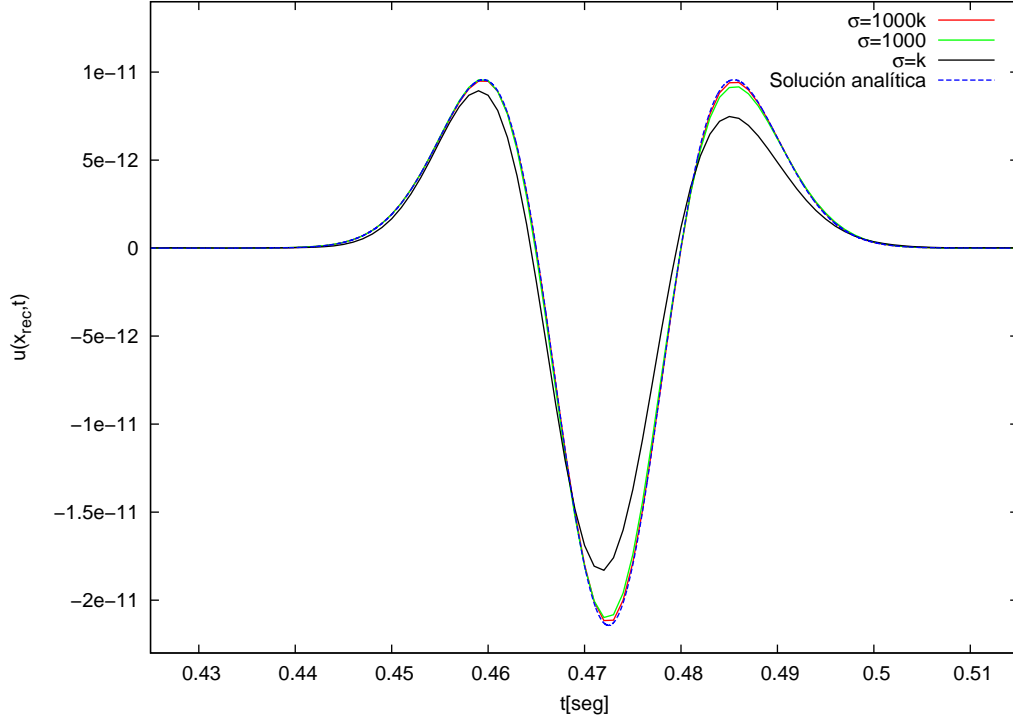


Figura 4.8: Trazas obtenidas para $\sigma = 1000, k, 1000k$ y solución analítica.

Dado que al considerar una penalidad del orden de magnitud del módulo de onda longitudinal del medio los resultados obtenidos no son satisfactorios, estudiaremos los distintos métodos surgidos de la variación del parámetro ϵ con los dos casos restantes. Los resultados se muestran en las Fig. 4.9 y Fig. 4.10. Para el primer caso no se observan diferencias sustanciales entre los tres métodos mencionados. En cambio, para $\sigma = 1000$, el único resultado válido resulta para el método SIPG con $\epsilon = -1$. Los resultados obtenidos con los métodos NIPG para $\epsilon = 1$ e IIPG para $\epsilon = 0$ no muestran ninguna correlación con la solución analítica, y por lo tanto estos métodos resultan inestables para el estudio del caso mencionado.

Podemos concluir entonces que los mejores resultados se obtendrán para valores de penalidad varios órdenes de magnitud mayor que el módulo de onda longitudinal y el método que presenta mayor estabilidad en la resolución es el SIPG. Esta será entonces la configuración paramétrica a utilizar para el estudio de la propagación en medios fracturados.

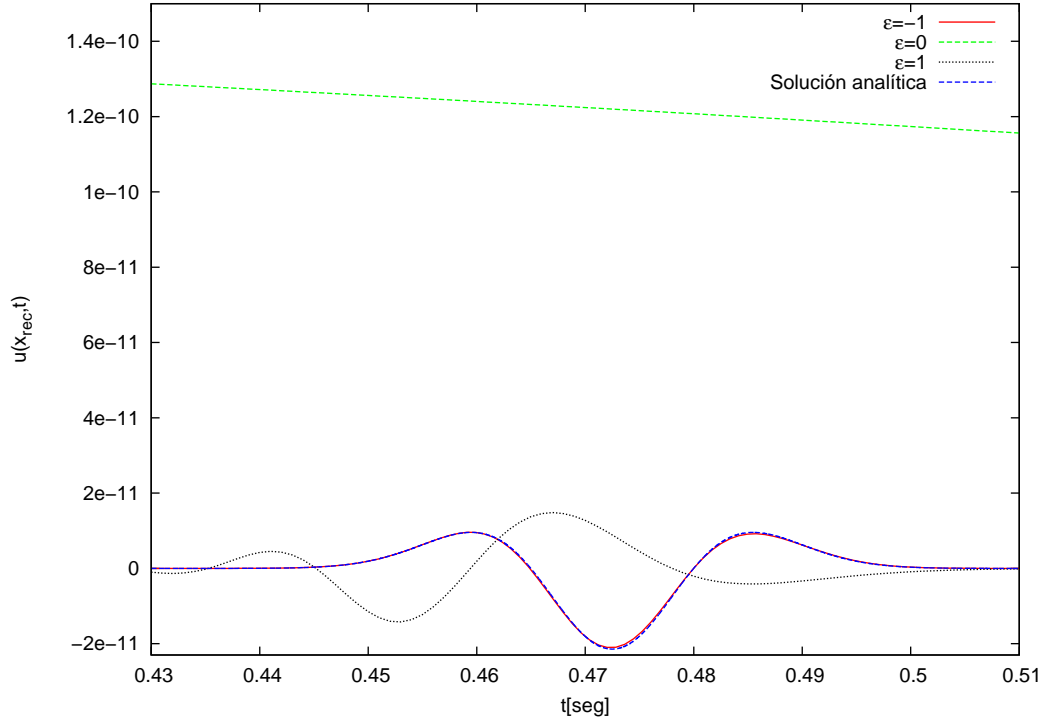


Figura 4.9: Trazas obtenidas para $\epsilon = -1$ (SIPG), $\epsilon = 0$ (IIPG) y $\epsilon = 1$ (NIPG), con penalidad $\sigma = 1000$; y solución analítica.

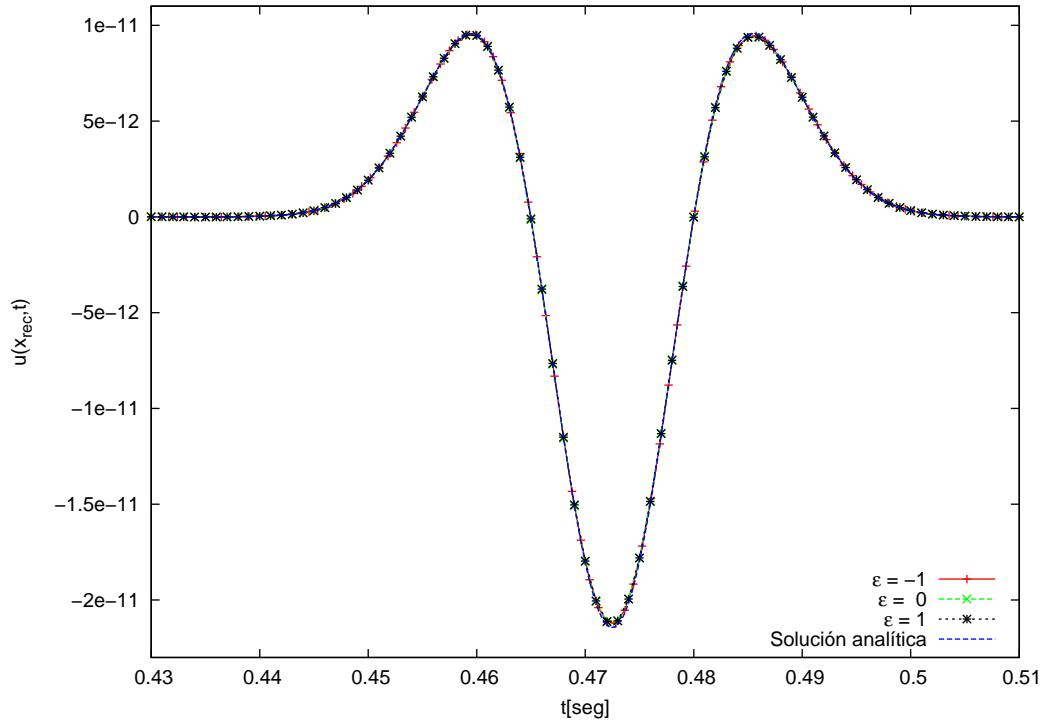


Figura 4.10: Trazas obtenidas para $\epsilon = -1$ (SIPG), $\epsilon = 0$ (IIPG) y $\epsilon = 1$ (NIPG), con penalidad $\sigma = 1000k$; y solución analítica.

Análisis de los resultados obtenidos en un medio homogéneo con inclusión de una fractura. Los siguientes resultados se obtuvieron incorporando el modelo de deslizamiento lineal para simular la presencia de una fractura en un medio homogéneo. La Fig. 4.11 muestra la traza obtenida en la posición $x_{rec} = 850m$, considerando un medio de estas características, con un espesor $L = 2000m$, módulo de onda longitudinal $k = 23,33GPa$, densidad $\rho = 2gr/cm^3$ y velocidad $v_l = 3415,65m/s$. La fuente en este caso es de $f_p = 30Hz$, con un retraso temporal de $dr = 33ms$ y ubicada en la posición $x_f = 700m$. La fractura se encuentra en la posición $x_\gamma = 1000m$ y su coeficiente de elasticidad normal es $Z = 2,3m/GPa$.

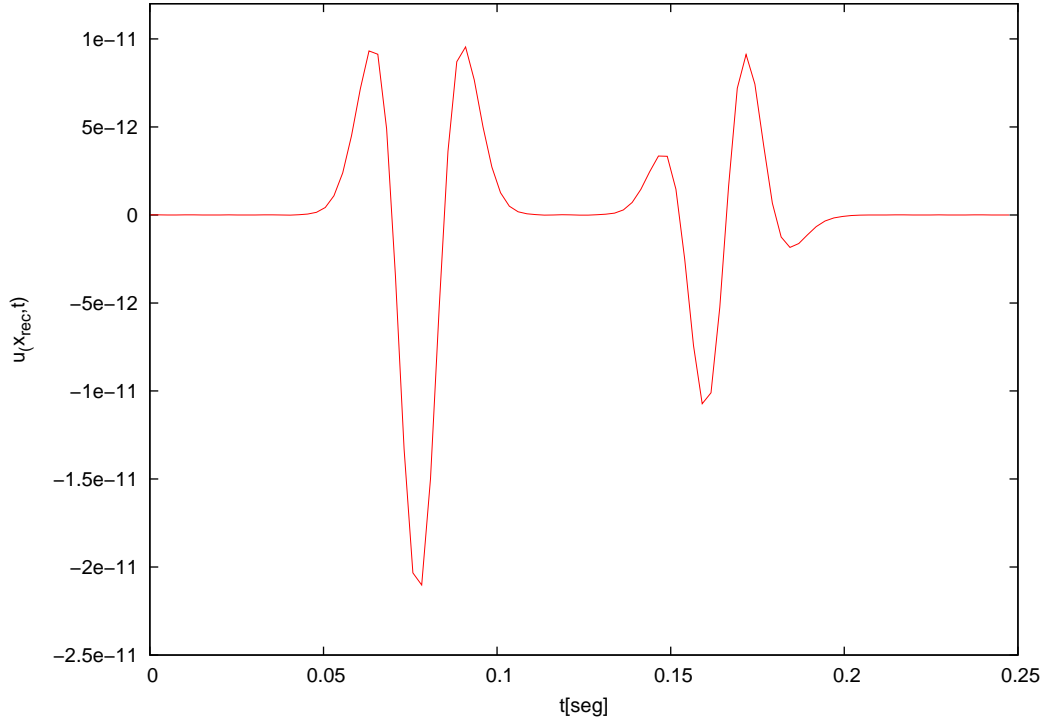


Figura 4.11: Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 850m$.

Además del arribo directo de una ondícula de Ricker bien definida, podemos observar una ondícula ligeramente deformada llegando a tiempo $t = 0,13seg$. Esta última corresponde a la respuesta de la fractura a la propagación. De forma similar a una discontinuidad entre dos medios de distinta impedancia, luego de la incidencia de la ondícula original en dicha fractura, se generan dos ondas: una reflejada, que retrocede y se propaga alejándose de la fractura; y una transmitida, que atraviesa la misma y continúa su camino. Esta última puede verse en la Fig. 4.12, correspondiente a una traza obtenida en la posición $x_{rec} = 1200m$. En rojo encontramos la ondícula mencionada, y en azul, la solución analítica que se obtendría para el mismo medio en ausencia de la fractura. Puede observarse que la fractura genera una disminución en la amplitud e introduce un

desfasaje temporal, deformando la ondícula original.

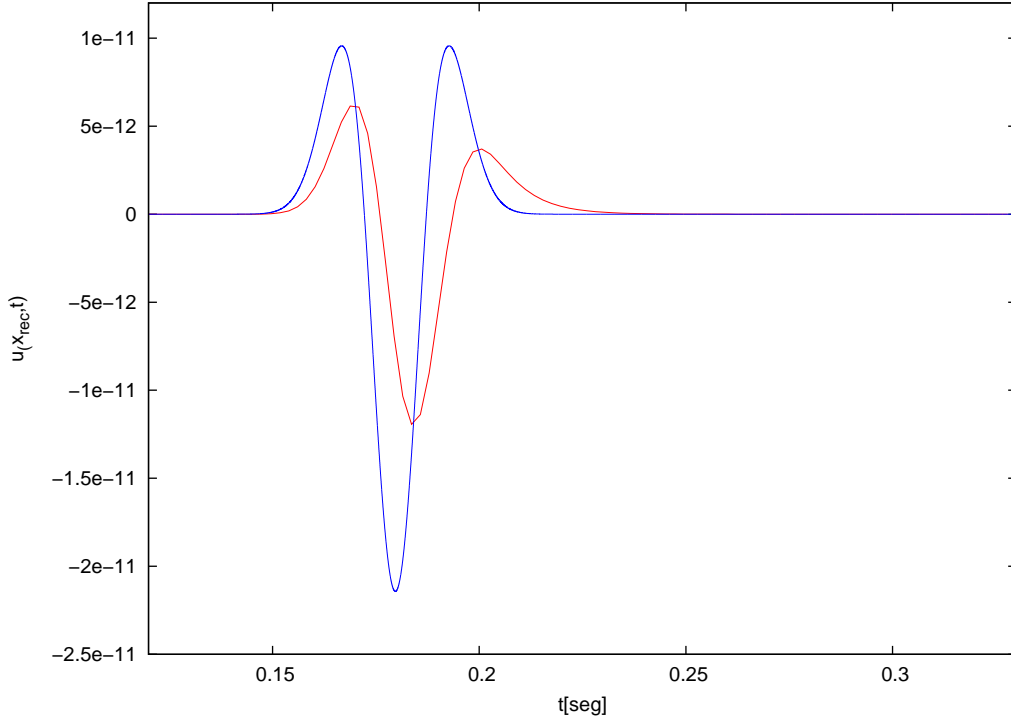


Figura 4.12: Trazas correspondientes al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 1200m$ para una fuente de $f_p = 30Hz$.

Explicaremos brevemente este fenómeno. La condición de continuidad en las tensiones que impone el modelo de deslizamiento lineal permite obtener coeficientes de reflexión y de transmisión que cuantifican el efecto de la fractura en la ondícula original. Estos coeficientes, que han sido desarrollados de forma analítica por [Van der Neut et al., 2008], son números complejos y dependen de la frecuencia de la onda incidente. Esto nos indica que al atravesar la fractura, las distintas componentes en frecuencia del campo de desplazamientos original se ven afectadas de forma diferente. El resultado son dos ondas, reflejada y transmitida, que se propagan alejándose de la fractura en sentidos opuestos con la velocidad correspondiente al medio elástico, cada una de ellas con una amplitud y un desfase temporal distintos para cada una de sus componentes en frecuencia. Esto genera los efectos de distorsión que pueden verse en Fig. 4.11 y Fig. 4.12.

Para concluir este análisis, se mostrarán dos trazas correspondientes a los modelos recién descritos para frecuencias dominantes de la fuente de $f_p = 15Hz$ (Fig. 4.13) y $f_p = 45Hz$ (Fig. 4.14), con el objetivo de validar los resultados del método numérico con la teoría recién desarrollada. Puede verse que al variar la frecuencia dominante las amplitudes de las ondículas transmitidas se atenúan de forma diferente. El efecto de la fractura en la propagación es dependiente de la frecuencia.

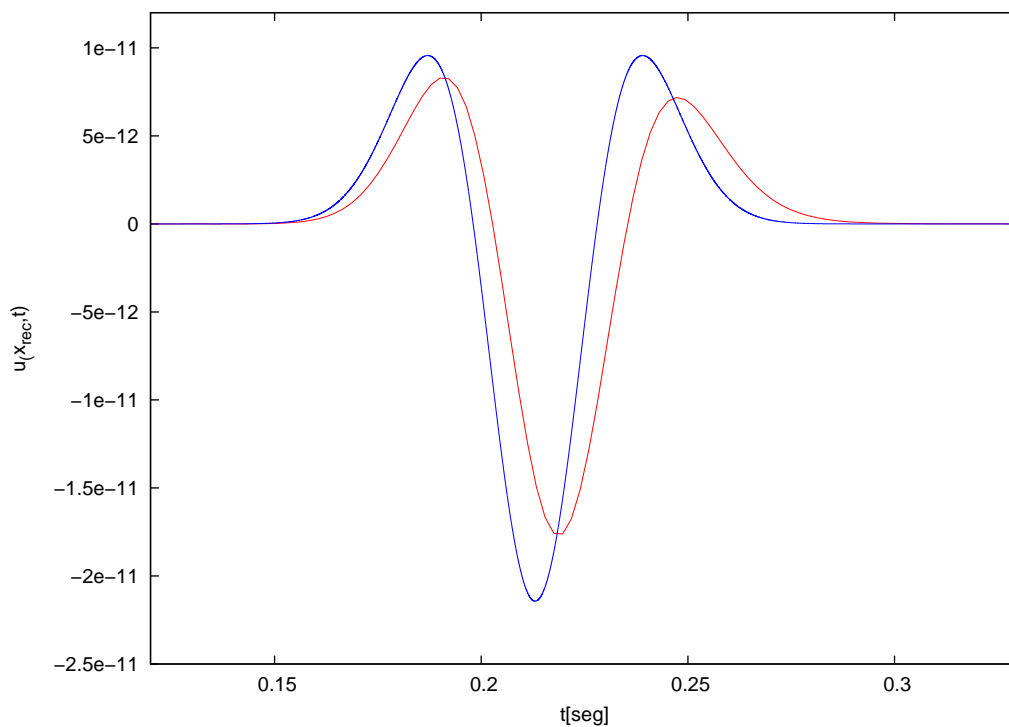


Figura 4.13: Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 1200m$ para una fuente de $f_p = 15Hz$.

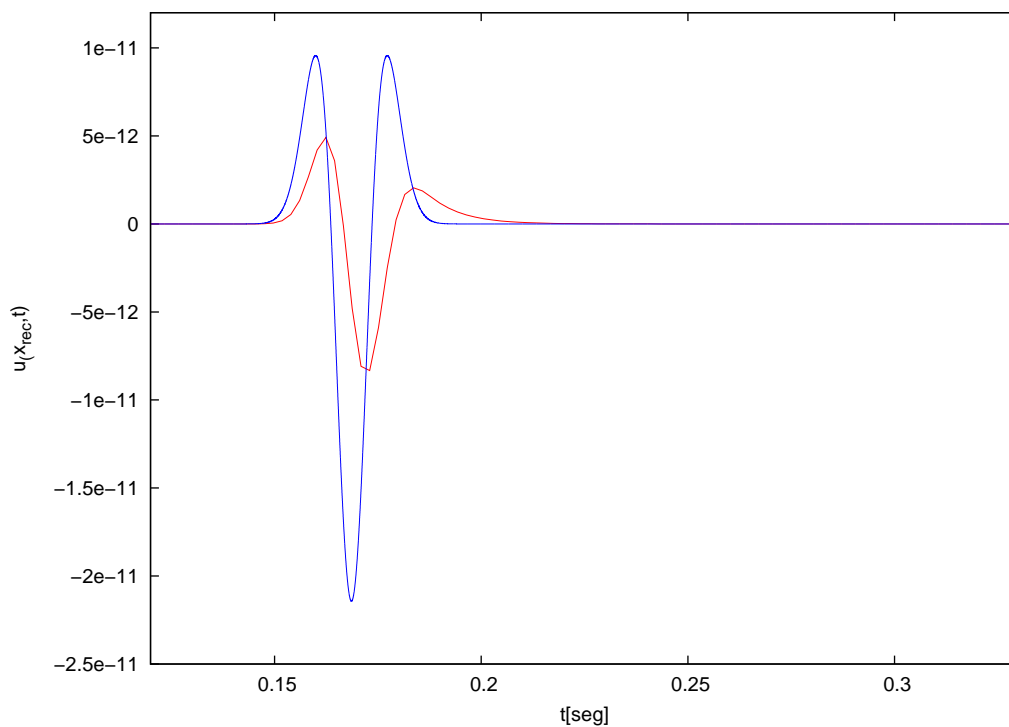


Figura 4.14: Traza correspondiente al medio fracturado en la posición $x_{rec} = 1200m$ para una fuente de $f_p = 45Hz$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un método numérico para la resolución de la ecuación de onda acústica unidimensional con distintas condiciones de borde, que permite modelar de manera precisa y estable la propagación de ondas sísmicas en un medio elástico unidimensional con una fractura.

Los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas con condiciones de borde de Dirichlet nulas, no han sido satisfactorios para ninguno de los modelos estudiados con distintas configuraciones paramétricas del método. Esto se debe al mal condicionamiento del problema con estas condiciones de borde [Skajaa, 2007]. Por lo tanto, el método numérico no puede brindar una solución adecuada al mismo. En cambio, los resultados obtenidos utilizando condiciones de borde absorbente presentan un excelente ajuste con las soluciones analíticas desarrolladas para medios homogéneos.

El análisis paramétrico realizado permitió el mejor entendimiento del método y la mayor comprensión de sus principales características. En particular pudimos observar que la calidad y precisión de la aproximación de los distintos métodos depende fuertemente de los valores n_{pwl} , k y σ . La configuración que ha brindado los mejores resultados para la fuente y modelo seleccionados, resultó ser $n_{pwl} = 20$, $\epsilon = -1$ (SIPG), y $\sigma = 1000k$.

Los resultados obtenidos para un medio con la inclusión de una fractura muestran el efecto de la misma en la propagación. El mismo consiste en una atenuación de la amplitud de la ondícula incidente para distintas frecuencias y un cambio de fase temporal. Como se describe en los desarrollos analíticos realizados por [Van der Neut et al., 2008], puede verse que este efecto depende de la frecuencia de la onda incidente.

La calidad de los resultados obtenidos nos impulsa a profundizar el trabajo realizado en sus distintas facetas. Por un lado extender el modelado numérico para la propagación de ondas en medios fracturados bi- y tridimensionales; y por otro continuar el análisis del comportamiento de las ondas sísmicas al propagarse a través de una fractura en el medio, profundizando el estudio de la influencia del coeficiente Z a través de distintos modelos para el mismo. De esta manera podremos ampliar nuestro conocimiento sobre las propiedades de las fracturas y mejorar la caracterización de los medios fracturados.

BIBLIOGRAFÍA

- Arfken, G. B., y Weber, H. J., 2005, *Mathematical Methods for Physicists*, Sixth Edition: Elsevier Academic Press, USA.
- Becker, E. B., Carey, G. F., y Oden, J., 1981, *Finite Elements: An Introduction*, Volume I: Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Gauzellino, P. M., Santos, J. E., y Sheen, D., 2001, Frequency domain wave propagation modelling in exploration seismology: *Journal of Computational Acoustics*, **9**, 941–955.
- Golub, G. H., y Van Loan, C. H., 1996, *Matrix Computations*, Third Edition: John Hopkins University Press, USA.
- Hesthaven, J. S., y Warburton, T., 2010, Nodal discontinuous Galerkin methods, algorithms, analysis and applications:, volumen 54 de **Texts in Applied Mathematics** Springer, USA.
- Hsu, C. J., y Schoenberg, M., 1993, Elastic waves through a simulated fractured medium: *Geophysics*, **58**, 964–977.
- Jeffrey, A., 2002, *Applied Partial Differential Equations: An Introduction*: Elsevier Academic Press, USA.
- Landau, L., y Lifschitz, E., 1974, *Teoría de la Elasticidad*: Editorial Reverté, Madrid.
- Riviere, B., 2008, *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: Theory and implementation*:, *Frontiers in Applied Mathematics* SIAM, USA.
- Schoenberg, M., 1980, Elastic wave behavior across linear slip interfaces: *JASA*, **68**, no. 5, 1516–1521.
- Skajaa, A., 2007, *Space-time discontinuous Galerkin methods for the wave equation*: Master's thesis, ETH-Zürich.
- Udías, A., 1999, *Principles of Seismology*: Cambridge University Press, UK.
- Van der Neut, J., Sen, M. K., y Wapenaar, K., 2008, Seismic reflection coefficients of faults at low frequencies: a model study: *Geophysical Prospecting*, **56**, 287–292.