

§2 Construcción de Espacios \mathbb{Z} -D de Elementos Finitos

Elementos Triangulares (Medios Bidimensionales)

Sea Ω : objeto de \mathbb{R}^2

(26)

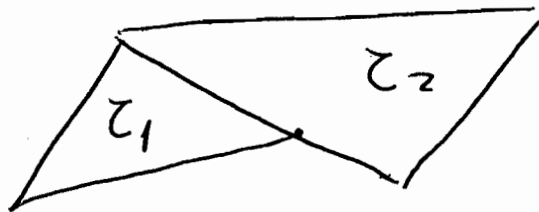
τ_i = interior del triángulo i .

Supongamos que $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \bar{\tau}_i$

(Si $\tau_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset \rightarrow$ el lado de τ_i contenido en $\partial\Omega$ puede ser curvo.)

Hipótesis: Cualquier lado de τ_i es o' un subconjunto de $\partial\Omega$ o' un lado de otro triángulo τ_j .

(O sea no permitimos un caso como el siguiente:



Sea $S_h = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_{\tau_i} \in P_{r-1}(x, y) \right\} \cap C(\bar{\Omega})$

(27)

$h =$ más chico τ_i

$b_i =$ diámetro de la mayor bola sujeta a τ_i

$$\tilde{e} = \frac{\min b_i}{h}$$

$P_{r-1}(x, y) =$ polinomios de grado $\leq r-1$ en (x, y) -
($r \geq 2$)

Ejemplos

i) $r=2$ $P_1 = \{ \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y, \gamma_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq 2 \}$

ii) $r=3$ $P_2 = \{ \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 y^2 + \gamma_5 xy, \gamma_i \in \mathbb{R} \}$

Notar que

$$\dim P_1 = 3 = \frac{r(r+1)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$\dim P_2 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$\text{En geral } \dim P_{r-1} = \frac{r(r+1)}{2}$$

Lagrange Interpolation in \mathbb{R}^2

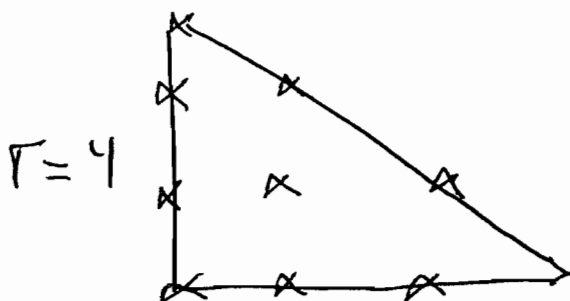
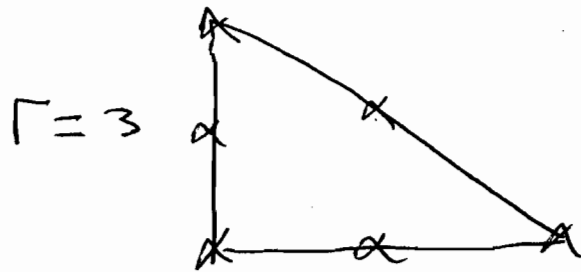
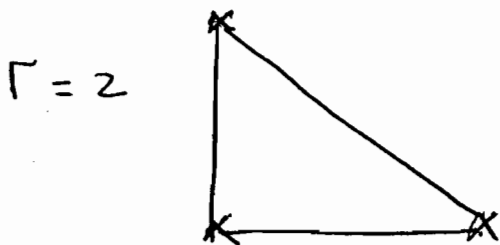
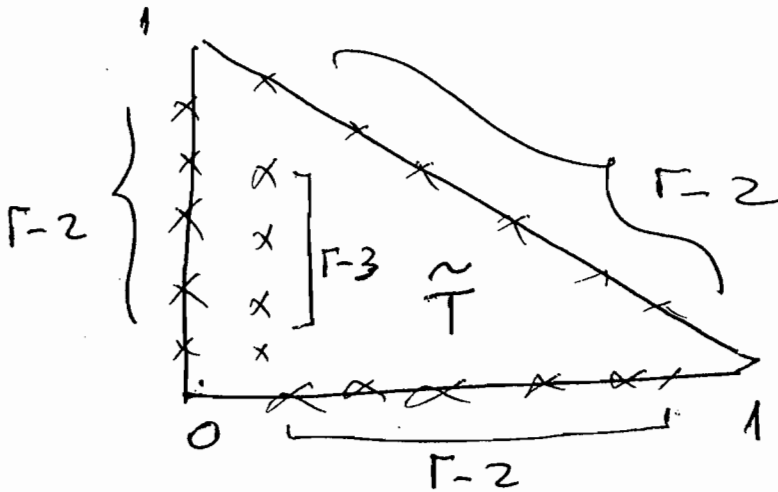
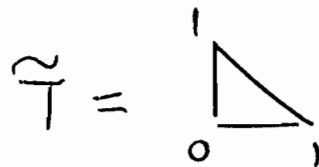
(28)

Ω : polygonal domain in \mathbb{R}^2 .
 \mathcal{T}^h = partition of Ω into nonoverlapping triangles τ_i :
 $\Omega = \bigcup_{i \in I} \tau_i$ τ_i : open triangle

$$S_h = \{ \varphi : \varphi|_{\tau_i} \in P_{\Gamma-1} \cap C^0(\bar{\Omega}), \Gamma \geq 2 \}$$

Note that $S_h \subset H^1(\Omega)$.

Local Description



In the general case we have

$$M = \frac{\Gamma(\Gamma+1)}{2} \text{ nodes} -$$

(29)

Lemma: Given the nodes $(\tilde{a}_j)_{1 \leq j \leq M}$
in \tilde{T} there exists a unique $p \in \mathcal{P}_{\Gamma-1}(\tilde{T})$
such that $p(\tilde{a}_j) = x_j$

Proof: Let $\beta \in \mathcal{P}_{r-1}$ and

(30)

$$P(\tilde{a}_j) = 0 \quad j = 1 \dots \frac{\Gamma(\Gamma+1)}{2}$$

Then $P(0, y)$ is a polynomial of degree $\leq r-1$ in the y -variable that vanishes at r points \rightarrow

$$P(0, y) \equiv 0$$

$$\rightarrow P(x, y) = x P_1(x, y) \quad \deg(P_1) \leq r-2$$

Next

$$P\left(\frac{1}{r-1}, y\right) = \frac{1}{r-1} P_1\left(\frac{1}{r-1}, y\right)$$

vanishes at $r-1$ points \rightarrow

$$P_1\left(\frac{1}{r-1}, y\right) \equiv 0$$

\rightarrow

$$P_1(x, y) = \left(x - \frac{1}{r-1}\right) P_2(x, y)$$

$$\deg(P_2) \leq r-3 \dots$$

$$P(x, y) = x \left(x - \frac{1}{r-1}\right) P_2(x, y)$$

In $r-1$ - steps we get

(31)

$$P(x, y) = x \left(x - \frac{1}{r-1}\right) \cdots \left(x - \frac{r-1}{r}\right) P_{r-1}(x, y)$$

$P_{r-1}(x, y)$ of degree zero and
vanishes at $(1, 0) \rightarrow$

$$P_{r-1}(x, y) \equiv 0 \rightarrow$$

$$P(x, y) \equiv 0$$

As a consequence, the evaluation map

$$E: P_{r-1} \longrightarrow \mathbb{R}^M \quad (32)$$
$$p \longrightarrow (p(\tilde{\alpha}_j))$$

is injective ($E(p) = 0 \rightarrow p = 0$)

Let $\{e_k\}$ be the canonical basis in \mathbb{R}^M .

Then

$$\tilde{\ell}_k = E^{-1}(e_k) \text{ is}$$

is a basis in P_{r-1} and

$$\tilde{\ell}_k(\tilde{\alpha}_j) = \delta_{kj}$$

Thus, if $g \in C^0(\tilde{T})$, we can construct

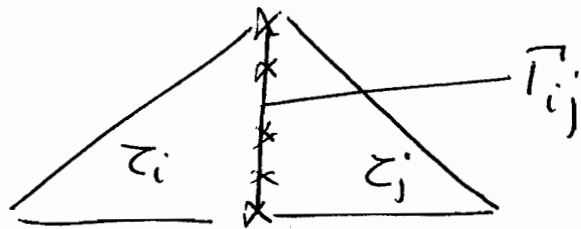
$$\tilde{g}_I \in P_{r-1} :$$

$$\tilde{g}_I(x) = \sum_{k=1}^M g(\tilde{\alpha}_k) \tilde{\ell}_k(x).$$

Then,

$$\|\tilde{g}_I\|_{L^\infty(\tilde{T})} \leq C \|g\|_{L^\infty(\tilde{T})}$$

Also, if τ_i and τ_j are adjacent triangles,



(33)

on Γ_{ij} we have that $u_I|_{\tau_i} - u_I|_{\tau_j}$

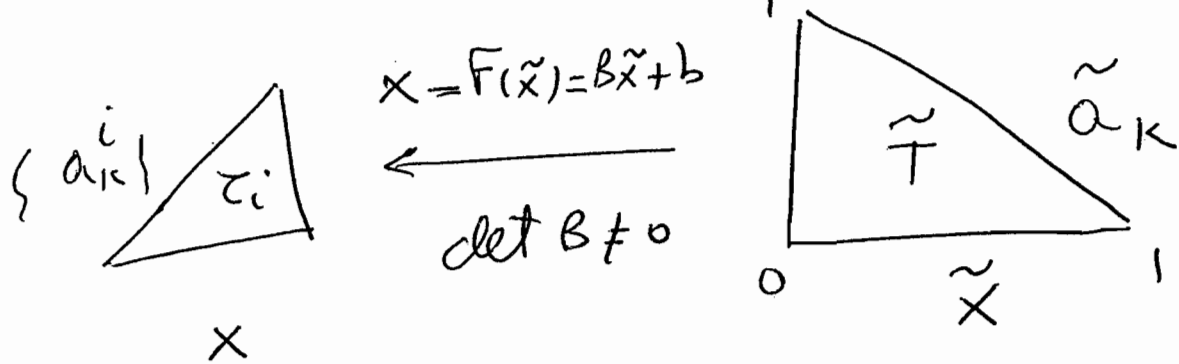
is a polynomial of degree $\Gamma-1$ that vanishes at Γ nodes, so that

$$u_I|_{\tau_i} - u_I|_{\tau_j} \equiv 0$$

Thus, $u_I \in C^0(\bar{\Omega})$.

Next, if τ_i is a triangle in the partition we connect τ_i with \tilde{T} via an affine map

(34)



$$a_k^i = F(\tilde{a}_k) \quad \text{nodes in } \tau_i$$

$$\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k \circ F^{-1}(x) \quad \text{basis in } \tau_i$$

$$g_I(x) = \sum_{k=1}^M g(a_k^i) \varphi_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^M g(F(\tilde{a}_k)) \tilde{\varphi}_k(F^{-1}(x)), \quad x \in \tau_i$$

Then,

$$\|g_I\|_{L^\infty(\tau_i)} \leq C(r) \|g\|_{L^\infty(\tau_i)},$$

$$\|g - g_I\|_{L^\infty(\tau_i)} \leq \|g\|_{L^\infty} + \|g_I\|_{L^\infty} \leq C \|g\|_{L^\infty}$$

Analysis of the Interpolation Error

(35)

Denote by

$b_i =$ diameter of the largest ball B_i
inscribed in τ_i
such that τ_i is star-shaped
w.r.t. the ball B_i

$$h_i = \text{diam}(\tau_i), \quad h = \max_i h_i.$$

QUASIREGULARITY ASSUMPTION $\exists \sigma_0$

such that

$$1 \leq \frac{h}{\min_i b_i} \leq \sigma_0$$

Lemma: If $T^h = (\tau_i)_{i \in I}$ is a quasiregular partition

of Ω , then

$$\inf_{u \in S_h} \|u - \mathcal{U}\|_0 + h \|u - \mathcal{U}\|_1 \leq c h^\tau |u|_\tau, \quad \tau \geq 2$$

~~(2i) $\{z_i\}$ es una partición ϵ -uniforme de Ω . Entonces vale la siguiente propiedad de aproximación:~~

(36)

~~$$(2.43) \inf_{u \in S_h} \{ \|u - u_h\|_0 + h \|u - u_h\|_1 \} \leq C h^r |u|_r$$~~

~~$$\forall u \in H^r(\Omega), \quad r \geq 2.$$~~

A continuación se indica cómo construir otro espacio aproximante ~~usando~~ usando polinomios de grado ≤ 3 definidos localmente usando valores de la función y sus derivadas en los nodos.

Sea

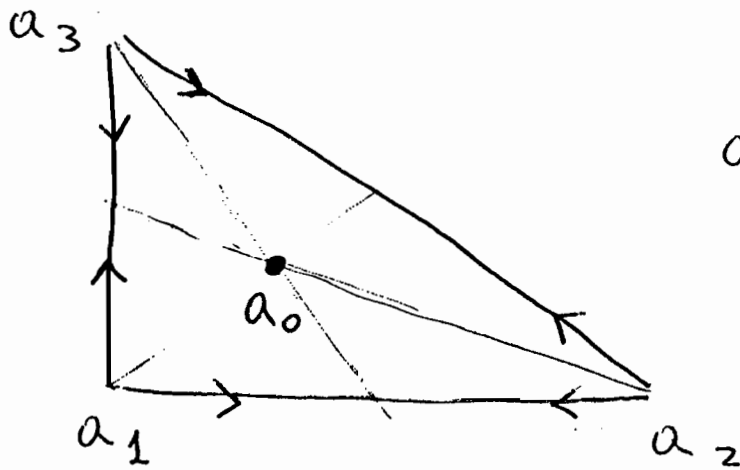
$$(2.44) S_h^3 = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_{z_i} \text{ es un polinomio de grado } \leq 3 \cap C^0(\bar{\Omega}) \}$$

donde

$$h = \max \text{diam } z_i \quad (C^0\text{-p.w. cubics})$$

Descripción local de Sh :

(37)



$a_0 =$ centro de gravedad

Lema 2.7: Si $u \in Sh \rightarrow u/\tau_i$ queda unívocamente determinado por los valores en a_0, a_1, a_2, a_3 y las derivadas en la dirección de las flechas (10 valores) -

Dem: Se demuestra que

$$E: P_3(\tau_i) \rightarrow R^{10}$$

es un isomorfismo ($E u = 0 \rightarrow u \equiv 0$) -

Theorem 2.8 Let S_h^3 be the space defined in (2.44). Then,

(38)

$$(2.45) \inf_{u \in S_h} \{ \|u - \varphi\|_0 + h \|u - \varphi\|_1 \} \leq C h^{\frac{4}{3}} \|u\|_4$$

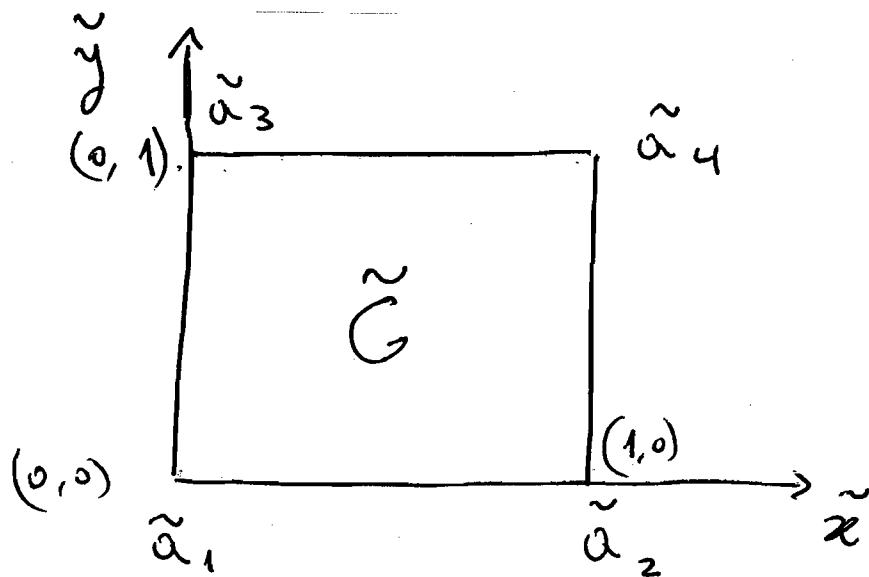
RECTANGULAR ELEMENTS

39

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= \{ \text{polinomios de grado } \leq 1 \text{ en cada variable} \} \\ & \text{on each} \\ &= P_1(x) \otimes P_1(y) \\ &= \{1, x\} \otimes \{1, y\} \\ &= \text{span} \{1, x, y, xy\}. \end{aligned}$$

Es obvio que $\dim P_{1,1} = 4$ —

Sea $\tilde{G} = \hat{R}$ el siguiente rectángulo de referencia



Lema 2.9 Dados $(x_j)_{1 \leq j \leq 4} \exists ! q \in P_{1,1}$

(40)

tal que

$$q(\tilde{\alpha}_j) = x_j \quad j=1-4$$

Dm: Consideremos la evaluación

$$E: P_{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

Baste probar que E es inyectiva.

Supongamos que

$$q(\tilde{\alpha}_j) = 0 \quad j=1-4$$

En particular, $q(0, y)$ es un polinomio de grado ≤ 1 en la variable y que se anula en 2 puntos $(\tilde{\alpha}_1, y \tilde{\alpha}_3)$. Luego

$$q(0, y) \equiv 0, \text{ o sea}$$

$$q(x, y) = x \cdot q_1(y), \quad \text{grado}(q_1) \leq 1.$$

Pero

$$q(1, y) = 1 \cdot q_1(y)$$

$$y \text{ como } q(1, 1) = q_1(1) = 0, \quad q(1, 0) = q_1(0) = 0$$

resulta $g_1 \equiv 0$ y por lo tanto $g \equiv 0$.

Sea ahora \tilde{G} como en la figura anterior. (41)

Si $\tilde{g} \in C^0(\tilde{G})$ sea

$$(2.46) \quad \tilde{g}_I(x) = \sum_{j=1}^4 \tilde{g}(\tilde{a}_j) \tilde{\varphi}_j(x)$$

donde $\tilde{\varphi}_j = E^{-1}(e_j)$ e_j : base canónica de \mathbb{R}^4

o sea que $\tilde{\varphi}_j(\tilde{a}_k) = \delta_{kj}$.

Además

$$(2.47) \quad \|\tilde{g}_I\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^\infty(\tilde{G})}.$$

Podemos ahora construir un interpolante usando

$$(2.46) - (2.47).$$

Lema 2.10.

Sea $(R_i)_{i \in I}$ una partición del rectángulo

Ω ($\Omega = \bigcup_{i \in I} R_i$). Sean $(a_j^{(i)})_{\substack{i \in I \\ 1 \leq j \leq 4}}$

los n vértices del rectángulo R_i .

Sea $u \in C^0(\bar{\Omega})$ y sea

$$h = \max_i \text{diam}(R_i).$$

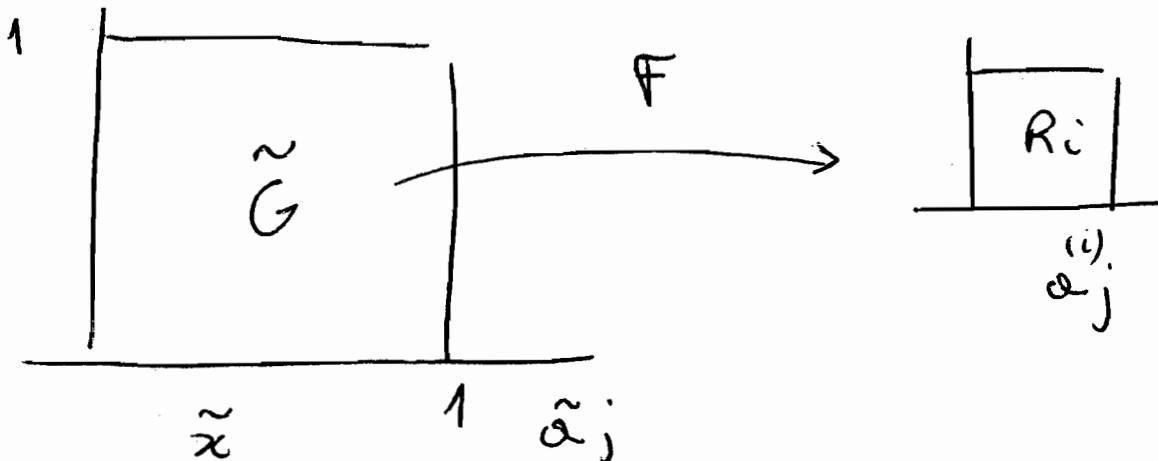
(42)

Sea
 (2.48) $S_h^{1,1} = \{ \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} = \varphi/R_i \in P_{1,1} \} \cap C^0(\bar{\Omega})$

Entonces $\exists u_I \in S_h^{1,1}$ que coincide con u
 en los vértices $(\alpha_j^{(i)})$ de cada rectángulo R_i
 y además

$$(2.49) \quad \|u - u_I\|_{L^\infty(R_i)} \leq C \|u\|_{L^\infty(R_i)}, \quad i \in I.$$

Dem : Conectemos cada R_i con el
 rectángulo de referencia \tilde{G} con una aplicación
 afín $F(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b = x$



Sean $a_j^{(i)} = F(\tilde{a}_j)$, $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j \circ F^{-1}(x)$, $x \in \tau_i$

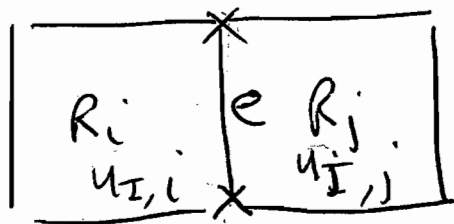
Como $u \in C^0(\bar{R}_i)$ construimos el interpolante local sobre R_i por la fórmula 43

$$(2.50) \quad u_I(x) = \sum_{j=1}^n u(a_j^{(i)}) \varphi_j(x), \quad x \in R_i$$

Obviamente

$$(2.51) \quad \|u_I\|_{L^\infty(R_i)} \leq C \|u\|_{L^\infty(R_i)}$$

Para ver que u_I es globalmente continuo, consideremos 2 rectángulos adyacentes, digamos R_i y R_j .



Basta ver que $q = u_I|_{R_i/e} - u_I|_{R_j/e} \equiv 0$. Pero esto es inmediato porque q es un polinomio de grado ≤ 1 en 1 variable que se anula en 2 puntos.

Hipotesis de Mesurauniformidad

(44)

Sea $T^j = (R_i^{(j)})_{i \in I_j}$ $j = 1, 2, \dots$ una

sucesión de particiones del rectángulo Ω en rectángulos $R_i^{(j)}$, o sea $\Omega = \bigcup_{i \in I_j} R_i^{(j)}$.

Sea

$$h^{(j)} = \max_i \text{diam}(R_i^{(j)})$$

$b_i^{(j)}$ = diámetro de la bola inscrita en $R_i^{(j)}$

$$b^{(j)} = \inf_i b_i^{(j)}$$

$$\sigma^{(j)} = \frac{h^{(j)}}{b^{(j)}}$$

Decimos que la sucesión de particiones $T^{(j)}$ es mesurauniforme si $\exists \sigma_0 > 0$ tal que

$$(2.52) \quad 1 \leq \frac{h^{(j)}}{b^{(j)}} = \sigma_j \leq \sigma_0$$

Podemos ahora demostrar el siguiente teorema de aproximación.

(45)

Teorema 2.11

Sea $(R_i^{(j)})_{i \in I_j}$ una

sucesión de particiones maximales del Ω rectángulo Ω , $h = h^{(j)} = \max_i R_i^{(j)}$

Sea $S_h^{(j)}$ como en el lema 2.10 (cf 2.48)

Entonces, $\forall u \in H^2(\Omega)$.

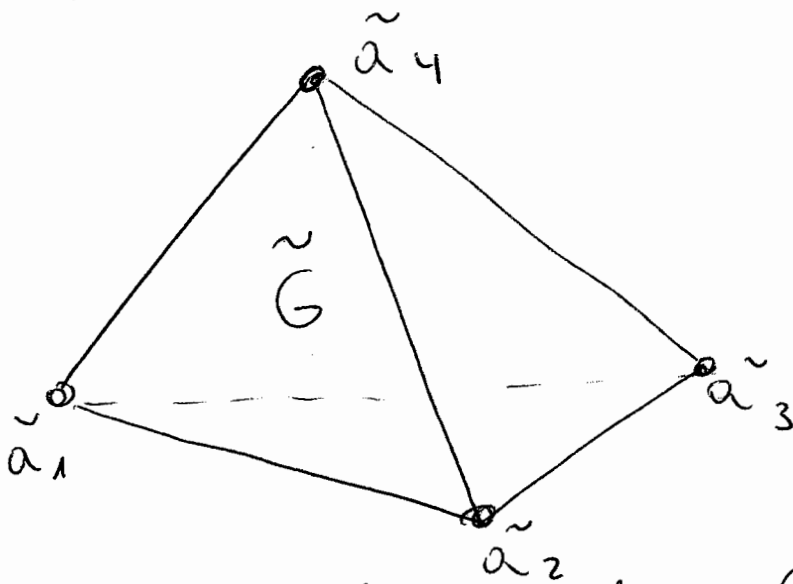
$$\inf_{\mathcal{U} \in S_h} \left\{ \|u - \mathcal{U}\|_0 + h \|u - \mathcal{U}\|_1 + h^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u - \mathcal{U}) \right\|_0 \right\}$$

$$(2.53) \quad \leq C h^2 \|u\|_2, \quad C = C(\sigma_0).$$

3-D FE SPACES

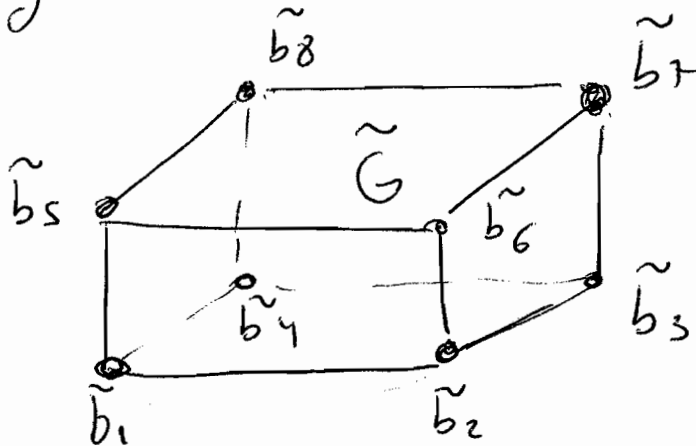
46

SIMPLICIAL CASE



Consider $P_1(\tilde{G}) = \dim P_1(\tilde{G}) = 4$
 $= \{a + bx + cy + dz\}$

3-rectangular element



$Q_1 = \left\{ g : \begin{array}{l} g \text{ is a poly. of degree } \leq 1 \text{ in each} \\ \text{variable} \end{array} \right\}$

$$\dim Q_1 = (k+1)^3 = 8$$

$$\rightarrow \dim Q_1 = 2^3 = 8$$

Lemma: \Rightarrow Any $p \in P_1(\tilde{G})$ is uniquely determined by its values at the

nodal points $\tilde{a}_j, j=1-4$

(see CIARLET, p. 45. Argument FEM FOR ELLIPTIC PROBLEMS, 1980. max barycentric coordinates) -

b) Any $p \in Q_1$ is uniquely determined by its values at the nodal points $b_j, j=1-8$. (see CIARLET, p. 56)

Also note that $P_1 \subset Q_1$.

Using the lemma above, the Dupont-Scott
 lemma and an scaling argument
 we can show the validity of the
 following theorem

(48)

Theorem: Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $U = \bigcup_{i \in I} \tau_i$,

~~Let τ_i be simplices~~ τ_i : simplices (Tetrahedral
 elements)

$\Omega = \bigcup_{i \in I} R_i$ R_i : 3-rectangular elements

Let

$$\gamma_h = \{g: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : g|_{\tau_i} \in P_1(\tau_i) \} \cap C^0(\bar{\Omega})$$

$$\eta_h = \{g: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : g|_{R_i} \in Q_1(R_i) \} \cap C^0(\bar{\Omega})$$

Then

$$\inf_{u \in \gamma_h} \{ \|u - \varphi\|_0 + h \|u - \varphi\|_1 \} \leq c h^2 |u|_2$$

$$\inf_{u \in \eta_h} \{ \|u - \varphi\|_0 + h \|u - \varphi\|_1 \} \leq c h^2 |u|_2.$$