A NEUMANN PROBLEM

$$(P1)\begin{cases} i) & -\nabla\cdot(a(x)\nabla u)+c(x)\,u=f\,, \quad \Omega\,, \\ ii) & a\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=g \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x)\in C^0(\bar\Omega)\,, \quad \nabla a\in[L^\infty(\Omega)]^n\,, \quad c(x)\in C^0(\bar\Omega) \text{ —} \\ \qquad \alpha_0 < a(x),\, c(x) < \alpha_1 \quad \forall\, x\in\bar\Omega \text{ —} \\ f\in L^2(\Omega)\,, \quad g\in H^{-1/2}(\partial\Omega) \text{ —} \end{cases}$$

Necesitamos una fórmula de integración por partes —

Introducimos el espacio

$$H(\mathrm{div},\Omega)=\{\, q\in[L^2(\Omega)]^n : \nabla\cdot q\in L^2(\Omega)\}\,.$$

$$\|q\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}=\left[\|q\|^2_{0,\Omega}+\|\nabla\cdot q\|^2_{0,\Omega}\right]^{1/2}$$

Teorema 3.2 [Girault - Raviart p. 13] FEM for Navier Stokes Eq's.

$[C^\infty(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\mathrm{div}, \Omega)$ –

Lema 3.3 $\quad \nu =$ unit outer normal to $\partial\Omega$.

$$(\nabla\cdot q, v) + (q, \nabla v) = \langle q\cdot\nu, v\rangle, \tag{3.3}$$

$\forall\ q \in H(\mathrm{div}, \Omega),\ v \in H^1(\Omega)$ –

Notación: $\langle f, g\rangle = \int_{\partial\Omega} f\bar{g}\,d\sigma$, $(f,g) = \int_\Omega f\bar{g}\,dx$ –

Dem:
$$\int_\Omega \nabla\cdot F\,dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot\nu\,d\sigma \quad (\text{Gauss})$$

Notar que

$$\nabla\cdot(\bar{v}q) = \bar{v}\,\nabla\cdot q + \nabla\bar{v}\cdot q$$ indica conjugado

luego, si $q \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^n$, $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\int \nabla\cdot q\,\bar{v}\,dx + \int q\cdot\nabla\bar{v}\,dx$$

$$= \int \nabla\cdot q\bar{v}\,dx \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} q\bar{v}\cdot\nu\,d\sigma$$

$$\to (\nabla\cdot q, v) + (q, \nabla v) = \langle q\cdot\nu, v\rangle$$

TEST (P1 i) against $v \in H^1(\Omega)$

$$-(\nabla \cdot (a \nabla u), v) + (cu, v) = (f, v)$$

Using integration by parts as in (3.3) and using (P1 ii)

$$(a\nabla u, \nabla v) - \langle a \nabla u \cdot \nu, v \rangle$$

$$+ (cu, v) = (f, v)$$

$$(a\nabla u, \nabla v) + (cu, v) - \langle g, v \rangle = (f, v)$$

Let us define the bilinear form

$$B(u,v) = (a\nabla u, \nabla v) + (cu, v), \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

Then,

$$B(u,v) = (f,v) + \langle g, v \rangle, \quad v \in H^1(\Omega) -$$

$$\begin{aligned} B(u,u) &= (a\nabla u, \nabla u) + (cu, u) \\ &\geq \alpha_0 \left[\|\nabla u\|_0^2 + \|u\|_0^2 \right] \\ &= \alpha_0 \|u\|_1^2 \quad (B \text{ is } H^1\text{-coercive}) \end{aligned}$$

Also,

$$|B(u,v)| \leq \alpha_1 \left(\|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + \|u\|_0 \|v\|_0 \right)$$

$$\leq C \, \|u\|_1 \, \|v\|_1$$

Then B is H^1-continuous –

Consideremos ahora el siguiente problema
(formulación débil de (3.1))

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(P2) \quad B(u,v) = (f,v) + \langle g, v \rangle, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

[El problema P_2 tiene sentido $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$ $L^2(\Omega)$
$g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$]

Existencia y Unicidad del Problema (P2):

Usamos el siguiente teorema

Teorema (3.5) de Representación de RIEZ (Kolmogorov, Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, p 199 (MIR MOSCÚ) —

Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $(\ ,\ )$. Para toda funcional lineal T continua sobre H existe un único elemento $x_0 \in H$ tal que

$$(3.6) \quad T(x) = (x, x_0) \quad , x \in H .$$

Además $\|T\| = \|x_0\|$.

Recíprocamente, si $x_0 \in H$, (3.6) define una funcional lineal y continua T tal que $\|T\| = \|x_0\|$. Por consiguiente H y H' son isomorfos —

Lema (LAX-MILGRAM)

3.6 Existe una única solución u del problema (P2) para cada $f \in H^{a}(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ — (LAX-MILGRAM) —

Además, dicha solución u satisface la estimación

$$(3.7) \quad \|u\|_{1,\Omega} \leq M\left[\|f\|_{a,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega}\right]$$

(esto implica continuidad respecto de los datos).

Demostración

i) Unicidad. Sean u_1, u_2 soluciones de (P2). Luego,

$$B(u_1-u_2, \varphi) = 0 \qquad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega)$$

Tomando $\varphi = u_1 - u_2$ resulta

$$\alpha_0 \|u_1-u_2\|_1^2 \leq B(u_1-u_2, u_1-u_2) = 0$$

$$\rightarrow \quad u_1 - u_2 \equiv 0$$

ii) Existencia. En $H^1(\Omega)$ consideremos el producto escalar definido por

$$(\varphi, \psi)_B = B(\varphi, \psi)$$ [recordar que $B(\cdot,\cdot)$ es simétrica]

y la norma

$$|||\varphi|||_B^2 = B(\varphi, \varphi).$$

Recordemos que debido a las hipótesis sobre los coef. $a(x)$ y $b(x)$,

$$\alpha_0 \|\varphi\|_1^2 \leq B(\varphi,\varphi) = |||\varphi|||_B^2 \leq \alpha_1 \|\varphi\|_1^2$$

Luego $|||\ |||_B$ y $\|\ \|_1$ son equivalentes y como $(H^1, \|\ \|_1)$ es un espacio de Banach resulta que $(H^1, (\ )_B)$ es un espacio de Hilbert —

~~Estud~~ Consideremos en $(H^1, (\ )_B)$ en funcional

$$T(\varphi) = (f, \varphi) + \langle g, \varphi \rangle$$

T es lineal y además

$$|T(\varphi)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega} \|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega}$$

$$\leq \|f\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega} + C \|g\|_{-1/2,\partial\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

$$= (\|f\|_{0,\Omega} + C\|g\|_{-1/2,\partial\Omega}) \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

$$\leq \frac{1+C}{\sqrt{\alpha_0}} (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega}) |||\varphi|||_B$$

Esto implica que T es un funcional

lineal y continuo sobre $(H^1, (\ )_B)$ y por el teorema anterior (Riesz) existe un único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$T(\varphi) = (\varphi, u)_B = B(\varphi, u) = B(u, \varphi)$$

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$, o sea

$$(*) \quad B(u,\varphi) = (f,\varphi) + \langle g, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Esto completa la dem. de la existencia de u.

Además, eligiendo $u = \varphi$ en $(*)$,

$$\alpha_0 \|u\|_1^2 \leq B(u,u) = (f,u) + \langle g, u\rangle$$

$$\leq \|f\|_{0,\Omega} \|u\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega} \|u\|_{1/2,\partial\Omega}$$

$$\leq M \left[\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\Omega}\right] \|u\|_{1,\Omega}$$

Luego

$$\|u\|_1 \leq M \left[\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega}\right]$$

lqqd

Resolución Aproximada del Problema (P1) 58

Sea $\mathcal{M}_h$ (ó S_h), $0 < h \leq 1$, una familia de espacios tales que

i) $\dim \mathcal{M}_h < \infty$, $\mathcal{M}_h \subset H^1(\Omega)$

ii) $\inf\limits_{\varphi \in \mathcal{M}_h} \{ \| v - \varphi \|_0 + h \| v - \varphi \|_1 \} \leq c \|v\|_2 h^2$

(ó también $\leq c \|v\|_s h^s$, $1 \leq s \leq r$) $(r \geq 2)$

Motivado por el problema (P2), formulamos el Problema (Ph) como sigue:

Encontrar $u_h \in \mathcal{M}_h$ tal que

$$(Ph) \quad B(u_h, \varphi) = (f, \varphi) + \langle g, \varphi \rangle, \; \forall \varphi \in \mathcal{M}_h.$$

Lema 3.12 Existe una única solución $u_h \in \mathcal{M}_h$ de (Ph) para cada par (f, g), $f \in H^0(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Dem: Sea $(\varphi_i)_{i=1}^{N}$ una base de $\mathcal{V}_h$ y sea

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \, .$$

Entonces obviamente u_h es solución de $(P_h) \Leftrightarrow$

$$(3\text{-}12) \quad B(u_h, \varphi_j) = (f, \varphi_j) + \langle g, \varphi_j \rangle \, , \, 1 \le j \le N \, -$$

Sean

$$\mathcal{A} = (a_{ij}) = B(\varphi_i, \varphi_j) \quad , \, 1 \le i, j \le N \, ,$$

$$R = (R_j) = (f, \varphi_j) + \langle g, \varphi_j \rangle \quad , \, 1 \le j \le N$$

Luego podemos escribir (3-12) en forma algebraica como

$$(3\text{-}13) \qquad A \, C = R$$

Veamos que A es definida positiva: En efecto, sea $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ y sea

$$\xi = \sum_{i=1}^{N} x_i \varphi_i \quad \in \mathcal{V}_h \, -$$

Entonces,

$$x^t \mathcal{A} x = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{ij} B(\varphi_i, \varphi_j)\, x_i x_j = B\Big(\sum_i x_i \varphi_i, \sum_j x_j \varphi_j\Big)$$

$$= B(\xi, \xi) \geq \alpha_0 \|\xi\|_1^2 > 0 .$$

Luego $\mathcal{A}$ es definida positiva y por lo tanto el sistema lineal (3.13) tiene solución única — lqqd.

Estimación del Error para el método Galerkin

(o sea para $u - u_h$) —

Teorema 3.13 Supongamos que $a(x)$, $c(x)$, Ω y $\partial\Omega$ son tales que el problema diferencial

$$-\nabla\cdot(a \nabla u) + c u = f$$

$$+ a \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$$

satisface la estimación (regularidad elíptica)

$$(3.13.1)\qquad \|u\|_{K+2,\Omega} \leq M\left[\|f\|_{K,\Omega} + \|g\|_{K+1/2,\partial\Omega}\right], \quad K \geq 0$$

Entonces

$$(3.14)\quad \|u-u_h\|_{0,\Omega} + \|u-u_h\|_{-1/2,\partial\Omega} \leq c\,\|u\|_r\, h^{r}$$

$$(3.15)\quad \|u-u_h\|_{1,\Omega} + \|u-u_h\|_{1/2,\partial\Omega} \leq c\,\|u\|_r\, h^{r-}$$

$[r \geq 2]$

Dem: Sea $\xi = u - u_h$. Luego, como

$$B(u,v) = (f,v) + \langle g,v\rangle, \quad v \in H^1(\Omega),$$

$$B(u_h,v) = (f,v) + \langle g,v\rangle, \quad v \in \mathcal{M}_h$$

resulta

$$(3.15.1)\qquad B(\xi,v) = 0, \quad v \in \mathcal{M}_h.$$

Elegimos $\mathcal{M}_h \ni v = u - u_h + \chi - u = \xi + \chi - u, \quad \chi \in \mathcal{M}_h$

Luego

$$\alpha_0 \|\xi\|_1^2 \leq B(\xi,\xi) = B(\xi, v + u - \chi)$$

$$= B(\xi, u-\chi)$$

$$\leq M\, \|\xi\|_1 \|u-\chi\|_1$$

Luego

$$(3.15.2) \quad \|\xi\|_{1,\Omega} \leq c \inf_{\chi \in M_h} \|u-\chi\|_{1,\Omega} \leq c\, h^{r-1} |u|_{r,\Omega}$$

Además

$$\|\xi\|_{1/2,\partial\Omega} \leq C \|\xi\|_{1,\Omega} \leq c\, h^{r-1} |u|_{r,\Omega} \,.$$

Luego vale (3.15). Para (3.14) necesitamos el siguiente resultado:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \chi \in H^1(\Omega) \text{ y } B(\chi,\varphi)=0 \quad \forall \varphi \in M_h \rightarrow \\[1em] (3.16) \qquad \|\chi\|_0 \leq c\, h \|\chi\|_1 \,. \end{array}}$$

En efecto: sea $w \in H^2(\Omega)$ la solución de

$$\mathcal{L}(w) = -\nabla\cdot(a\nabla w) + c w = \chi$$

$$a \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$$

Luego

$$\cancel{B(\chi, w) = (a\nabla\chi, \nabla w) + (c\chi, w)}$$

$$\cancel{= (-\nabla\cdot(a\nabla w), \chi) + \langle a \tfrac{\partial w}{\partial \nu}, \chi \rangle}$$

63

$$B(\chi,\omega) = B(\omega,\chi) = (a\nabla\omega, \nabla\chi) + (c\omega,\chi)$$

$$= -(\nabla\cdot(a\nabla\omega),\chi) + \langle \underbrace{a\frac{\partial\omega}{\partial\nu}}_{=0},\chi\rangle + (c\omega,\chi)$$

$$= (\mathcal{L}\omega,\chi) = (\chi,\mathcal{L}\omega)$$

Entonces,

$$\|\chi\|_0^2 = (\chi,\chi) = (\mathcal{L}\omega,\chi) = (\chi,\mathcal{L}\omega)$$

$$= B(\chi,\omega) = B(\chi,\omega-\varphi) \quad \forall$$

$$\leq M\,\|\chi\|_1\,\|\omega-\varphi\|_1 \qquad \forall\,\varphi\in\mathcal{M}_h$$

$\rightarrow$

$$\|\chi\|_0^2 \leq M\,\|\chi\|_1 \inf_{\varphi\in\mathcal{M}_h} \|\omega-\varphi\|_1$$

$$\leq M\,\|\chi\|_1\, h\,\|\omega\|_2$$

(reg. elíptica) $\leq M\,\|\chi\|_1\, h\,\|\chi\|_0$

Luego

$$\|\chi\|_0 \leq c\,h\,\|\chi\|_1 .$$

y vale (3.16) —

También necesitamos este otro resultado:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \quad \chi \in H^1(\Omega) \quad \text{y} \quad B(\chi,\varphi)=0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_h \\ (3.17) \qquad \|\chi\|_{-1/2,\partial\Omega} \leq c\, h \, \|\chi\|_1 \end{array}}$$

En efecto, sea $\omega \in H^2(\Omega)$ la solución de

$$\mathcal{L}(\omega) = -\nabla\cdot(a\nabla\omega) + c\omega = 0 \ , \Omega.$$

$$a\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \gamma, \ \partial\Omega$$

con $\gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

~~Notar que como $\chi \in H^1(\Omega) \Rightarrow \chi|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.~~

Entonces,

$$\langle \chi, \gamma \rangle = \langle \chi, a\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \rangle$$

$$= \langle \chi, a\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \rangle + (\overset{=0}{\mathcal{L}\omega}, \chi)$$

$$= \langle \chi, a\frac{\partial\omega}{\partial\nu} \rangle - (\nabla\cdot(a\nabla\omega), \chi) + (c\omega, \chi)$$

$$= \langle \chi, \cancel{a\frac{\partial\omega}{\partial\nu}} \rangle + (a\nabla\omega, \nabla\chi) - \langle \cancel{a\frac{\partial\omega}{\partial\nu}}, \chi \rangle$$

$$+ (c\omega, \chi) = B(\omega, \chi) = B(\chi, \omega)$$

$$\langle \chi, \gamma \rangle = B(\chi, \omega) = B(\chi, \omega - \varphi) \quad , \varphi \in M_h$$

Luego

$$|\langle \chi, \gamma \rangle| \leq M \|\chi\|_1 \|\omega - \varphi\|_1 \qquad \forall \ \varphi \in M_h$$

$$|\langle \chi, \gamma \rangle| \leq M \ \|\chi\|_1 \inf_{\varphi \in M_h} \|\omega - \varphi\|_1$$

$$\leq M \ \|\chi\|_1 \ h \ \|\omega\|_{2,\Omega}$$

$$\text{(Reg. elíptica)} \quad \leq M \|\chi\|_1 \ h \ \|\gamma\|_{1/2, \partial\Omega}$$

Luego,

$$|\chi|_{-1/2,\partial\Omega} = \sup \frac{|\langle \chi, \gamma \rangle|}{\|\gamma\|_{1/2,\partial\Omega}}$$

$$\leq M \ h \ \|\chi\|_1$$

Luego vale (3.17)

Usando ahora ~~(3.16)~~ (3.15), ~~y (3.16) (3.17), tenemos~~

~~$\|u-u_h\|_{2,\Omega}$~~ Como $\xi = u - u_h$ satisface

(3.15.1) valen (3.16) y (3.17) para $\chi = \xi$

Luego,

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le c h \, \|u-u_h\|_{1,\Omega} \le c\, h^{r} \, \|u\|_{r,\Omega}.$$

$$\|u-u_h\|_{-1/2,\partial\Omega} \le c h \, \|u-u_h\|_{1,\Omega} \le c\, h^{r} \, \|u\|_{r,\Omega}.$$

Luego vale (3.14). lqqd —

__Observaciones__ Notar que sólo usamos (3.13.1) para $k=0$ (o sea regularidad H^2) — Si esto es todo lo que se puede pedir a u como propiedad, entonces

$$\inf_{\chi \in M_h} \|u-\chi\|_{1,\Omega} \le c h \, |u|_{2,\Omega}$$

(o sea usamos $r=2$ en (3.15.2)) — Esto implica que si $u \in H^2(\Omega)$, $u \notin H^k(\Omega), k>2$, usar funciones lineales por trozos es lo mejor que podemos hacer ~~para~~ (globalmente) para

construir la solución u_h –
Esto ocurre por ejemplo cuando Ω es un polígono convexo.

En general, si $u \in H^{k+2}(\Omega)$, $k \geq 0$,

$$\inf_{\chi \in M_h} \|u - \chi\|_{1,\Omega} \leq c\, h^{k+1} \|u\|_{k+2,\Omega}$$

si usamos polinomios de grado $\leq k+1$ por trozos, esto es, en general "deben" usarse polinomios de un grado menor al exponente del espacio de Sobolev a que pertenece la solución del problema diferencial.

Sin embargo, "localmente" u puede ser más suave que "globalmente", y se podrán usar polinomios de mayor grado en el interior del dominio Ω dependiendo del problema a tratar –

Corolario 3.13.1

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}+\|u-u_h\|_{-1/2,\partial\Omega}\leq c\,h^{r}\Big[\|f\|_{r-2}+\|g\|_{r-2+1/2,\partial\Omega}\Big],\quad r\geq 2$$

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}+\|u-u_h\|_{1/2,\partial\Omega}\leq C\,h^{r-1}\Big[\|f\|_{r-2,\Omega}+\|g\|_{r-2+1/2,\partial\Omega}\Big],\quad r\geq 2$$

Observación: En gral si
$$B(\varsigma,v)=0\quad\forall\, v\in\mathcal{M}_h\ \longrightarrow$$

$$\|\varsigma\|_{-s}\leq c\,\|u\|_q\, h^{q+s},\quad -1\leq s\leq r-2,\quad 1\leq q\leq r,$$

Antes de pasar a estudiar el problema de Dirichlet veamos como tratar un problema de Neumann un poco mas general.

Consideremos ahora el problema

$$(3.18) \quad \begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u) + cu = f, & \text{en } \Omega \\ a\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pero ahora quitamos la hipótesis $c > 0$.

Pediremos que (3.18) tenga solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ y que

$$(3.19) \quad \|u\|_{2,\Omega} \le C\,[\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega}] \; -$$

Además $\alpha_1 \ge a(x) \ge \alpha_0 > 0$,

$$c(x) \ge c_* \qquad c_* \text{ negativo}$$

$(c_* = -\beta \;, \beta > 0)$

Integrando como antes por partes, (3.18) se formula en forma débil como:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

(3.20) $$B(u,v) = (f,v) + \langle g,v\rangle, \quad v \in H^1(\Omega)$$

Veamos que (Desigualdad de Gårding)

(3.21) $$B(v,v) \geq C_1 \|v\|_1^2 - C_2 \|v\|_0^2 \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

En efecto

$$B(v,v) = \int_\Omega a\,(\nabla v)^2 dx + \int_\Omega c|v|^2\, dx$$

But $\left|\int c v^2\right| \leq C_* \int v^2 \rightarrow \int c v^2 \geq -C_* \int v^2$

$$\geq \alpha_0 \|\nabla v\|_0^2 - C_* \|v\|_0^2$$

$$= \alpha_0 \left(\|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2\right) - (C_* + \alpha_0)\|v\|_0^2$$

$$= \underbrace{\alpha_0}_{C_1} \|v\|_1^2 - \underbrace{(\alpha_0 + C_*)}_{C_2 > 0} \|v\|_0^2$$

El método Galerkin se formula como antes: Encontrar $u_h \in \mathcal{M}_h$ tal que

(3.22) $$B(u_h, \varphi) = (f, \varphi) + \langle g, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{M}_h.$$

Teorema 3.14 El problema (3.22) tiene solución única para h pequeño.

Dem: Sean $u_h^1, u_h^2 \in \mathcal{M}_h$ 2 soluciones de (3.22) y sea $\chi = u_h^1 - u_h^2$.

Entonces,

$$B(\chi, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_h -$$

Eligiendo $\varphi = \chi$,

$$B(\chi, \chi) = 0 \geq c_1 \|\chi\|_1^2 - c_2 \|\chi\|_0^2$$

Luego,

$$\|\chi\|_1^2 \leq \frac{c_2}{c_1} \|\chi\|_0^2 \tag{3.23}$$

Recordemos ahora que si

$$B(\chi, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_h \rightarrow$$

$$\|\chi\|_0 \leq c h \|\chi\|_1 \tag{3.24}$$

Luego, de (3.23) y (3.24) resulta que

$$\|\chi\|_1 \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|\chi\|_0 \leq c_3 h \|\chi\|_1$$

$$(1 - c_3 h) \, \|X\|_1 \leq 0$$

~~Si~~ ~~luego~~ Para h suficientemente pequeño $1 - c_3 h = c_4 > 0$ y por lo tanto debe ser $\|X\|_1 = 0 \longrightarrow X \equiv 0$ lo que prueba la unicidad —

Estimación del error de interpolación

Teorema 3.15

$$\|u - u_h\|_0 + h \, \|u - u_h\|_1 \leq c \, h^r \, \|u\|_r \tag{3.25}$$

para h pequeño —

Dem: Como $B(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in M_h$

sabemos que

$$\|u - u_h\|_0 \leq c \, h \, \|u - u_h\|_1 \, . \tag{3.26}$$

Estimamos entonces $\|u - u_h\|_1$ usando la desigualdad de Gårding (3.21).

$$\|u-u_h\|_1^2 \le B(u-u_h, u-u_h) + c_2\|u-u_h\|_0^2$$

$(u_h \in \mathcal{M}_h)$

$$= B(u-u_h, u) + c_2\|u-u_h\|_0^2$$

$$= B(u-u_h, u-\varphi) + c_2\|u-u_h\|_0^2$$

$$\le C\|u-u_h\|_1 \|u-\varphi\|_1 + c\,h^2\|u-u_h\|_1^2 \,, \varphi\in\mathcal{M}_h$$

Luego

$$(1-ch^2)\|u-u_h\|_1^{\cancel{2}} \le C\cancel{\|u-u_h\|_1}\,\|u-\varphi\|_1 .$$

$$\to \quad (1-ch^2)\|u-u_h\|_1 \le C_5 \inf_{\varphi\in\mathcal{M}_h}\|u-\varphi\|_1$$

$$\le C_5 h^{r-1}\|u\|_{r,\Omega}.$$

(h pequeño)

Sea $h = \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \to 1-ch^2 = \frac{1}{2}$ y

(3.27) $\|u-u_h\|_1 \le c\,h^{r-1}\|u\|_{r,\Omega}$

Luego de (3.27) y (3.26),

$\|u-u_h\|_0 \le c\,h^r\|u\|_{r,\Omega}$ para h suf. pequeño

lqqd —

El Problema de Dirichlet.

Encontrar u tal que

$$(3.28)\quad \begin{aligned} \nabla\cdot(a\nabla u) + cu &= f \quad, \text{ en } \Omega, \\ u &= 0 \quad, \text{ en } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Supondremos que $f \in L^2(\Omega)$, $a(x) \geq \alpha_0 > 0$,

$c(x) \geq c_* \geq 0$

Sea

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\ \|_1} = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

Luego, si $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(Lu, v) = (-\nabla\cdot(a\nabla u) + cu, v)$$

$$= (a\nabla u, \nabla v) + (cu, v) - \underbrace{\langle a\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\rangle}_{=0 \text{ porque } v=0 \text{ en } \partial\Omega.}$$

$$= B(u,v) = (f,v) .$$

Forma débil de (3.28): Encontrar $u \in H^1_0(\Omega)$ tal que

$$(3.29) \qquad B(u,v) = (f,v) \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega).$$

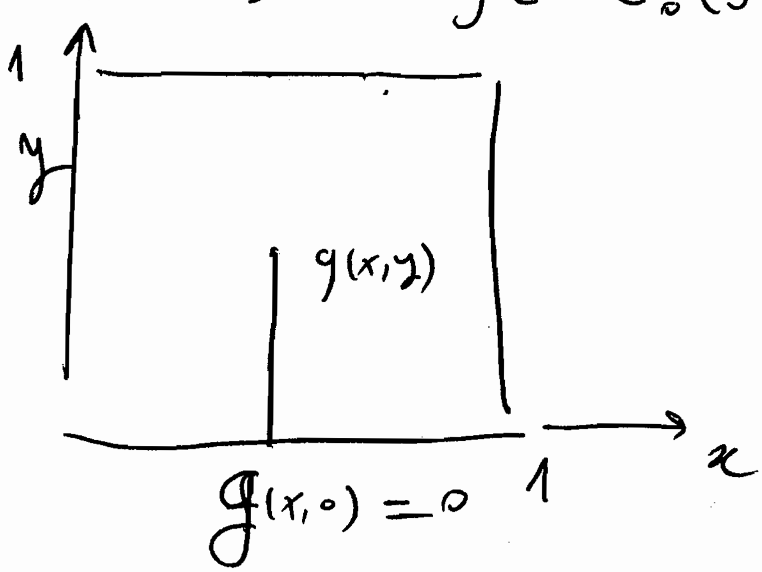
Para probar existencia y unicidad del problema (3.29) necesitamos esta desigualdad

<u>Lema 3.16</u> Si $g \in H^1_0(\Omega) \rightarrow$

$$(3.30) \qquad \|g\|_{0,\Omega} \leq C\, |g|_{1,\Omega} = C\, |\nabla g|_{1,\Omega}$$

(Desigualdad de Poincaré).

<u>Dem</u> (Adams, Agmon). Aquí lo hacemos para $\Omega = [0\ 1]^2$. Sea $g \in C^\infty_0(\Omega)$. Entonces,



$$g(x,y) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial \tau} g(x,\tau)\, d\tau$$

$$\rightarrow \int_0^1 |g(x,y)|^2 dx = \int_0^1 dx \left| \int_0^y \frac{\partial}{\partial \tau} g(x,\tau)\, d\tau \right|^2$$

Hölder en $\underline{\tau}$

$$\leq \int_0^1 dx \int_0^y \left|\frac{\partial}{\partial \tau} g(x,\tau)\right|^2 d\tau \cdot \int_0^y 1\, d\tau$$

$$\leq \int_0^1 dx \int_0^1 d\tau \left| \frac{\partial}{\partial \tau} g(x,\tau)\right|^2 d\tau$$

$$\leq \| \nabla g \|_0^2$$

Integrando en la variable y resulta

$$\|g\|_0 \leq \|\nabla g\|_0 = |\Omega|\, \|\nabla g\|_0$$

En un dominio general resulta

$$\|g\|_0 \leq C(\Omega)\, \|\nabla g\|_0 \qquad \forall g \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema 3.17 Existe una única solución del problema (3.29) para cada $f \in L^2(\Omega)$ –

Dem:

$$B(v,v) = (a\nabla v, \nabla v) + (cv, v)$$

$$\geq \alpha_0 \|\nabla v\|_0^2 + c_* \|v\|_0^2$$

$(c_* \geq 0)$ $$\geq \alpha_0 \|\nabla v\|_0^2$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} \|\nabla v\|_0^2 + \frac{\alpha_0}{2} \|\nabla v\|_0^2$$

por (3.30) $$\geq \frac{\alpha_0}{2} \|\nabla v\|_0 + \frac{\alpha_0}{2} \left[C(\Omega)\right]^{-1} \|v\|_0^2$$

$$\geq \underbrace{\min\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\alpha_0}{2\, C(\Omega)}\right)}_{= C_6 > 0} \|v\|_1^2$$

Además

$$|B(v,v)| \leq M \|v\|_1^2$$

luego

(3.31) $$C_6 \|v\|_1^2 \leq B(v,v) \leq C_7 \|v\|_1^2$$

Ahora (3.31) dice que $B(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto por el teorema de representación de Riesz 3.5 existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = (f,v) \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

(ya que $v \longrightarrow (f,v)$ es un funcional continuo sobre $H_0^1(\Omega)$

$$\left(|T_f(v)| = |(f,v)| \le \|f\|_0 \|v\|_0 \le \|f\|_0 \|v\|_1 \right.$$

$$\left. \rightarrow \|T_f\| \le \|f\|_0 \right)$$

Esto completa la demostración —

~~Resolución Aproximada del Problema de Dirichlet (3.28)~~.

Regularidad Elíptica (ver Agmon). La solución u de (3.28) satisface

(3.32) $$\|u\|_{k+2,\Omega} \le M \|f\|_{k,\Omega}, \quad k \ge 0 \text{ —}$$

Resolución Aproximada de (3.28)

Sea $\mathcal{M}_h$ una familia de espacios tales que

i) $\dim \mathcal{M}_h < \infty$, $\quad \mathcal{M}_h \subset H_0^1(\Omega)$,

(3.33)

ii) $$\inf_{\varphi \in \mathcal{M}_h} \{ \|v - \varphi\|_0 + h \|v - \varphi\|_1 \} \leq c \|v\|_r h^r$$

$r \geq 2$

[Estos espacios se construyen como se explicó antes pero dando valor nulo sobre $\partial\Omega$. el interpolante u_I de u]

Problema Aproximado: Encontrar $u_h \in \mathcal{M}_h \subset H_0^1(\Omega)$

tal que

(3.34) $$B(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_h$$

ESTIMACION DEL ERROR del METODO (3.34)

Usando (3.31),

$$C_6 \|u - u_h\|_1^2 \leq B(u - u_h, u - u_h)$$

$$= B(u - u_h, u) = B(u - u_h, u - \varphi)$$

$$\leq C_7 \|u - u_h\|_1 \|u - \varphi\|_1 \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_h$$

luego,

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_7 \inf_{\varphi \in S_h} \|u - \varphi\|_{1,\Omega} \leq C h^{r-1} \|u\|_{r;\Omega}$$

$$\leq C h^{r-1} \|f\|_{r-2,\Omega} .$$

Veamos ahora la estimación para $\|u-u_h\|_{0,\Omega}$

Sea $g \in L^2(\Omega)$ y sea $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

la solución de

$$L z = -\nabla\cdot(a\nabla z) + c z = g \quad \text{en } \Omega$$

$$z = 0 \quad , \partial\Omega$$

Entonces

$$(u-u_h, g) = (u-u_h, Lz)$$

$$= (u-u_h, -\nabla\cdot(a\nabla z) + cz)$$

$$= (\nabla(u-u_h), \nabla z) - \langle a\frac{\partial z}{\partial \nu}, \underbrace{u-u_h}_{=0}\rangle + (cz, u-u_h)$$

$$= B(u-u_h, z)$$

$$= B(u-u_h, z-\varphi) \leq C\,\|u-u_h\|_1\,\|z-\varphi\|_1$$

$$\leq C\,h^{r-1}\|f\|_{r-2,\Omega}\,\|z-\varphi\|_1 \qquad \forall \varphi \in M_h$$

Entonces,

$$\underline{|(u-u_h, g)|} \leq c h^{r-1} \|f\|_{r-2} \inf_{\varphi \in \mathcal{M}_h} \|z-\varphi\|_1$$

$$\leq c h^{r-1} \|f\|_{r-2,\Omega} \|z\|_{2,\Omega} h$$

(regularidad elíptica $\quad \leq c h^{r} \|f\|_{r-2,\Omega} \|g\|_{0,\Omega}$

Luego

$$\|u-u_h\|_0 = \sup_{\substack{g \in L^2(\Omega) \\ g \neq 0}} \frac{|(u-u_h, g)|}{\|g\|_{0,\Omega}}$$

$$\leq c h^{r} \|f\|_{r-2,\Omega}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\|u-u_h\|_{0,\Omega} + h \|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq c h^{r} \|f\|_{r-2,\Omega}. \quad r \geq 2.}$$