



MATHEMATICS SIN FRONTERAS  
MINI CURSO 2

# Flujos geométricos: Deformando la geometría en el tiempo

Profesora Mariel Sáez Trumper  
mariel@mat.uc.cl

Ayudante Sebastián Muñoz Thon  
samunoz5@uc.cl

2021

# Índice

<b>1. Clase I</b>	<b>2</b>
1.1. Basic definitions and examples . . . . .	2
1.2. ¿Cómo calculamos largos? . . . . .	3
1.3. Algunas cantidades geométricas . . . . .	4
1.3.1. El vector tangente . . . . .	4
1.3.2. El arco parámetro . . . . .	5
1.3.3. ¿Qué es la curvatura? . . . . .	7
1.4. Ejercicios . . . . .	9
<b>2. Clase II</b>	<b>10</b>
2.1. ¿Qué es la curvatura? (Continuación) . . . . .	10
2.2. El principio del máximo . . . . .	13
2.3. Una aplicación del principio del máximo . . . . .	13
2.4. De regreso al FAC . . . . .	15
2.5. Ejercicios . . . . .	16
<b>3. Clase III</b>	<b>17</b>

Estas notas fueron creadas para el curso de Flujos Geométricos enseñado por la profesora Mariel Sáez en el encuentro Mathematics Sin Fronteras. Si usted encuentra algún error, por favor envíenos un correo electrónico.

# 1. Clase I

En esta primera clase definimos qué es una curva, su largo, y otras cantidades geométricas tales como su vector tangente y normal, y su curvatura.

## 1.1. Basic definitions and examples

**Definición 1.1.** Una *curva* en  $M$  es una función  $\gamma: I \rightarrow M$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

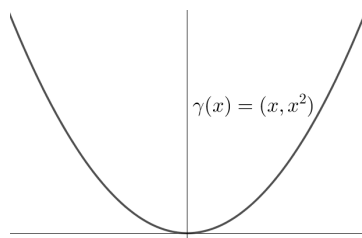
*Observación.*

1. En general,  $I$  será un intervalo.
2. En este curso  $M$  siempre será un espacio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, la definición anterior se puede generalizar al caso en que  $M$  es una variedad diferenciable.
3. Siempre asumiremos que  $\gamma$  es lo suficientemente suave, i.e., que  $\gamma_i(t)$  son suficientemente suaves para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  ( $C^3$  es más que necesario para nuestros propósitos).

**Ejemplo 1.2.**

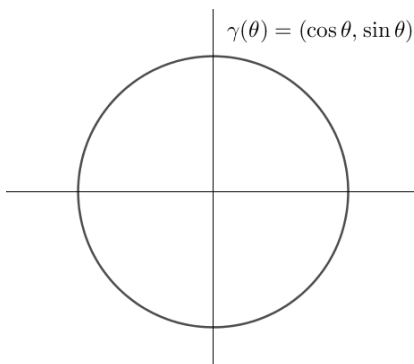
- 1.

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\mapsto (x, x^2).\end{aligned}$$



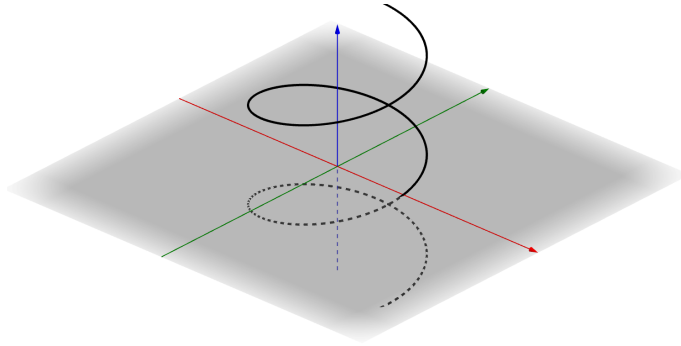
- 2.

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta).\end{aligned}$$



3.

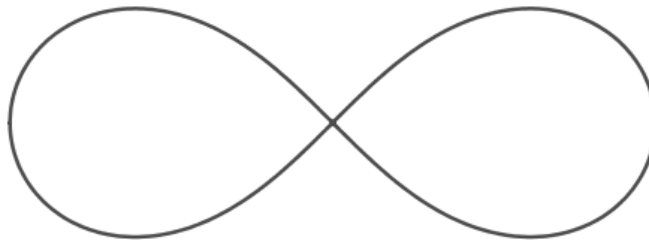
$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, t).\end{aligned}$$



**Definición 1.3.** La curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  es *cerrada* si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Definición 1.4.** Una curva está *incrustada* si no se auto interseca. Esto es, que la función sea inyectiva. En caso contrario, decimos que la curva está *inmersa*.

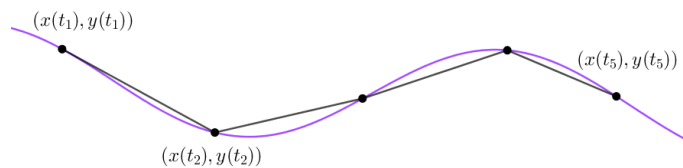
**Ejemplo 1.5.** La *lemniscata* es una ejemplo de curva inmersa que no está incrustada.



## 1.2. ¿Cómo calculamos largos?

Consideremos  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si queremos obtener el largo de una porción de esta curva, lo que podemos hacer es primero aproximar esta porción en cuestión por un camino poligonal, y luego calcular el largo de este camino poligonal, obteniendo de esta forma una aproximación del largo buscado

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la siguiente curva y el siguiente camino poligonal



En este caso, si escribimos  $\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$  y  $\Delta y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$ , entonces obtenemos la aproximación

$$L \sim \sum_{i=1}^4 \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

El ejemplo anterior motiva la siguiente definición

**Definición 1.7.** Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva. El *largo* de  $\gamma$  es definido por

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

**Ejemplo 1.8.**

1. Consideremos la curva

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\mapsto 2(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta). \end{aligned}$$

Tenemos que  $\gamma'(\theta) = 2(-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ . Entonces,

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = 4\pi.$$

2. Ahora consideremos

$$\begin{aligned} \gamma: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (t, 2t + 1). \end{aligned}$$

Notemos que  $\gamma'(t) = (1, 2)$ . Entonces,

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4} dt = 2\sqrt{5}.$$

## 1.3. Algunas cantidades geométricas

### 1.3.1. El vector tangente

**Definición 1.9.** Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva. Su *vector tangente unitario* en  $t_0 \in (a, b)$  es definido

$$\tau(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}.$$

*Observación.* La definición anterior solo hace sentido cuando  $\gamma'(t_0) \neq 0$ . Puntos en los cuales esto sucede son llamados *regulares*.

**Ejemplo 1.10.**

1. Para la curva

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\mapsto 2(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),\end{aligned}$$

tenemos  $\gamma'(\theta) = 2(-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ . Then,  $|\gamma'(\theta)| = \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} = 2$ . Por lo tanto,

$$\tau(\theta_0) = \frac{\gamma'(\theta_0)}{|\gamma'(\theta_0)|} = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

2. Si consideramos

$$\begin{aligned}\gamma: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (t, 2t + 1),\end{aligned}$$

entonces,  $\gamma'(t) = (1, 2)$ . De esto,  $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ . Luego,

$$\tau(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

### 1.3.2. El arco parámetro

El mismo objeto geométrico puede ser descrito de más de una manera. Para ver esto, estudiemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.11.** Los siguientes mapeos describen el mismo objeto geométrico, un semicírculo unitario centrado en el origen.

$$\begin{aligned}\gamma_1: [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\mapsto (x, \sqrt{1 - x^2}),\end{aligned}$$

La elección de la descripción es llamada *parametrización*. A partir de ahora, la curva será el *objeto geométrico*, es decir, el conjunto

$$\{\gamma(t); t \in [a, b]\}.$$

Dada una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definamos

$$s(x) = \int_a^x |\gamma'(\lambda)| d\lambda.$$

Observe que  $s$  es una función desde el intervalo  $[a, b]$  al intervalo  $[0, L(\gamma)]$ , y que es creciente. Esto implica que  $s$  es invertible y por lo tanto podemos usarla para parametrizar  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\gamma: [0, L(\gamma)] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ s &\mapsto \gamma(x(s)).\end{aligned}$$

Aquí,  $x$  es la inversa de  $s$ .

**Definición 1.12.** La parametrización anterior es llamada *parametrización por arco parámetro* y si usamos esta parametrización, decimos que  $\gamma$  está *arcoparametrizada*.

*Observación.* Usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = \tau(s).$$

De este cálculo, vemos por qué es útil considerar una curva arcoparametrizada.

**Ejemplo 1.13.**

1. Como antes, consideramos

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\mapsto 2(\cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

De antes ya sabemos que  $\gamma'(\theta) = 2(-\sin \theta, \cos \theta)$ . Así,

$$s = \int_0^x \sqrt{4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = 2x.$$

Usando esto, obtenemos que

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ s &\mapsto 2\left(\cos \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2}\right), \end{aligned}$$

es la parametrización por arco parámetro de  $\gamma$ . También,

$$\tau(s) = \gamma'(s) = \left(-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}\right).$$

2. Similarmente, consideramos

$$\begin{aligned} \gamma: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (t, 2t + 1). \end{aligned}$$

Como antes,  $\gamma'(t) = (1, 2)$ . Entonces,

$$s = \int_{-1}^x \sqrt{1 + 4} dt = \sqrt{5}(x + 1).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\sqrt{5}] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ s &\mapsto \left(\frac{s}{\sqrt{5}} - 1, 2\left(\frac{s}{\sqrt{5}} - 1\right) + 1\right), \end{aligned}$$

es la arcoparametrización de  $\gamma$ . Con esto, podemos calcular el vector tangente como sigue:

$$\tau(s) = \gamma'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

### 1.3.3. ¿Qué es la curvatura?

**Definición 1.14.** Consideremos la curva arcoparametrizada  $\gamma: [0, L(s)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Definimos la *curvatura* de  $\gamma$  por

$$\kappa(s) := |\gamma''(s)|.$$

Cuando  $\kappa(s) \neq 0$ , podemos definir el vector normal de la curva:

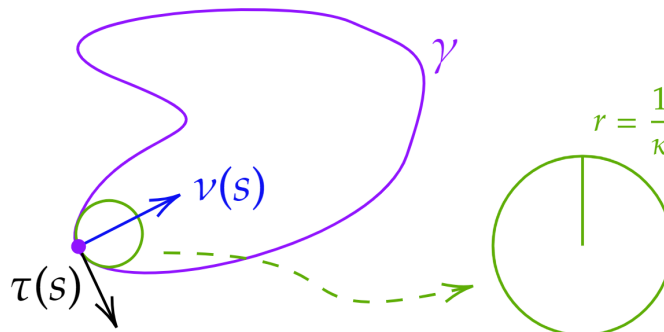
**Definición 1.15.** Sea  $\gamma: [0, L(s)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  arcoparametrizada. Dado  $s_0$  tal que  $\gamma''(s_0) \neq 0$ . Definimos el *vector normal* de  $\gamma$  (en  $s_0$ )  $\nu$  como el vector tal que  $\{\tau, \nu\}$  es una base positiva. Además, definimos la *curvatura con signo* por

$$\gamma''(s) = \kappa\nu.$$

*Observación.*

1. Las curvas que satisfacen  $\gamma''(s) \neq 0$  para todo  $s$  son usualmente llamadas *biregulares*.

Estudiemos la intuición geométrica detrás de la definición de curvatura. Para hacer esto, sea  $\gamma(s)$  una curva biregular. En un punto  $s_0$ , consideremos el círculo que pasa por  $\gamma(s_0)$  y que tiene la misma línea tangente que  $\gamma$  en  $s_0$ . Es posible probar que la curvatura de  $\gamma$  en  $s_0$  es exactamente la inversa del radio de este círculo. Esta es la “equivalencia geométrica” de Taylor a orden de aproximación 2.



### Ejemplo 1.16.

1. Considere la curva

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \theta &\mapsto 2(\cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

Ya sabemos que su arcoparametrización es dada por

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ s &\mapsto 2\left(\cos \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2}\right), \end{aligned}$$

y que  $\tau(s) = \left(\cos \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2}\right)$ . De aquí,  $\gamma''(s) = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}\right)$ , de donde obtenemos que la curvatura es  $\kappa(s) = |\gamma''(s)| = \frac{1}{2}$ . Además,  $\nu(s) = \left(-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}\right)$ .



2. Considere la curva

$$\begin{aligned}\gamma: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto (t, 2t + 1).\end{aligned}$$

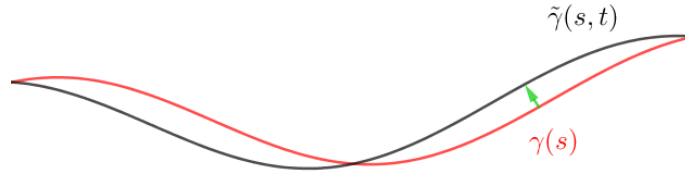
Recordemos que

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 2\sqrt{5}] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ s &\mapsto \left( \frac{s}{\sqrt{5}} - 1, 2 \left( \frac{s}{\sqrt{5}} - 1 \right) + 1 \right),\end{aligned}$$

es la versión arcoparametrizada de  $\gamma$  y que  $\tau(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ . De aquí,  $\kappa(s) = |\gamma''(s)| = 0$ .

Hasta ahora hemos definido la curvatura y dimos una interpretación geométrica, pero, ¿por qué la curvatura es una cantidad natural a estudiar? Para contestar esta pregunta, dada una curva arcoparametrizada  $\gamma(s)$ , consideremos una variación normal de ella, esto es

$$\tilde{\gamma}(s, t) = \gamma(s) + t\varphi(s)\nu(s)$$



Claramente

$$\left| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right| = |\gamma'(s) + t\varphi\nu + t\varphi\nu'|,$$

donde la prima denota la derivada con respecto al arcoparámetro. Entonces,

$$L(\tilde{\gamma})(t) = \int_0^{L(\gamma)} |\tau(s) + t\varphi'\nu + t\varphi\nu'| ds.$$

Conocemos todos los términos de esta expresión, excepto por  $\nu'$ . Para encontrarlo, primero notemos que para cada  $s$ ,  $\{\tau(s), \nu(s)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ . Esto nos permite escribir

$$\nu'(s) = a(s)\tau(s) + b(s)\nu(s).$$

Como  $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ , obtenemos que  $\langle \nu', \nu \rangle = 0$ , y de que  $\langle \nu, \tau \rangle = 0$ , concluimos  $\langle \nu', \tau \rangle = -\langle \nu, \tau' \rangle$ . Por lo tanto,

$$\nu'(s) = -\kappa\tau.$$

En resumen, tenemos que

$$L(\tilde{\gamma})(t) = \int_0^{L(\gamma)} |(1 - t\kappa\varphi)\tau(s) + t\varphi'\nu| ds.$$

Para calcular la derivada de esta expresión, primero notemos que

$$\frac{d}{dt} |(1 - t\kappa\varphi)\tau(s) + t\varphi'\nu|^2 = \frac{d}{dt} [(1 - t\kappa\varphi)^2 + t^2(\varphi')^2] = -2\kappa\varphi(1 - t\kappa\varphi) + 2t(\varphi')^2.$$

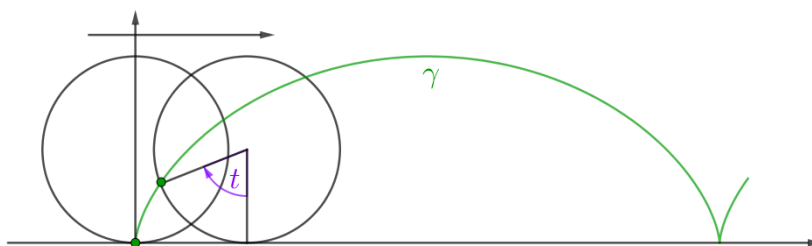
Por lo tanto,

$$\left. \frac{d}{dt} L(\tilde{\gamma})(t) \right|_{t=0} = - \int_0^{L(\gamma)} \kappa\varphi ds.$$

## 1.4. Ejercicios

**Ejercicio 1.1.** Sea  $\gamma$  una curva tal que  $\gamma'' \equiv 0$ . ¿Qué puede concluir de  $\gamma$ ?

**Ejercicio 1.2.** Un disco circular de radio 1 en el plano  $xy$  rueda sin resvalar a lo largo del eje  $x$ . La curva descrita por un punto de la circunferencia del disco es llamada cicloide.



1. Obtenga una parametrización de la cicloide, y determine sus puntos singulares (i.e., los puntos donde no es regular).
2. Calcule el largo de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

**Ejercicio 1.3.** Calcule los vectores tangentes y normal, además de la curvatura de la curva  $(x, -\ln(\cos x))$ .

**Ejercicio 1.4.** Calcule las mismas cantidades geométricas del ejercicio anterior pero ahora para la curva  $(x, u(x))$ , donde  $u$  es suficientemente regular.

**Ejercicio 1.5.** Calcule las mismas cantidades geométricas del ejercicio anterior pero ahora para la curva  $r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ .

**Ejercicio 1.6.** Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva con parametrización regular y sea  $\varphi$  una función (estrictamente) monótona. Pruebe que  $\gamma \circ \varphi$  representa la misma curva. ¿Qué ocurre con las cantidades geométricas si  $\varphi$  es decreciente? De un ejemplo de esto.

## 2. Clase II

En esta clase introduciremos el flujo de acortamiento de curvas y mostramos algunos ejemplos. Luego estudiaremos el principio del máximo y cómo este es usado para obtener información del flujo.

### 2.1. ¿Qué es la curvatura? (Continuación)

Recordemos que

$$\left. \frac{d}{dt} L(\tilde{\gamma})(t) \right|_{t=0} = - \int_0^{L(\gamma)} \kappa \varphi ds.$$

Si imponemos  $\varphi = \kappa$ , entonces esta cantidad es decreciente (y es la dirección de más rápido decrecimiento).

**Definición 2.1.** El *flujo de acortamiento de curvas* (FAC) es la deformación de una curva en la dirección normal con velocidad igual a su curvatura. De manera más precisa, consideramos  $\gamma: I \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaciendo

$$\frac{d\gamma}{dt} = \kappa \nu = \gamma_{ss},$$

donde  $\kappa$  es la curvatura signada.

*Observación.* Para cada  $t$ ,  $\gamma(\cdot, t)$  es una curva.

**Ejemplo 2.2.** Asumamos que  $r(t)(\cos \theta, \sin \theta) = \gamma(\theta, t)$  es una solución del FAC. En este ejemplo,  $\nu = -(\cos \theta, \sin \theta)$  y  $\kappa = \frac{1}{r}$ . Además, notemos que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dr}{dt}(\cos \theta, \sin \theta).$$

Entonces,

$$\frac{d\gamma}{dt} \cdot \nu = -\frac{dr}{dt},$$

pero  $\frac{d\gamma}{dt} \cdot \nu = \kappa = \frac{1}{r}$ . Así,

$$r(t) \frac{dr}{dt} = -1,$$

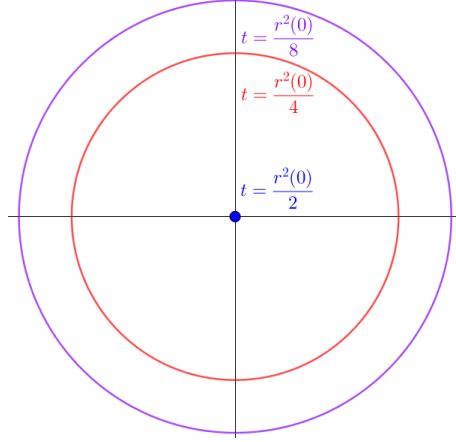
o, equivalentemente,

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = -1.$$

Integrando obtenemos

$$r(t) = \sqrt{r^2(0) - 2t}.$$

Geoméricamente, las curvas, que son círculos concéntricos, se van contrayendo a un punto a medida que  $t \rightarrow \frac{r^2(0)}{2}$ .



**Ejemplo 2.3.** Busquemos una solución al FAC de la forma  $\gamma(x, t) = (x, u(x) + t)$ . En este caso,

$$\frac{d\gamma}{dt} = (0, 1), \quad y \quad \nu = \frac{\left(-\frac{du}{dx}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}},$$

lo que implica

$$\frac{d\gamma}{dt} \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}}.$$

Ahora queremos calcular  $\gamma_{ss}$ . Para esto, notemos que de

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + u_x^2} d\lambda,$$

se sigue que

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}}.$$

Usando este último calculo obtenemos

$$\frac{d\gamma}{ds} = (1, u_x) \frac{dx}{ds} = \frac{(1, u_x)}{\sqrt{1 + u_x^2}},$$

y de esto,

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \left( \frac{-u_x u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2}} - \frac{u_x^2 u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Entonces

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot \nu = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como  $\gamma$  es una solución del FAC, obtenemos

$$\frac{-1}{\sqrt{1+u_x^2}} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \nu = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot \nu = \frac{-u_{xx}}{(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

o equivalentemente

$$1 = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2}.$$

Integrando esta expresión llegamos a

$$x = \arctan u_x.$$

y entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{d}{dx} \ln(\cos x).$$

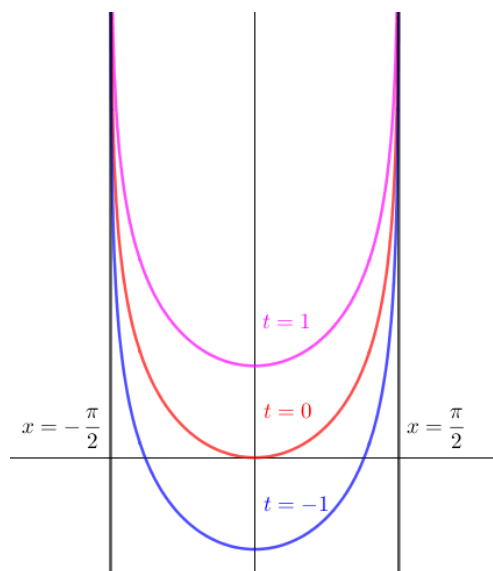
De esto, concluimos que

$$u(x) = -\ln \cos(x) + u(0).$$

Si elegimos  $u(0) = 0$  encontramos otro ejemplo de solución del FAC:

$$(x, t - \ln(\cos x)), \quad \text{for } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta solución es llamada *la parca* (*grim reaper* en inglés). Abajo graficamos las curvas para  $t = -1, 0$  y  $1$ .



Observe que  $\gamma(x, t)$  es la traslación de la curva  $x \mapsto (x, -\ln(\cos x))$  a lo largo del eje  $y$ .

## 2.2. El principio del máximo

Ahora centraremos nuestra atención en una herramienta muy útil del área de ecuaciones diferenciales, la cual usaremos más adelante.

Asumamos que  $f$  es una solución a la EDO

$$-af'' + bf' + c(x) = 0, \quad \text{para } x \in (A, B),$$

con  $a > 0$  y  $c > 0$ .

**Teorema 2.4.** *Si  $f$  satisface la EDO anterior, entonces no alcanza su máximo en el interior del intervalo.*

*Demostración.* Asumamos por contradicción que existe  $x \in (A, B)$  en donde  $f$  alcanza su máximo. Entonces,  $f''(x) \leq 0$  y  $f'(x) = 0$ . Estas condiciones y la hipótesis sobre  $f$  implican que

$$c(x) \leq -af'' + bf' + c(x) = 0,$$

lo cual es absurdo ya que  $c > 0$ . □

*Observación.* El mismo resultado es cierto para el mínimo si  $c < 0$ .

**Teorema 2.5.** *Si  $f$  satisface lo mismo que antes, pero ahora con  $c \geq 0$ , el mismo resultado es cierto.*

*Demostración.* Consideremos  $f_\varepsilon = f + \varepsilon e^{Lx}$  y calculemos como sigue:

$$\begin{aligned} -af_\varepsilon'' + bf_\varepsilon' &= -a(f'' + \varepsilon L^2 e^{Lx}) + b(f' + \varepsilon L e^{Lx}) \\ &= -af'' + bf' + c(x) - c(x) + \varepsilon e^{Lx}(-La^2 + Lb) \\ &= -c(x) + \varepsilon e^{Lx}(-L^2a + Lb). \end{aligned}$$

Para  $L$  suficientemente grande,  $-L^2a + Lb < 0$ . Por lo tanto,  $f_\varepsilon$  satisface las condiciones del teorema anterior y podemos concluir que

$$f_\varepsilon \leq \max\{f_\varepsilon(A), f_\varepsilon(B)\}.$$

Si hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos deducir lo pedido. □

**Ejercicio.** Pruebe que el mínimo es alcanzado en el borde si  $c \leq 0$ .

## 2.3. Una aplicación del principio del máximo

**Proposición 2.6.** *Asumamos que  $f_1$  y  $f_2$  están definidas en  $[0, 1]$  y satisfacen*

$$-af_i'' + bf_i' + c = 0,$$

*además, supongamos que  $f_1(0) = f_2(0)$ ,  $f_1(1) = f_2(1)$ . En este caso,  $f_1 \equiv f_2$ .*

*Demostración.* Defina  $g := f_1 - f_2$  y note que

$$\begin{aligned} -ag'' + bg' &= -a(f_1'' - f_2'') + b(f_1' - f_2') \\ &= -af_1'' + bf_1' + c - af_2'' + bf_2' - c = 0. \end{aligned}$$

Además,  $g(0) = g(1) = 0$ . En virtud del principio del máximo obtenemos que  $g \leq 0$  y  $-g \leq 0$ . Por lo tanto,  $g \equiv 0$ , i.e.,  $f_1 \equiv f_2$ .  $\square$

Nos enfocaremos en ecuaciones de la siguiente forma

$$-af_{xx} + bf_x + c = f_t.$$

Siguiendo las ideas anteriores, definimos

$$\tilde{f}(t) = \max_{x \in [0,1]} f(x, t).$$

Si  $\tilde{f}$  es suficientemente regular, tendremos

$$c \leq (\tilde{f})_t \quad (\text{o } \tilde{f} = f(1, t) \text{ o } \tilde{f} = f(0, t)).$$

En particular, si  $c \geq 0$ , entonces  $\tilde{f}$  es creciente. Similarmente, podemos definir

$$\underline{f}(t) = \min_{x \in [0,1]} f(x, t)$$

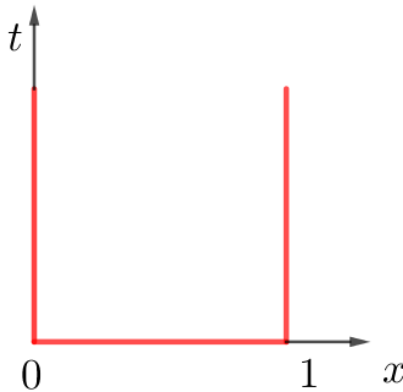
y

$$(\underline{f})_t \leq c \quad (\text{o } \underline{f} = f(1, t) \text{ o } \underline{f} = f(0, t)).$$

Si  $c \leq 0$ ,  $\underline{f}$  es decreciente. Por lo tanto,

$$\max_{x,t} f(x, t) = \max \left\{ \max_{x \in [0,1]} f(x, 0), \max_t \{f(0, t), f(1, t)\} \right\}.$$

El conjunto de los puntos donde  $f$  alcanza el máximo es llamado *borde parabólico*



## 2.4. De regreso al FAC

**Teorema 2.7.** *Asuma que  $(x, u_1(x, t))$  y  $(x, u_2(x, t))$  son soluciones del FAC. Suponga adicionalmente que*

1.  $u_1(x, 0) > u_2(x, 0)$  for  $x \in [-1, 1]$ ,
2.  $u_1(\pm 1, t) > u_2(\pm 1, t)$ .

Entonces  $u_1(x, t) > u_2(x, t)$  para cada  $x \in [-1, 1]$  y  $t \in [0, T)$ .

**Ejercicio.** Pruebe que

$$(u_i)_t = \frac{(u_i)_{xx}}{1 + (u_i)_x^2}.$$

*Demostración.* Sea  $v_\varepsilon = u_1 - u_2 + \varepsilon t$ . Las condiciones 1 y 2 de la hipótesis implican que

1.  $v_\varepsilon(x, 0) > 0$
2.  $v_\varepsilon(\pm 1, t) > 0$ .

Asumamos que existe  $x_0 \in (-1, 1)$  y un primer  $t_0 \in (0, T)$  tal que  $v_\varepsilon(x_0, t_0) = 0$  (esto es,  $u_2(x_0, t_0) = u_1(x_0, t_0) + \varepsilon t_0 > u_1(x_0, t_0)$ ). Como para  $t < t_0$  se tiene que  $v_\varepsilon(x_0, t) > 0$ , entonces

$$\frac{dv_\varepsilon}{dt}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (*)$$

Como este es un mínimo, tenemos que

$$\frac{dv_\varepsilon}{dx} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2v_\varepsilon}{dx^2} \geq 0. \quad (**)$$

Además, por el ejercicio anterior

$$\frac{dv_\varepsilon}{dt} = \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} + \varepsilon = \frac{(u_1)_{xx}}{1 + (u_1)_x^2} - \frac{(u_2)_{xx}}{1 + (u_2)_x^2} + \varepsilon.$$

Si usamos (\*) y (\*\*), obtenemos que en  $(x_0, t_0)$  se tiene que

$$0 \geq \frac{dv_\varepsilon}{dt} = \frac{(v_\varepsilon)_{xx}}{1 + (u_1)_x^2} + \varepsilon > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $v_\varepsilon > 0$ , i.e., para cada  $\varepsilon > 0$

$$u_1(x, t) \geq u_2(x, t) - \varepsilon t.$$

Finalmente, hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$  para concluir el resultado buscado. □

**Teorema 2.8.** *Si  $\gamma_1(x, t)$  y  $\gamma_2(x, t)$  son dos curvas acotadas y cerradas tales que  $\gamma_1(x, 0) \cap \gamma_2(x, 0) = \emptyset$ , entonces  $\gamma_1(x, t) \cap \gamma_2(x, t) = \emptyset$  mientras las soluciones estén definidas.*

*Demostración.* Si se tocan en algún punto, localmente (luego de rotar y trasladar) podemos escribirlas como gráficos y aplicar el resultado anterior. □

**Corolario 2.9.** *Si  $\gamma(x, t)$  es una curva (acotada) compacta, la solución puede existir a lo más por tiempo finito.*



## 2.5. Ejercicios

**Ejercicio 2.1.** Asuma que  $\gamma$  satisface el FAC y que  $\phi(x, t)$  es una función creciente en  $x$  para todo  $t$ . Calcule la ecuación que satisface  $\gamma(\phi(x, t), t)$ .

**Ejercicio 2.2.** Pruebe que si

$$-af'' + bf' + cf = 0 \quad \text{en } (0, 1),$$

y  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f(1) > 0$ , entonces  $f \geq 0$  en  $(0, 1)$ .

### 3. Clase III

**Teorema 3.1** (Teorema Principal). *Toda curva compacta, incrustada y de clase  $C^2$  converge a un punto en tiempo finito.*

Este resultado fundacional fue probado por primera vez en los mediados de los 80's por una combinación de resultados devidos a Gage & Hamilton y Grayson, vea [GH86] y [Gra87]. Algunas pruebas alternativas han sido publicadas posteriormente. Nos concentraremos en una demostración dada por G. Huisken en [Hui98].

Para alcanzar nuestro objetivo, primero estudiaremos el siguiente resultado que es más simple:

**Teorema 3.2.** *Sea  $\gamma: I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva abierta que evoluciona según el flujo de acortamiento de curvas (en su interior). Sean*

$$d(x, y, t) = |\gamma(x, t) - \gamma(y, t)| \quad \text{and} \quad \ell(x, y, t) = \int_x^y |\gamma'(\lambda, t)| d\lambda.$$

*Asuma que  $\frac{d}{\ell}$  alcanza un ínfimo en el interior en tiempo  $t_0$ . Entonces*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta}{\ell} \right) (x, y, t_0) \geq 0,$$

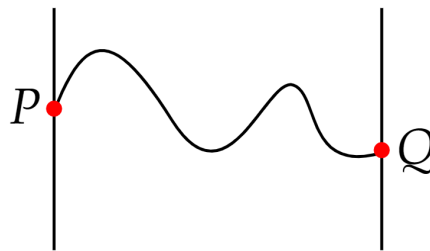
*con igualdad cuando  $\gamma$  es una línea recta.*

*Observación.* En general  $\frac{\delta}{\ell} \leq 1$ , debido a que  $\ell$  es la distancia más corta.

La “cantidad isoperimétrica”  $\frac{\delta}{\ell}$  da una medida cuantitativa de cuánto  $\gamma$  difiere de una línea recta.

*Observación.* Para una curva abierta necesitamos especificar el comportamiento en el borde. Dos elecciones usuales para tener un problema bien definido son las siguientes:

1. Prescribir los puntos.
2. Prescribir el ángulo con líneas fijadas.

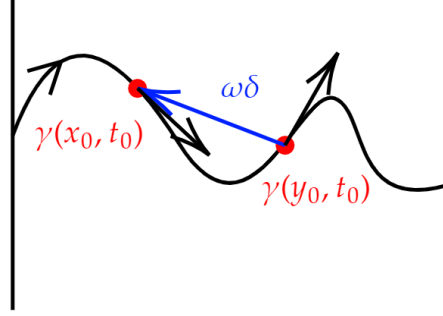


Note que si fijamos los puntos finales, entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta}{\ell} (P, Q, t) \right) = -\frac{\delta}{\ell^2} \frac{d\ell}{dt} = \frac{\delta}{\ell^2} \int_P^Q k^2 ds \geq 0,$$

con igualdad solo para una recta.

*Idea de la demostración.* Asuma que en  $t_0$  el ínfimo es alcanzado en  $x_0, y_0$ .



Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\gamma(x, t_0)$  está arcoparametrizada, es decir,  $x \in [0, L(t_0)]$ . Para probar que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta}{\ell} \right) = \frac{\delta' \ell - \ell' \delta}{\ell^2} \geq 0,$$

primero consideramos la siguiente función de una variable:

$$f_1(\lambda) = \frac{\delta}{\ell}(x_0 + \lambda, y_0, t_0).$$

Debido a que  $f_1$  tiene un mínimo en  $\lambda = 0$ , obtenemos

$$\frac{df_1}{d\lambda}(x_0, y_0, t_0) = 0.$$

Para entender qué nos indica esto, vamos a calcular la derivada. Como  $\gamma(\cdot, t_0)$  está arcoparametrizada, entonces,

$$\ell(x_0 + \lambda, y_0, t_0) = \int_{x_0 + \lambda}^{y_0} 1 d\alpha = y_0 - x_0 - \lambda.$$

Esto implica que  $\frac{d\ell}{d\lambda} = -1$ . Además, ya que

$$\delta^2(x_0 + \lambda, y_0 + \lambda) = |\gamma(x_0 + \lambda, t_0) - \gamma(y_0, t_0)|^2,$$

entonces

$$\frac{d\delta^2}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 2\delta \frac{d\delta}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 2\langle \gamma(x_0, t_0) - \gamma(y_0, t_0), \tau(x_0, t_0) \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{df_1}{d\lambda}(0) &= \frac{\ell \frac{d\delta}{d\lambda} - \delta \frac{d\ell}{d\lambda}}{\ell^2} \\ &= \frac{\frac{d\delta}{d\lambda}}{\ell} + \frac{\delta}{\ell^2} \\ &= \frac{\langle \omega, \tau(x_0, t_0) \rangle}{\ell} + \frac{\delta}{\ell^2}, \end{aligned}$$

donde  $\omega := \frac{\gamma(x_0, t_0) - \gamma(y_0, t_0)}{|\gamma(x_0, t_0) - \gamma(y_0, t_0)|}$ . De manera similar, si consideramos  $f_2(\lambda) = \frac{\delta}{\ell}(x_0, y_0 + \lambda, t_0)$ , podemos notar que

$$\frac{df_2}{d\lambda}(0) = 0,$$

y

$$0 = \frac{df_2}{d\lambda}(0) = -\frac{\langle \omega, \tau(y_0, t_0) \rangle}{\ell} - \frac{\delta}{\ell^2}.$$

Por lo tanto,

$$\langle \omega, \tau(x_0, t_0) \rangle = \langle \omega, \tau(y_0, t_0) \rangle.$$

En este punto, separamos la demostración en dos casos

- **Caso 1:**  $\tau(x_0, t_0) = \tau(y_0, t_0)$ . En este caso consideramos la función  $\tilde{f}_1(\lambda) = \frac{\delta}{\ell}(x_0 + \lambda, y_0 + \lambda, t_0)$ . Note que

$$\frac{d\tilde{f}_1}{d\lambda}(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2\tilde{f}_1}{d\lambda^2}(0) \geq 0.$$

De manera a los cálculos anteriores, usando la regla del cociente de segundo orden obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{d^2\tilde{f}_1}{d\lambda^2}(0) &= \frac{\frac{d^2\delta}{d\lambda^2} - 2\frac{d\tilde{f}_1}{d\lambda}\frac{d\ell}{d\lambda} - \tilde{f}_1\frac{d^2\ell}{d\lambda^2}}{\ell} \\ &= \frac{1}{\ell} \frac{d^2\delta}{d\lambda^2} \\ &= \frac{\langle \omega, \kappa(x_0, t_0)\nu(x_0, t_0) - \kappa(y_0, t_0)\nu(y_0, t_0) \rangle}{\ell} + \frac{|\tau(x_0, t_0) - \tau(y_0, t_0)|^2}{\delta\ell} \\ &\quad - \frac{\langle \omega, \tau(x_0, t_0) - \tau(y_0, t_0) \rangle}{\delta^2\ell} \frac{d\delta}{d\lambda} \\ &= \frac{\langle \omega, \kappa(x_0, t_0)\nu(x_0, t_0) - \kappa(y_0, t_0)\nu(y_0, t_0) \rangle}{\ell}. \end{aligned}$$

Ahora observe que debido a que  $\gamma$  satisface el FAC, tenemos que

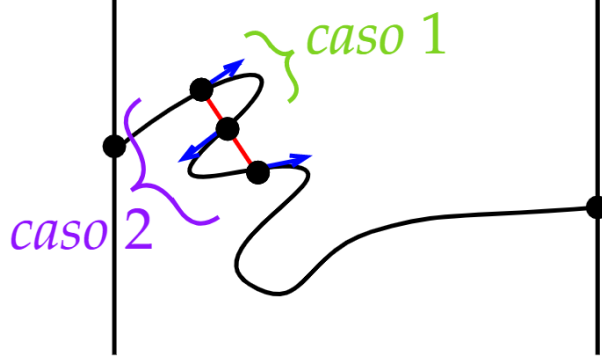
$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\langle \omega, \kappa(x_0, t_0)\nu(x_0, t_0) - \kappa(y_0, t_0)\nu(y_0, t_0) \rangle}{\ell} \geq 0,$$

y (por los cálculos de las clases anteriores)

$$\frac{d\ell}{dt} = - \int_{x_0}^{y_0} \kappa^2 ds.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta}{\ell} \right) = \frac{\delta'\ell - \ell'\delta}{\ell^2} = \frac{\langle \omega, \kappa(x_0, t_0)\nu(x_0, t_0) - \kappa(y_0, t_0)\nu(y_0, t_0) \rangle}{\ell} + \frac{\delta}{\ell} \int_{x_0}^{y_0} \kappa^2 ds \geq 0.$$



- **Caso 2:**  $\tau(x_0, t_0) \neq \tau(y_0, t_0)$ . En este caso consideramos la función  $\tilde{f}_2(\lambda) = \frac{\delta}{\ell}(x_0 + \lambda, y_0 - \lambda, t_0)$ . Como antes,

$$\frac{d\tilde{f}_2}{d\lambda}(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\delta^2 \tilde{f}_2}{d\lambda^2}(0) \geq 0.$$

Además,

$$0 = \frac{d\tilde{f}_2}{d\lambda} = \frac{\langle \omega, \tau(x_0, t_0) + \tau(y_0, t_0) \rangle}{\ell} + \frac{2\delta}{\ell^2},$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{f}_2}{d\lambda^2} &= \frac{\langle \omega, \kappa(x_0, t_0)\nu(x_0, t_0) - \kappa(y_0, t_0)\nu(y_0, t_0) \rangle}{\ell} \\ &+ \frac{|\tau(x_0, t_0) + \tau(y_0, t_0)|^2}{d\ell} - \frac{\langle \omega, \tau(x_0, t_0) + \tau(y_0, t_0) \rangle^2}{d\ell}. \end{aligned}$$

Si escribimos  $\tau_1 = \tau(x_0, t_0)$  y  $\tau_2 = \tau(y_0, t_0)$ , entonces

$$\langle \tau_1 - \tau_2, \tau_1 + \tau_2 \rangle = \langle \tau_1, \tau_1 \rangle + \langle \tau_1, \tau_2 \rangle - 2\langle \tau_2, \tau_1 \rangle + \langle \tau_2, \tau_2 \rangle = 0,$$

es decir,  $\tau_1 - \tau_2 \perp \tau_1 + \tau_2$ . Como también tenemos  $\tau_1 - \tau_2 \perp \omega$ , obtenemos que  $\tau_1 + \tau_2 \parallel \omega$  y (como ahora  $\omega = \frac{\tau_1 + \tau_2}{|\tau_1 + \tau_2|}$ )  $\langle \omega, \tau_1 + \tau_2 \rangle^2 = |\tau_1 + \tau_2|^2$ . Por lo tanto,

$$0 \leq \frac{d^2 \tilde{f}_2}{d\lambda^2} = \frac{\langle \omega, \kappa(x_0, t_0)\nu(x_0, t_0) - \kappa(y_0, t_0)\nu(y_0, t_0) \rangle}{\ell},$$

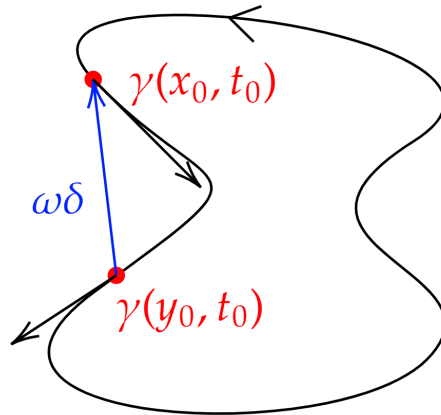
y podemos concluir como en el caso anterior.

Finalmente, note que para la igualdad, necesariamente se debe tener que

$$\int_{x_0}^{y_0} \kappa^2 ds = 0,$$

lo que implica que  $\kappa \equiv 0$ , es decir, la curva es una línea recta. □

*Observación.* La situación es similar para curvas cerradas, y la figura en los puntos críticos se ve como sigue:



Para el Teorema Principal una idea similar puede ser usada, pero es necesario considerar un tipo diferente de “perfil isoperimétrico”. En vez de  $\frac{\delta}{\ell}$  usamos  $\frac{\delta}{\psi(\ell)}$ , donde

$$\psi(\ell) = \frac{L(t)}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\ell\pi}{L(t)} \right),$$

y  $L(t)$  es el largo total en el tiempo  $t$ . Los cálculos en este caso son similares y los dejamos para las personas entusiastas.

Para estudiar más resultados sobre el FAC y algunas de sus generalizaciones, recomendamos enfáticamente los libros [CZ01] y [Zhu02].

## Referencias

- [CZ01] Kai-Seng Chou and Xi-Ping Zhu, *The curve shortening problem*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. MR1888641
- [GH86] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom. **1** (1986), 69–96. MR0840401
- [Gra87] Matthew A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom. **2** (1987), 285–314. MR0906392
- [Hui98] Gerhard Huisken, *A distance comparison principle for evolving curves*, Asian J. Math. **2** (1998), no. 1, 127–133. MR1656553
- [Zhu02] Xi-Ping Zhu, *Lectures on mean curvature flows*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 32, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2002. MR1931534