دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

گرایش محض

عنوان

حلقه کبردیسم حقیقی و مختلط

نگارش:

سام نریمان

استادراهنما:

دکتر سیاوش شهشهانی

دی ماه ۱۳۸۷

فهرست مطالب

چکیده

مفهوم بردیسم اولین بار در سال ۱۸۹۵، توسط پوانکاره در مقالهٔ مشهورش (Analysis Situs) مطرح شد. دسته‌بندی رویه‌های دوبعدی نشان داد که حلقه بردیسم در بعد ۲ در حالت جهت‌پذیر بدیهی و در حالتی که جهت در نظر گرفته نشود $\mathbb{Z}_۲$ است (با مولد $\mathbb{R}P^۲$). رخلین نشان داد هر خمینه ۳ بعدی مرز خمینه ۴ بعدی است و در واقع مسئله کبردیسم در بعد ۳ بدیهی است. اما سال ۱۹۵۴ توم[1] دنباله‌ای از فضاها (طیف MO) را ساخت و نشان داد حد مستقیم گروه هموتوپی این طیف با حلقه بردیسم $\mathfrak{N}_*$ یکریخت است. او ثابت کرد $\mathfrak{N}_*$ جبر چندجمله‌ای است با مولدهای x_i از درجه i که به فرم $۲^k - ۱$ نیست و همچنین متوجه شد کلاس‌های پنتریاگین[2] کلاس کبردیسم جهت‌دار به پیمانه تاب مشخص می‌کنند؛ هیرزبروخ[3] با استفاده از این قضیه، حکمی که اکنون به قضیه علامت هیرزبروخ شهرت دارد را ثابت کرد. پنتریاگین در سال ۱۹۵۵ نشان داد گروه بردیسم به همراه فریم با گروه پایدار هموتوپی کره یکریخت است، این محاسبه منجر به محاسبه حلقه‌های بردیسم با ساختارهای دیگری شد. سال ۱۹۶۰، وال[4] ساختار Ω_*^{SO} را به طور کامل مشخص کرد و در همان سال میلنر[5] دو قضیه مهم درباره کبردیسم ثابت کرد: یکی Ω_*^{SO} تاب مرتبه فرد ندارد و دومی Ω_*^{U} یکریخت با $\mathbb{Z}[y_۱, \ldots, y_n, \ldots]$ است که درجه y_iها زوج است. در این پایان‌نامه حلقه کبردیسم مجهز به ساختارهای متفاوت را شناسایی می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: فضای توم ـ جبر استینراد ـ دنباله طیفی آدامز.

1) Thom 2) Pontrjagin 3) Hirzebruch 4) Wall 5) Milnor

فصل ۱

ساختار حلقه کبردیسم به پیمانه تاب

۱-۱ معرفی مسئله کبردیسم و ناورداها

حلقه کبردیسم، اولین بار، توسط رنه توم[1] در سال ۱۹۵۶ معرفی شد که گاهی به حلقه توم نیز گفته می‌شود. مجموعهٔ خمینه‌های جهت‌پذیر بسته با بعد k (تمام خمینه‌ها در این پایان‌نامه مشتق‌پذیر هستند مگر به طور مشخص خلافش ذکر شود.) را در نظر بگیرید. اگر V خمینه جهت‌پذیر باشد، منظور از $-V$ همان خمینه منتها با جهت برعکس V است. رابطه $\sim$ را روی این مجموعه می‌گذاریم و می‌نویسیم $V \sim W$ (خوانده می‌شود V با W کبردانت است.) یعنی خمینه فشرده مرزدار و جهت‌دار M پیدا می‌شود که $\partial M = V + (-W)$ (مرز M) که در این جا $+$ منظور اجتماع مجزا است. به سادگی دیده می‌شود که $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی است که با $+$ و $-$ سازگار است. در نتیجه Ω_k گروه آبلی است. چون در صورتی که V خمینه بسته باشد داریم $\partial(M \times V) = \partial M \times V$، پس ضرب خمینه‌ها با رابطه $\sim$ سازگار است و می‌توان به ضرب $\Omega_k \times \Omega_l \longrightarrow \Omega_{k+l}$ معنی داد. حال با این ساختار $\Omega = \sum_k \Omega_k$ یک حلقه یاد جابه‌جایی می‌شود.

به بیان نادقیق می‌توان حلقه Ω را به صورت $\frac{\ker \partial}{\operatorname{Im} \partial}$ در نظر گرفت و به همین دلیل رخلین[2] به حلقه کبردیسم

1) René Thom 2) Rohlin

«همولوژی ذاتی» می‌گفت.

در صورتی که جهت را نخواهیم درنظر بگیریم رابطه هم‌ارزی $V \sim_2 W$ (خوانده می‌شود V با W به پیمانه ۲ کبردانت هستند.) معرفی می‌کنیم و حلقه جدید کبردیسم را با $\mathfrak{N} = \sum_k \mathfrak{N}_k$ نشان می‌دهیم که البته روشن است که نگاشت r که $r : \Omega \longrightarrow \mathfrak{N}$ که جهت را فراموش می‌کند وجود دارد که در بخش‌های بعد درباره خواصش توضیح می‌دهیم.

مفهوم بردیسم شاید اولین بار به وسیلهٔ پوانکاره[1] مطرح شد و رخلین نیز قبل از توم احکامی را مربوط به بردیسم ثابت کرده بود. از جمله هر خمینه سه بعدی مرز خمینه‌ای ۴ بعدی است. اما شناسایی ساختار اولین بار توسط توم صورت گرفت که به همین خاطر برنده جایزه فیلدز شد.

مسئله مورد بررسی در این نظریه بر چند نوع است:

۱. **مسئله کبردیسم:** تحت چه شرایطی خمینه هموار و بسته M^n را می‌توان به صورت مرز خمینه فشرده و هموار W^{n+1} نوشت؟ در صورتی بخواهیم هر دو جهت‌دار باشند، چطور؟

۲. **نمایش پذیر بودن یک دور در گروه همانستگی به عنوان زیرخمینه:** فرض کنید $x \in H_i(M^n, \mathbb{Z})$ (و یا $x \in H_i(M^n, \mathbb{Z}_2)$ اگر M^n جهت‌ناپذیر باشد.) تحت چه شرایطی x توسط زیرخمینه $M^i \subset M^n$ قابل نمایش است.

۳. **دورهایی که تصویر توابع پیوسته هستند:** فرض کنید X یک مجتمع ـ CW باشد و $x \in H_i(X, \mathbb{Z})$ (و یا $x \in H_i(X, \mathbb{Z}_2)$ در صورتی که X جهت‌ناپذیر باشد.) در چه صورتی «بردیسم تبهگون» (M^i, f) (یعنی خمینه M^i و نگاشت $f : M^i \longrightarrow X$) به طوری که $f_*[M^i] = x$؟

به گروهی که در سئوال ۳ مطرح شد $\Omega_i^{SO}(X)$(یا $\Omega_i^O(X)$) برحسب این که جهت‌پذیر (یا جهت‌ناپذیر) باشد. به عنوان مثال $\Omega_i^{SO}(*)$، $\Omega_i^O(*)$ برای $i \leq 2$ را می‌توان به سادگی محاسبه کرد:

$$\Omega_0^O \simeq \mathbb{Z}_2 \qquad \Omega_0^{SO} \simeq \mathbb{Z} \qquad \Omega_1^O \simeq \Omega_1^{SO} \simeq 0 \qquad \Omega_2^{SO} = 0$$

برای Ω_2^{SO} از قضیه دسته‌بندی رویه‌های جهت‌پذیر استفاده کردیم. برای محاسبه Ω_2^O ما از دسته‌بندی رویه‌های جهت‌ناپذیر و لم زیر استفاده می‌کنیم.

1) Poincaré

۱-۱-۱ لم: اگر خمینه M^i مرز خمینه W^{i+1} باشد در این صورت عدد اویلر M^i زوج است: $\chi(M) \overset{2}{\equiv} 0$.

اثبات: در صورتی که i فرد باشد با استفاده از دوگانی پوانکاره می‌دانیم $\chi(M^i) = 0$ پس فرض کنید i زوج است. فرض کنید M^{2k} مرز W^{2k+1} باشد در این صورت

$$V^{2k+1} := W^{2k+1} \bigcup_{M^{2k}} W^{2k+1} \tag{1}$$

یعنی دو نسخه از W^{2k+1} از روی مرز به هم می‌چسبانیم. می‌دانیم اگر دو مجتمع ـ CW، X و Y را از زیرمجتمع L به هم بچسبانیم خواهیم داشت:

$$\chi(X \cup_K L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(L)$$

پس اگر این رابطه برای (۱) به کار ببریم، به دست می‌آید:

$$0 = \chi(V^{2k+1}) = 2\chi(W^{2k+1}) - \chi(M^{2k})$$

در نتیجه ادعا ثابت شد.■

چون $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ پس $\mathbb{R}P^2 \neq \partial W^3$. اما برای بطری کلاین K^2 به سادگی می‌توان W^3 پیدا کرد که $K^2 = \partial W^3$. دسته‌بندی رویه‌های جهت‌ناپذیر می‌گوید هر رویه ۲ بعدی جهت‌ناپذیر به صورت (دسته‌ها)+$\mathbb{R}P^2$ و یا (دسته‌ها)+K^2 است در نتیجه (با مولد $[\mathbb{R}P^2]$) $\Omega_2^O \simeq \mathbb{Z}_2$.

به طور کلی $\mathbb{R}P^{2n}$ و $\mathbb{C}P^{2n}$ها مرز خمینه نیستند ولی $\mathbb{R}P^{2n+1}$ و $\mathbb{C}P^{2n+1}$ در حلقه کبردیسم بدیهی هستند. چون

۱-۱-۲ قضیه: اگر M^n خمینه بسته باشد و $\sigma : M^n \longrightarrow M^n$ یک پیچش[1] هموار بدون نقطه ثابت باشد، یعنی $\sigma^2(x) = x$ و $\sigma(x) \neq x$ برای هر $x \in M^n$، $M^n \sim 0$ در Ω_n.

اثبات: قرار دهید

$$W^{n+1} = M^n \times [0, 1]/(x, 0) \sim (\sigma(x), 0)$$

1) involution

چون σ نقطه ثابت ندارد، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت چون هر $(x, \circ) \in W^{n+1}$ گویی وجود دارد که از چسبیدن دو نیم‌گوی D_+^{n+1} و σD_+^{n+1} به دست آمده است. پس W^{n+1} خمینه هموار است و مرزش M^n است.■

پیچش بدون نقطه ثابت روی $\mathbb{R}P^{2n+1}$ و $\mathbb{C}P^{2n+1}$ را می‌توان این طور تعریف کرد:

$$\mathbb{R}P^{2n+1} \text{ روی } : \sigma(x_\circ, x_1, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (-x_1, x_\circ, \ldots, -x_{2n+1}, x_{2n})$$

$$\mathbb{C}P^{2n+1} \text{ روی } : \sigma(z_\circ, z_1, \ldots, z_{2n}, z_{2n+1}) = (-\bar{z}_1, \bar{z}_\circ, \ldots, -\bar{z}_{2n+1}, \bar{z}_{2n})$$

در ادامه ثابت خواهیم کرد که عدد اشتیفل ـ ویتنی[1] برای خمینه‌هایی که مرز خمینه‌ای دیگر هستند صفر می‌شوند.

۱-۱-۳ قضیه (پنتریاگین[2]): همه اعداد اشتیفل ـ ویتنی برای خمینه M^n که $M^n = \partial W^n$، W^{n+1} خمینه فشرده است، صفر می‌شود.

اثبات: گروه همانستگی[3] و پادهمانستگی[4] را با ضرایب $\mathbb{Z}_2$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $[W^{n+1}] \in H_{n+1}(W^{n+1}, M^n)$ کلاس بنیادی W^{n+1} باشد. با استفاده از قضیه دوگانی نقش می‌دانیم نگاشت مرز

$$\partial_\circ : H_{n+1}(W^{n+1}, M^n) \longrightarrow H_n(M^n)$$

$[W^{n+1}]$ را به کلاس بنیادی $[M^n] \in H_n(M^n)$ می‌برد. در نتیجه اگر $\alpha \in H^n(M^n)$

$$< \alpha, [M^n] >=< \alpha, \partial_*[W^{n+1}] >=< \delta^*\alpha, [W^{n+1}] >$$

که $\delta^* : H^n(M^n) \longrightarrow H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$ دوگان نگاشت ∂_* است.

با استفاده از قضیه یقه[5] (برای خمینه‌های هموار) داریم $\tau_{W^{n+1}}|_{M^n} = \tau_{M^n} \oplus \varepsilon^1$ که τ_x منظورکلاف مماس X است. چون در واقع، تنها به قسمتی از W^{n+1} علاقه‌مندیم که نزدیک $\partial W^{n+1} = M^n$ است. در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم $W^{n+1} = M^n \times I$. پس خواهیم داشت $w_j(M^n) = w_j(\tau_{W^{n+1}}|_{M^n})$ برای هر j

1) Stiefel-Whitney 2) Pontrjagin 3) homology 4) cohomology 5) Collar Theorem

(w_j، jـامین کلاس اشتیفل ـ ویتنی است.) اگر $i^*: H^j(W^{n+1}) \longrightarrow H^j(M^n)$ نگاشت القا شده از نشاندن $i: M^n \hookrightarrow W^{n+1}$ باشد. $w_j(\tau_{W^{n+1}}|_{M^n}) = i^* w_j(W^{n+1})$ پس $w_1^{r_1}(M^n)\dots w_n^{r_n}(M^n) = i^*\alpha$ که $\alpha = w_1^{r_1}(W^{n+1})\dots w_n^{r_n}(W^{n+1})$. دنباله دقیق پادهمانستگی برای زوج (W^{n+1}, M^n)

$$H^n(W^{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^n(M^n) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$$

نتیجه می‌دهد $\delta^* i^* = 0$. بنابراین $\delta^*(w_1^{r_1}(M^n)\dots w_n^{r_n}(M^n)) = \delta^* i^*\alpha = 0$ و نهایتاً

$$, w_1^{r_1}(M^n)\dots w_n^{r_n}(M^n), [M^n] >=< \delta^*(w_1^{r_1}(M^n)\dots w_n^{r_n}(M^n)), [W^{n+1}] >= 0$$

یعنی $w_1^{r_1}\dots w_n^{r_n}[M^n] = 0$.■

برعکس حکم بالا توسط توم حدس زده و توسط وال[1] اثبات شد که در فصلهای بعد توضیح خواهیم داد. ناوردای مهم دیگری که فقط برای خمینه‌های بعد $4k$ها تعریف می‌شود. نشان[2]، τ، است. فرم دو خطی

$$< x, y >= (xy, [M^{4k}]) \qquad x, y \in H^{2k}(M^{4k}, \mathbb{Q})$$

را در نظر بگیرید. اندیس $<,>$ را τ، نشان، خمینه M^{4k} گویند.

۱-۱-۴ قضیه (رخلین و توم): نشان خمینه‌ای که مرز خمینه‌ای دیگر است، صفر است.

اثبات: فرض کنید $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$، $i: M^{4k} \hookrightarrow W^{4k+1}$ در این صورت روشن است که $i_*[M^{4k}] = 0$ در $H_{4k}(W^{4k+1}, \mathbb{Q})$. اگر x, y پاد دورهای $2k$ـ بعدی در M^{4k} باشد که از تحدید پاددورهای $\bar{x}, \bar{y}$ در W^{4k+1} به دست آمده باشد $< X, Y >= 0$ چون

$$< X, Y > =< x \smile y, [M^{4k}] >=< i^*(\bar{x}) \smile i^*(\bar{y}), [M^{4k}] >$$

$$=< \bar{x} \smile \bar{y}, i_*[M^{4k}] >= 0$$

گام بعدی اثبات این است که ثابت کنیم $i^* H^{2k}(W^{4k+1}, \mathbb{Q}) \subset H^{2k}(M^{4k}, \mathbb{Q})$ به عنوان فضای برداری، بعدش نصف $H^{2k}(M^{4k}, \mathbb{Q})$ است. دنباله دقیق را برای همانستگی و پادهمانستگی مربوط به زوج (W^{4k+1}, M^{4k})

1) Wall 2) signature

را در نظر بگیریم:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, equal, "D"] & H_{2k}(M^{4k}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal, "D"] & H_{2k}(W^{4k+1}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "D"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{2k}(W^{4k+1}) \arrow[r, "i^*"] & H^{2k}(M^{4k}) \arrow[r, "\delta^*"] & H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(منظور از D دوگانی پوانکاره است). این نمودار جابه‌جایی است. پس با توجه با دقیق بودن سطرها $\dim(\operatorname{Im} i^*) = \dim(\ker \delta^*)$ و $\dim \ker \delta^* = \dim \ker i_*$

$$\dim(\operatorname{Im} i^*) = \dim(\ker i_*) = \dim H_{2k}(M^{4k}) - \dim \operatorname{Im} i_*$$

اما چون i_* و i^* دوگان هم هستند $\dim \operatorname{Im} i^* = \dim \operatorname{Im} i_*$ در نتیجه $2 \dim \operatorname{Im} i^* = \dim H^{2k}(M^{4k})$ چون $<,>$ فرم دو خطی است که روی زیرفضای برداری با بعد نصف صفر می‌شود. در نتیجه بعد زیرفضایی که فرم دو خطی مثبت (و یا منفی) k است در نتیجه $\tau = 0$.■

به عنوان کاربرد نظریه کبردیسم در فصل‌های بعدی قضیه «نشان هیرزبروخ[1]» را ثابت می‌کنیم. در ادامه خواهیم دید برای محاسبه ساختار حلقه $\sum_k \Omega_k, \sum_k \mathfrak{N}_k$ باید ساختارگروه هموتوپی فضایی به اسم فضای توم را بدانیم. اهمیت فضای توم در آن است که نظریه کبردیسم را به نظریه هموتوپی مربوط می‌کند.

۱-۲ بردیسم به همراه فریم و گروه‌های هموتوپی کره

قبل از معرفی فضای توم می‌خواهم ساختار پنتریاگین ـ توم را در بردیسم به همراه فریم توضیح بدهم که الهام بخش ایده اصلی فضاهای توم است.

مقصود از یک فریم‌گذاری روی زیرخمینه V^{k-n} از خمینه M^k، نشانندهٔ ϕ از $V \times \mathbb{R}^n$ در N است طوری که $\phi(p, 0) = p$ برای هر $p \in V$. اگر (W^{k+1-n}, ψ) زیرخمینه به همراه فریم از $M \times I$ باشد، می‌گوییم دو زیرخمینه فریم‌گذاری شده از M که از اشتراک W و $M \times \{0\}$ و اشتراک W و $M \times \{1\}$ به دست می‌آیند، **فریم کبردانت** هستند. $\Omega^{fr}_{k-n,M}$ مجموعهٔ فریم بردیسم‌های $k-n$ بعدی در M است.

1) signature of Hirzebruch

برای هر زیرخمینه مجهز به فریم نگاشت فروریزش[1] $c : M \longrightarrow S^n$ این طور تعریف می‌کنیم که $\phi(p, v)$ را v می‌فرستیم و بقیه نقاط خارج تصویر ϕ را به ∞. (توجه کنید $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$). $\circ \in S^n$ مقدار عادی نگاشت c است و $c^{-1}(\circ) = V$.

قضیه‌ی زیر را توم و پنتریاگین در سال ۱۹۵۰ ثابت کردند.

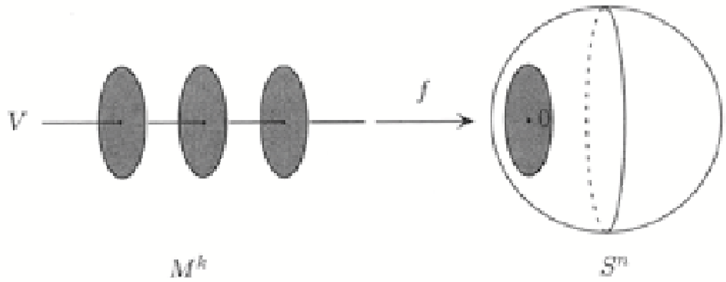
۱-۲-۱ قضیه: نگاشت فروریزش یک نگاشت دوسویی $[M, S^n] \longrightarrow \Omega^{fr}_{k-n,M}$ القا می‌کند.

قبل از اثبات قضیه توجه کنید که با استفاده از این حکم به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $\pi_n S^n = \mathbb{Z}$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت $\pi_3 S^2 = \mathbb{Z}$ و $\pi_{n+1} S^n = \mathbb{Z}_2$ برای $n > 3$. (چرا؟)

اثبات: برای آن که وارون نگاشت فروریزش $c : \Omega^{fr}_{k-n,M} \longrightarrow [M, S^n]$ یعنی $d : [M, S^n] \longrightarrow \Omega^{fr}_{k-n,M}$ را تعریف کنیم از قضیه‌های تقاطع[2] در توپولوژی دیفرانسیل استفاده می‌کنیم. می‌دانیم برای هر عضو $[M, S^n]$ یک نماینده هموار وجود دارد $f : M \longrightarrow S^n = \mathbb{R}^n \cup \infty$، در همسایگی $f^{-1}(\circ)$ هموار است و به $\circ$ متقاطع است. ($\circ$ مقدار عادی است) در نتیجه $f^{-1}(\circ) = V$ زیرخمینه هموار M^k است و نقص بعد آن n است. همچنین df کلاف عمود V در M^k را به عقب کشیده[3] شده کلاف عمود $\circ \in S^n$ توسط f می‌برد. به عبارت دقیق‌تر اگر $\nu(V \hookrightarrow M^k)$ کلاف عمود V باشد.

$$\begin{array}{ccc} \nu(V \hookrightarrow M^k) & \xrightarrow{df} & \nu(\circ \hookrightarrow S^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

که در هر تار ایزومورفیسم است.



1) collapse map 2) transversality 3) pull back

چون کلاف عمود 0 در $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ به طور طبیعی فریم دارد، پس کلاف عمود V در M^k نیز همین طور است. پس نگاشت d هر $[f]$ را به $f^{-1}(0)$ با فریم بالا می‌برد. d خوش‌تعریف است. چون فرض کنید

$$F : M \times I \longrightarrow S^n$$

هموتوپی باشد که $F|_{M\times\{0,1\}}$ بر $0 \in S^n$ متقاطع باشد. تعریف می‌کنیم $\hat{F} : M \times I \longrightarrow S^n \times I$ $\hat{F}(m,t) \mapsto (F(m,t),t)$ با استفاده از قضیه‌های تقاطع $\hat{F}$ با نگاشتی که به $0 \times I$ متقاطع باشد، هموتوپ است. تصویر وارون $0 \times I$ توسط $\hat{F}$ یک فریم بردیسم (با فریم عمود) بین $F|^{-1}_{M\times\{0\}}(0)$ و $F|^{-1}_{M\times\{1\}}(0)$.
در نهایت باید نشان دهیم c, d وارون یک دیگر هستند. $d \circ c$ همانی است روشن است اما $c \circ d$ نیاز به توضیح دارد. فرض کنید f نماینده عضوی از $[M, S^n]$ باشد که بر $0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = S^n$ متقاطع است. نشان می‌دهیم نگاشت فروریزش $V = f^{-1}(0)$ با فریم عمود که توسط نگاشت df القا می‌شود با f هموتوپ است. فرض کنید $\nu = \nu(V \hookrightarrow M)$ و $g : \nu \longrightarrow M$ همسایگی لوله‌ای حول V باشد. فرض کنید ν مجهز به متریک باشد قرار دهید $D = g(D(\nu))$ (مقصود از $D(\nu)$ کلاف دیسک ν است.) تعریف می‌کنیم $\Phi : \nu \longrightarrow \mathbb{R}^n$، $\Phi(X) = \lim_{t\to 0} t^{-1} f(g(tx))$. با استفاده از قانون زنجیره‌ای Φ ترکیب یکسان سازی کلاف $\nu \longrightarrow \nu(V \hookrightarrow \nu)$ و $df \circ dg$ است. به طور مشخص ϕ از هر تار ν به $\mathbb{R}^n$ یک ایزومورفیسم می‌دهد.

هموتوپی $f_t : D \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ برای $-1 \le t \le 1$

$$f_t(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{1+t\|x\|}\Phi(x) & \text{اگر} \quad -1 \le t \le 0 \\ t^{-1} f(g(tx)) & \text{اگر} \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

وجود دارد. حال نگاشت

$$\partial D \times [-1,1] \cup (M - \operatorname{Int} D) \times \{1\} \cup (M - \operatorname{Int} D) \times \{-1\} \longrightarrow S^n - \{0\}$$

به دست می‌آید که روی قسمت اول f_t و روی قسمت دوم f است و روی قسمت سوم روی نامتناهی یا بینهایت ثابت است. این نگاشت را با قضیه تیتزه[1] به نگاشت

$$(M - \operatorname{Int} D) \times [-1,1] \longrightarrow S^n - \{0\}$$

1) Tietze

گسترش می‌دهیم. با چسباندن f_t هموتوپی $F : M \times [-۱,۱] \longrightarrow S^n$ به دست می‌آید که هموتوپی است از f به نگاشت h که $h^{-۱}\mathbb{R}^n = \mathrm{Int}\, D \cong V \times \mathbb{R}^n$. پس $f \simeq h$ و h در تصویر c است در نتیجه c پوشا است و c, d وارون یکدیگر هستند.■

۱-۲-۲ تعریف: مقصود از سوسپانسیون فضای X که نقطه پایه نیز دارد $\frac{X\times I}{(x_\circ\times I)\cup(x\times\{\circ,۱\})}$ است که با SX نشان می‌دهیم.

اگر نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ نقاط پایه را حفظ کند (می‌گوییم کلاس f در $[X,Y]_\circ$ است). سوسپانسیون نگاشتی از $[X,Y]_\circ$ به $[SX,SY]_\circ$ تعریف می‌کند.

۱-۲-۳ قضیه (سوسپانسیون فرودنتال[1]): فرض کنید X فضای $(n-۱)$ـ همبند $(n \geq ۲)$ باشد.

$$S : \pi_k X \longrightarrow \pi_{k+۱} SX$$

برای $k < ۲n - ۱$ ایزومورفیسم است و برای $k = ۲n - ۱$ پوشا است.

۱-۲-۴ تعریف: kـامین گروه پایدار هموتوپی فضای X که نقطه پایه هم دارد را حد مستقیم زیر تعریف می‌کنیم.

$$\pi_k^S X = \mathrm{colim}_{l\to\infty} \pi_{k+l} S^l X$$

با استفاده از قضیه فرودنتال داریم.

۱-۲-۵ نتیجه: اگر X همبند مسیری باشد

$$\pi_k^S(X) = \pi_{۲k}(S^k X) = \pi_{k+l}(S^l X) \qquad \text{برای } l \geq k$$

$$\pi_k^S = \pi_k^S(S^\circ) = \pi_{۲k+۲}(S^{k+۲}) = \pi_{k+l}(S^l) \qquad \text{برای } l \geq k+۲$$

1) Freudenthal suspension theorem

۱-۲-۶ نتیجه: ساختار پنتریاگین ـ توم یکریختی از π_k^S به کلاس‌های بردیسم k بعدی با فریم عمود که زیرخمینه بسته S^n برای $n \geq 2k+2$ می‌دهد.

۱-۲-۷ تعریف: فریم مماس پایدار روی خمینه k بعدی v، کلاس هم‌ارزی بدیهی سازی کلاف $TV \oplus \varepsilon^n$ که ε^n کلاف بدیهی nـ بعدی روی V است. دو بدیهی سازی

$$t_1 : TV \oplus \varepsilon^{n_1} \cong \varepsilon^{k+n}, t_2 : TV \oplus \varepsilon^{n_2} \cong \varepsilon^{k+n_2}$$

هم‌ارز هستند اگر N بزرگتر از n_1, n_2 یافت شود که

$$t_1 \oplus \mathrm{Id} : TV \oplus \varepsilon^{n_1} \oplus \varepsilon^{N-n_1} \cong \varepsilon^{k+N}$$

$$t_2 \oplus \mathrm{Id} : TV \oplus \varepsilon^{n_2} \oplus \varepsilon^{N-n_1} \cong \varepsilon^{k+N}$$

این دو بدیهی سازی هموتوپ باشند.

به راحتی دیده می‌شود که فریم مماس پایدار با فریم عمود پایدار برای $V \subset S^n$ هم‌ارز هستند. به طور کلی دو کلاف F, E را روی V **هم‌ارز پایدار** می‌گویند اگر $E \oplus \varepsilon^j$ و $F \oplus \varepsilon^i$ برای i, j طبیعی یکریخت باشند. پس نتیجه قبل را می‌توان این طور عنوان کرد.

۱-۲-۸ نتیجه: π_k^S یکریخت است با کلاس‌های بردیسم k بعدی مجهز به فریم مماس پایدار.

این نتیجه بهتر از قبلی است چون به خود خمینه k بعدی اشاره دارد نه نشاندن آن در S^n.

۱-۲-۹ تعریف: فرض کنید $(V_i, \gamma_i : TV_i \oplus \varepsilon^a \cong \varepsilon^{k+a})$، $i = 0, 1$ دو خمینه k بعدی با فریم پایدار باشند و $g_i : V_i \longrightarrow X$ $i = 0, 1$ دو نگاشت می‌گوییم (V_0, γ_0, g_0) **کبردانت با فریم پایدار است** با (V_1, γ_1, g_1) روی X اگر بردیسم با فریم پایدار (W, τ) از (V_0, γ_0) به (V_1, γ_1) و نگاشت $G : W \longrightarrow X$ که گسترش g_0 و g_1 است، پیدا شود.

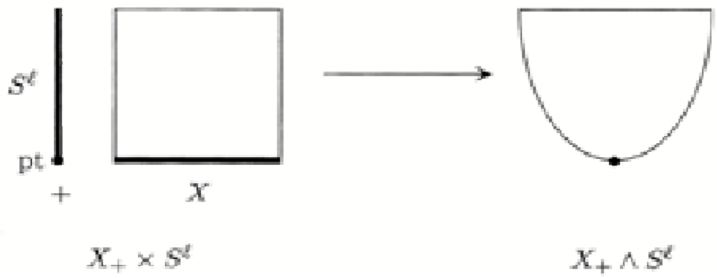
منظور ما از X_+، $X \coprod pt$، یعنی اجتماع X و یک نقطه و همچنین از $\Omega_k^{fr}(X)$ کلاس بردیسم k بعدی با فریم پایدار روی X است.

۱-۲-۱۰ قضیه: $\Omega_k^{fr}(X) = \pi_k^S(X)$.

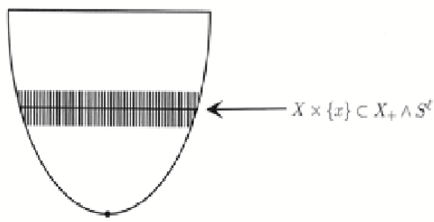
طرحی از اثبات: l را به قدر کافی بزرگ اختیار می‌کنیم که $\pi_k^S(X) = \pi_{k+l}(X_+ \wedge S^l)$.

ضرب پرسی یا کوبشی[1] $X_+ \wedge s^l$ برابر است با

$$X_+ \times S^l / X_+ \vee S^l = X \times S^l / X \times pt$$



فرض کنید $f : S^{k+l} \longrightarrow X_+ \wedge S^l$، نماینده‌ای باشد که به $X \times \{x\}$ متقاطع است، که x اینجا نقطه‌ای به جز نقطه‌ی پایه‌ای S^l است. $f^{-1}(X \times \{x\}) = V$ هموار است و چون $X \times \{x\}$ در $X_+ \wedge S^l$ همسانریخت $X \times \mathbb{R}^l$ است.



زیرخمینه V دارای فریم کلاف عمود است و $f|_V : V \longrightarrow X \times \{x\}$.

این روند نشان می‌دهد چگونه به خمینه با فریم پایدار که به X نگاشته شده است، نگاشتی (پایدار) مثل $f : S^{k+l} \longrightarrow X_+ \wedge S^l$ نسبت دهیم، حال مثل ساختار پنتریاگین ـ توم می‌توانیم نشان $\Omega_k^{fr}(X) \longrightarrow \pi_{k+l}(S^l \wedge X_+)$ یکریختی است. (البته توجه کنید در بالا لزومی ندارد X هموار باشد در نتیجه مقصود از متقاطع بود فقط در راستای عمود است چون کره است معنی دارد.)■

1) Smash product

۱-۳ مجتمع توم و محاسبه $\Omega/torsion$

فرض کنید کلاف برداری ξ روی پایه همبند و هموار و بسته B با تار $\mathbb{R}^n$ و گروه ساختاری $G = O(n)$ (یا $SO(n)$، $U(n/۲)$ و $Sp(n/۴)$) باشد و نگاشت افکنش $p : E \longrightarrow B$:

$$\xi = (E, B, p, F, G), \qquad F \cong \mathbb{R}^n, \qquad G = O(n)$$

اگر توجه‌مان را به بردارهای با طول کمتر از واحد در هر تار محدود کنیم کلاف تاری $\tilde{E} \longrightarrow B$ با تارهای $\tilde{F} \cong \tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ و مرز $\partial \bar{E}$ کلاف تاری با تار $S^{n-۱}$ است.

۱-۳-۱ تعریف: مجتمع توم $M(\xi)$، از کلاف برداری ξ مجتمع خارج قسمت $M(\xi) = \frac{\tilde{E}}{\partial \tilde{E}}$ که از تکه نقطه کردن مرز $\tilde{E}$ یعنی $\partial \tilde{E}$ به دست می‌آید.

چند حکم کلاسیک از توم را بدون اثبات عنوان می‌کنیم.

۱-۳-۲ قضیه (یکریختی توم): برای هر $i \geq ۰$ یکریختی‌های طبیعی زیر وجود دارند:

$$\varphi : H_i(B) \longrightarrow H_{n+i}(M(\xi))$$

$$\varphi : H^i(B) \longrightarrow H^{n+i}(M(\xi))$$

که $n = \dim F$. (در صورتی که $G = O(n)$ ضرایب پاد همانستگی $\mathbb{Z}_۲$ و اگر $G = SO(n)$ ضرایب می‌تواند $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_p$، $p > ۲$، اول باشد.).

به $\varphi(۱) \in H^n(M(\xi))$،کلاس توم می‌گویند و از مقدمات توپولوژی جبری می‌دانیم اگر $w_j \in H^j(B, \mathbb{Z}_۲)$ کلاس اشتیفل ـ ویتنی[1] باشد

$$w_j = \varphi^{-۱}(Sq^j \varphi(۱)) \qquad \text{(برابری توم)}$$

که Sq مربع استینراد[2] است.

1) Stiefle-Whitney class 2) Steenrod Squares

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $MSO(1) = S^1$ (منظور $BSO(1)$ ⟵ $ESO(1)$ کلاف جهانی برای بعد ۱) و $MO(1) = \mathbb{R}P^\infty$، $MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty$.

پس در واقع $MSO(1)$، $MO(1)$، $MSO(2)$ فضاهای آیلنبرگ مک‌لین[1] هستند.

۱-۳-۳ لم: مجتمع توم $M(\xi)$ از کلاف برداری ξ با تار $F \cong \mathbb{R}^n$، $(n-1)$ـ همبند است.

$$\pi_j(M(\xi)) = 0 \qquad \text{برای} \qquad 1 \leq j < n$$

و همچنین

$$\pi_n(M(\xi)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{اگر } \xi \text{ جهت‌پذیر باشد} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{اگر } \xi \text{ جهت‌پذیر نباشد} \end{cases}$$

اثبات: ساختار سلولی $M(\xi)$ را می‌توان از روی پایه B به دست آورد، این طورکه ضرب سلول‌های B در تک سلول nـ بعدی $F \cong D^n$ در $\tilde{E}$. البته به غیر از اینها یک سلول ۰ـ بعدی σ° در $M(\xi)$ نیز داریم. چون هیچ سلول با بعد کمتر از n در ساختار $M(\xi)$ با استفاده از قضیه هورویچ[2] داریم $\pi_j(M(\xi)) = 0$ برای $j < n$.
حال به ادعای دوم می‌رسیم چون B همبند می‌توان فرض کرد در ساختار سلولی B تنها ۱ سلول ۰ ـ بعدی داریم. پس با توجه به ساختار سلولی $M(\xi)$ که در بالا اشاره شد تنها سلول n بعدی $M(\xi)$ از تنها سلول ۰ـ بعدی B به دست می‌آید. در نتیجه $H^n(M(\xi))$ دوری خواهد بود. اگر ξ جهت‌پذیر نباشد مسیری بسته در نظر می‌گیریم حول نقطه $\sigma^\circ \in B$ که جهت تار مماس $F = \mathbb{R}^n$ را در طول مسیر برگرداند این سلول ۱ـ بعدی σ^1 را در B در نظر بگیرید $P^{-1}(\sigma) = \varphi(\sigma^1) = \sigma^{n+1}$ در سلول‌بندی $M(\xi)$. داریم $2\sigma^n = \partial(\sigma^{n+1})$ در صورتی که اگر ξ جهت‌پذیر باشد مرز سلول $n+1$ـ بعدی $P^{-1}(\sigma_j)$ در $M(\xi)$ صفر خواهد شد پس ادعا با استفاده از هورویچ حاصل می‌شود.■

حال همان طورکه گفتیم یکی از مهمترین نتایج کارهای توم تبدیل مسئله کبردیسم به هموتوپی است.

1) Eilenberg-Maclane 2) Hurewicz

۱-۳-۴ قضیه: گروه کبردیسم Ω_i^O و Ω_i^{SO} با گروه هموتوپی پایدار $MO(n)$،$MSO(n)$ یکریخت هستند، یعنی

$$\pi_{n+i}(MO(n)) \simeq \Omega_i^O \qquad \pi_{n+i}(SO(n)) \simeq \Omega_i^{SO}$$

برای $i < n - ۱$ (در واقع چیزی که در بردیسم مجهز به فرم ثابت کردیم برای $G = \{e\}$ که در این صورت $\pi_{n+i}(M\{e\}) = \pi_{n+i}(S^n)$.)

اثبات: فرض کنید M^i خمینه هموار بسته با بعد i، $n - ۱ > i$، به عنوان زیرخمینه $\mathbb{R}^{n+i}$ است. (می‌دانیم چنین نشاندن با استفاده از قضیه‌های نشاندن ویتنی امکان‌پذیر است. همچنین می‌دانیم هر دو نشاندنی در این حالت ایزوتوپ هستند.) در نتیجه کلاس کلاف عمود به طور یکتا مشخص می‌شود که این کلاس را با ν نشان می‌دهیم. فرض کنید $\hat{\xi}$ کلاف جهانی روی $BO(n)$ باشد با تار $\mathbb{R}^n$ که ν از عقب کشیدن ξ توسط نگاشت

$$\psi : M^i \longrightarrow BO(n)$$

به دست آمده است. نگاشتی که بین ν و $\hat{\xi}$ القا می‌شود را با $\hat{\psi}$ نشان می‌دهیم. حال بردارهای با طول کمتر از واحد در ν را می‌توان به عنوان همسایگی N از M^i در $\mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$ در نظر گرفت، این کمک را به ما می‌کند که $\hat{\psi}$ را به عنوان نگاشتی از همسایگی N از M^i به زیرفضای $\tilde{E}$ از E در نظر بگیریم. مکمل N از S^{n+i} را به نقطه σ° در $M(\xi)$ می‌فرستیم در نتیجه نگاشتی از $\hat{\psi}$ به دست می‌آوریم:

$$f : S^{n+i} \longrightarrow M(\hat{\xi}) = MO(n)$$

باز مانند استدلال‌های بخش قبل می‌توان دید f به $BO(n) \subset M(\hat{\xi})$ متقاطع است و $M^i = f^{-۱}(BO(n))$ به عبارت دیگر در هر $x \in M^i = f^{-۱}(BO(n))$ تصویر فضای مماس R_x^{n+i} به S^{n+i} در x تحت df به صفحه مماس $BO(n) \subset M(\hat{\xi})$ در $f(x)$ متقاطع است.

حال فرض کنید $M_۰^i$ و $M_۱^i$ دو خمینه بسته و هموار باشند که کبردانت هستند یعنی وجود دارد خمینه $W^{i+۱}$ که $\partial W^{i+۱} = M_۰^i \cup M_۱^i$ (اجتماع مجزا). ما می‌توانیم $W^{i+۱}$ را در $\mathbb{R}^{n+i} \times I$ بنشانیم طوری که $M_۰^i$ در $\mathbb{R}^{n+i} \times \{۰\}$ قرار بگیرد و $M_۱^i$ در $\mathbb{R}^{n+i} \times \{۱\}$، طوری که $W^{i+۱}$ به این دو مرز به طور عمود نزدیک شود.

دقیقاً مانند ساختار پنتریاگین ـ توم در بالا نگاشت: $S^{n+i} \times I \longrightarrow M(\hat{\xi})$ را به دست می‌آوریم، که هموتوپی است بین دو نگاشت:

$$f_\circ : S^{n+i} \longrightarrow M(\hat{\xi}) \qquad f_1 : S^{n+i} \longrightarrow M(\hat{\xi})$$

پس نگاشت خوش تعریفی به دست می‌آوریم برای $i < n - 1$

$$\Omega_i^O \longrightarrow \pi_{n+i}\left(MO(n)\right)$$

که یک به یک بودن آن از بحث بالا به دست می‌آید و پوشایی آن نیز روشن چون هر عضو هموتوپی را می‌توان با نگاشتی هموار تقریب زد و $M^i = f^{-1}(BO(n))$ دقیقاً مانند آنچه در فریم بردیسم ثابت کردیم خمینه عضو Ω_i^O موردنظر است. مشابه حرف‌های بالا برای نگاشت

$$\Omega_i^{SO} \longrightarrow \pi_{n+i}(MO(n))$$

می‌توان زد.■

۱-۳-۵ قضیه: (i) $x \in H_i(M^{n+i}, \mathbb{Z}_2)$ توسط زیرخمینه بسته قابل نمایش است ($M^i \subset M^{n+i}$) اگر و فقط اگر نگاشت $f : M^{n+i} \longrightarrow MO(n)$ وجود داشته باشد به طوری که $f^*\varphi(1) = Dx$، که $\varphi(1)$ کلاس توم و D دوگانی پوانکاره است.

(ii) $x \in H_i(M^{n+i}, \mathbb{Z})$ توسط زیرخمینه $M^{n+i} \supset M^i$ قابل نمایش است اگر و فقط اگر نگاشت $f : M^{n+i} \longrightarrow MSO(n)$ یافت شود که $f^*\varphi(1) = Dx$.

(iii) $x \in H_i(M^{n+i}, \mathbb{Z})$ (M^{n+i} جهت‌پذیر است.) توسط زیرخمینه $M^{n+i} \supset M^i$ که کلاف عمودش بدیهی است. قابل نمایش است اگر و فقط اگر نگاشت $f : M^{n+i} \longrightarrow S^n$ که $f^*\varphi(1) = Dx$.

اثبات هر سه قسمت دقیقاً مشابه هم هستند. ایده‌های اثبات (i) را توضیح خواهیم داد.

اثبات: (i) فرض کنید $M^i \subseteq M^{n+i}$ زیرخمینه با بعد i باشد. کلاف عمود M^i در M^{n+i} مانند قضیه قبل منجر به نگاشتی مانند $f : M^{n+i} \longrightarrow MO(n)$ می‌شود. نگاشت f مکمل همسایگی لوله‌ای M^i را به تک

نقطه σ° در مجتمع توم $MO(n)$ می‌برد (نقطه σ° از انقباض $\partial\tilde{E}$ در کلاف $\tilde{E} \longrightarrow BO$ به دست آمده).
می‌دانیم دوگان پوانکاره M^i کلاس توم کلاف عمود M^i در M^{n+i} می‌شود در نتیجه چون f کلاف عمود را به کلاف عمود $BO(n)$ می‌برد در نتیجه داریم

$$f^*\varphi(1) = D[M^i] \qquad (1)$$

که $\varphi : H^\circ(BO(n), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^n(MO(n), \mathbb{Z}_2)$ نگاشت توم است.

برعکس اگر $x \in M_i(M^{n+i}, \mathbb{Z}_2)$ شرط (i) را ارضا کند در این صورت $f : M^{n+i} \longrightarrow MO(n)$.
می‌دانیم می‌توان با استفاده از قضیه‌های تقاطع فرض کرد که f بر $BO(n)$ متقاطع است. $f^{-1}(BO(n))$ زیرخمینه iـ بعدی از M^{n+i} که بسته است و همچنین معادله (۱) برای این خمینه نیز صادق است در نتیجه $x = [M^i]$. ■

این قضیه نتایج زیبایی دارد که بعضی را در زیر می‌آوریم.

۱-۳-۶ نتیجه: (i) برای هر i و هر عضو x از $H_i(M^{i+1}, \mathbb{Z}_2)$ توسط زیرخمینه بسته $M^i \subset M^{i+1}$ قابل نمایش است.

(ii) برای هر i، و هر عضو $x \in H_i(M^{i+1}, \mathbb{Z})$ و $x \in H_i(M^{i+2}, \mathbb{Z})$ (M^{i+1} و M^{i+2} جهت‌پذیر هستند) توسط زیرخمینه بسته و جهت‌پذیر قابل نمایش هستند.

اثبات: از قضیه ویتنی می‌دانیم $[X, K[\pi, n]] = H^n(X, \pi)$ در نتیجه

$$H^1(M^{i+1}, \mathbb{Z}_2) \cong [M^{i+1}, K(\mathbb{Z}_2, 1)]$$

با استفاده از دوگانی پوانکاره $Dx \in H^1(M^{i+1}, \mathbb{Z}_2)$ متناظر با کلاس هموتوپی نگاشتی $f : M^{i+1} \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 1)$ است که $f^*u = Dx$. u در اینجا کلاس بنیادی $H^1(K[\mathbb{Z}_2, 1], \mathbb{Z}_2)$ است. که با توجه به آن که $K(\mathbb{Z}_2, 1) \cong MO(1)$ و قضیه قبل حکم ثابت شد.

قسمت بعدی نیز چون $MSO(2) = K(\mathbb{Z}, 2)$ و $MSO(1) = K(\mathbb{Z}, 1)$ به طور مشابه حکم ثابت می‌شود.■

قبل بیان نتیجه بعدی می‌خواهیم از قضیه مهم کارتان سِر[1] در نظریه هموتوپی استفاده کنیم که صورتش را اشاره می‌کنم.

۱-۳-۷ قضیه (کارتان ـ سر): برای فضای آبلی X (یعنی عمل $\pi_۱$ روی π_n برای $n > ۱$ بدیهی است.) که $H^*(X, \mathbb{Q})$ ضرب تانسوری جبر چندجمله‌ای در بعد زوج و جبر خارجی در بعد فرد باشد یعنی $H^*(X, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[X_۱, \ldots] \otimes \Lambda[y_۱, \ldots]$ در این صورت $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ نیز فضای برداری است که با $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}$ تولید می‌شود که $\dim \bar{x}_i = \dim x_i$، $\dim \bar{y}_i = \dim y_i$. باز به عبارت دیگر $X_{\mathbb{Q}}$ (موضعی سازی X در $\mathbb{Q}$) با ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین هم‌ارز هموتوپی است.

۱-۳-۸ نتیجه: فرض کنید $x \in H_i(M^{n+i}, \mathbb{Z})$ که $i < n - ۱$. در این صورت وجود دارد λ عدد صحیح ناصفر که λx توسط زیرخمینه $M^i \subset M^{n+i}$ قابل نمایش است.

اثبات: می‌دانیم $MSO(n)$، $(n - ۱)$ـ همبند است. قضیه‌ای از سر (Serre) می‌گوید اگر X، $(n - ۱)$ـ همبند باشد در این صورت $H : \pi_q(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_q(X) \otimes \mathbb{Q}$ (نگاشت هورویچ) برای $q < ۲n - ۱$ یکریختی است. در نتیجه $MSO(n)$ تا بعد کمتر از $۲n - ۱$، هم‌ارز هموتوپی است با ضرب فضاهای آینبرگ مک لین $K(\pi_j, m_j)$ است که $m_j \geq n$. در نتیجه مانند اثبات قبل چون $MSO(n)$ در این ابعاد به صورت $K(\pi, m)$ است مانند $K(\mathbb{Z}, ۱)$ و $K(\mathbb{Z}, ۲)$ در نتیجه قبل حکم حاصل می‌شود. ■

۱-۳-۹ نتیجه: اگر X مجتمع سلولی متناهی باشد برای هر $x \in H_i(X, \mathbb{Z})$ وجود دارد عدد صحیح ناصفر λ که λx قابل نمایش به صورت بردیسم تبهگون است، یعنی وجود دارد $g : M^i \longrightarrow X$ که $g_*[M^i] = \lambda x$ (نویکوف[2] نشان داده که گروه همانستگی تاب مرتبه فرد نداشته باشد $\lambda = ۱$ کار می‌کند.)

اثبات: در ابتدا X را در فضای $\mathbb{R}^{N+i}$ برای N به قدر کافی بزرگ می‌نشانیم. X را در $\mathbb{R}^{N+i}$ قطور کنید به U که $X \subset U$ و U به X توکش شود $X \sim U$. چون $H_i(X) = H_i(U)$، کلاس x را می‌توان در $H_i(U)$ در

1) Cartan-Serre 2) Novikov

نظر گرفت. با استفاده از نتیجه قبلی نگاشتی $f:(U,\partial U)\longrightarrow MSO(n)$ که ∂U را به یک نقطه می‌برد و

$$f^*(\varphi(۱)) = D(\lambda x) = D[M^i]$$

برای λ صحیح نامنفرد و زیرخمینه $M^i \subset U$.■

حال با استفاده از همه این احکام به سادگی نتیجه زیر به دست می‌آید.

۱-۳-۱۰ نتیجه: همریختی طبیعی بین

$$\Omega_i^{SO}(X,Y)\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow H_i(X,Y,\mathbb{Q})$$

بین iامین گروه بردیسم (به پیمانه تاب) به iامین گروه همانستگی **پوشا** است.

حال با استفاده از قضیه یکریختی توم و احکام در صورتی که ساختار $H^*(BG(n),\mathbb{Q})$ ($G=O$ یا SO) اما گروه پادهمانستگی با ضرایب $\mathbb{Q}$ برای گروه کلاسیک شناخته شده است (به کمک دنباله طیفی[۱])

$$H^*(BSO(۲k),\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_۱,\dots,p_{k-۱},X] \qquad \deg p_i = ۴i$$

$$\deg X = ۲k \qquad p_k = X^۲$$

$$H^*(BSO(۲k+۱),\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_۱,\dots,p_k] \qquad \deg p_i = ۴i$$

$$H^*(BU(k),\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_۱,\dots,c_k] \qquad \deg c_i = ۲i$$

که در بالا در واقع X کلاس اویلر و p_i کلاس پنتریاگین، c_i کلاس چرن[۲] است.

حال با استفاده از یکریختی توم داریم:

$$\varphi: H^i(BSO(n),\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^{n+i}(MSO(n),\mathbb{Q})$$

در نتیجه برای $j<n$ که به شکل kها نیست، داریم $H^{n+j}(MSO(n),\mathbb{Q})=۰$ $n>j\neq ۴k$، در صورتی که برای $n>j=۴k$، گروه پایدار $(H^{۴k}(BSO(n),\mathbb{Q})\simeq)H^{n+۴k}(MSO(n),\mathbb{Q})$، رتبه‌اش برابر تعداد افرازهای $k=m_۱+\dots+m_q$ از عدد k است. فضای برداری $H^{۴k}(BSO(n),\mathbb{Q})$ پایه‌ای از تک‌جمله‌ای $z=p_{m_۱}p_{m_۲}\dots p_{m_q}$ از کلاس‌های پنتریاگین p_i که $\deg z = ۴(m_۱+\dots+m_q)$.

1) Spectral Sequence 2) Chern class

۱-۳-۱۱ قضیه: (i) گروه کبردیسم گویا (به پیمانه تاب) $\Omega_j^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ برای $j \neq ۴k$ بدیهی است.

$$\Omega_j^{SO} \otimes \mathbb{Q} = ۰ \qquad j \neq ۴k$$

(ii) برای $k = ۱, ۲, \ldots$ رتبه گروه $\Omega_{۴k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ (و یا بعدش به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{Q}$) برابر تعداد بردارهای مستقل خطی از عددهای مشخصه (پایدار) از خمینه $۴k$ـ بعدی بسته (یعنی بردارهایی که به صورت تک‌جمله‌های $p_{m_۱} p_{m_۲} \ldots p_{m_q}$ (از یک رتبه مشخص) از کلاس‌های پنتریاگین $p_i \in H^{۴i}(M^{۴k}, \mathbb{Q})$ که $\sum_{i=۱}^q m_i = K$.

اثبات: چون مجتمع $MSO(n)$، $(n-۱)$ـ همبند است دوباره با استفاده از قضیه **کارتان ـ سرو** همچنین قضیه سر داریم:

$$\pi_j(MSO(n)) \otimes \mathbb{Q} \simeq H_j(MSO(n), \mathbb{Q}) = (\simeq H^j(MSO(n), \mathbb{Q}) \qquad \text{(I)}$$

برای $j < ۲n - ۱$. اگر از یکریختی توم و ساختار $H^*(BSO(n), \mathbb{Q})$ و همچنین رابطه Ω_i^{SO} و هموتوپی $MSO(n)$ استفاده کنیم:

$$\pi_{n+i}(MSO(n)) \simeq \Omega_i^{SO} \qquad i < n - ۱ \qquad \text{(II)}$$

$$I, II \Longrightarrow F : \Omega_i^{SO} \otimes \mathbb{Q} \simeq H^i(BSO(n), \mathbb{Q}) \qquad i < n - ۱$$

در نتیجه با توجه به ساختار $H^i(BSO(n), \mathbb{Q})$ روشن است که $\Omega_i^{SO} \otimes \mathbb{Q} = ۰$ برای $i \neq ۴k$ و همچنین رتبه $\Omega_{۴k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ برابر تعداد افرازهای عدد طبیعی k است. حال باید نشان دهیم که اگر عددهای مشخصه خمینه بسته M^i صفر شود در این صورت $[M^i] = ۰$ در $\Omega_i^{SO} \otimes \mathbb{Q}$. چون F یکریختی است پس برای هر $w \in H^i(BSO(n), \mathbb{Q})$ و هر خمینه جهت‌پذیر، بسته

$$(w, F[M_i]^*) = (F^* w, [M^i])$$

که اعداد مشخصه M^i هستند. توجه کنید در رابطه بالا یک $[M^i]$ مقصود کلاس آن در کبردیسم جهت‌دار است و یک $[M_i]$ مقصود کلاس بنیادی خمینه است. چون این رابطه $F[M_i]$ را (به دلیل دوگانی در فضای برداری) مشخص می‌کند در نتیجه صفر شدن اعداد مشخصه M^i نتیجه می‌دهد $[M^i] = ۰$ در $\Omega_i^{SO} \otimes \mathbb{Q}$.■

حکم بالا دقیقاً برعکس حکمی است که پنتریاگین ثابت کرده بود که در مقدمه آوردیم منتها می‌گوید اگر اعداد مشخصه (پایدار) صفر شود به پیمانه تاب Ω_i^{SO} صفر خواهد بود. اما در بخش‌های بعدی خواهیم دید که به پیمانه تاب نیز نیازی نیست در واقع این ابتدا توسط توم حدس زده شد ولی توسط وال ثابت شد.

۱-۴ اشاره به کاربردهای ساختار $\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q}$

هیرزبروخ با استفاده از قضیه‌هایی که توم در سال ۱۹۵۶ ثابت کرده بود، دو قضیه بسیار مهم به اسم قضیه نشان هیرزبروخ و قضیه هیرزبروخ ـ ریمان ـ رخ[1] را ثابت کرد. که ما در این قسمت ایده اصلی قضیه نشان هیرزبروخ را خواهیم گفت.

در ابتدای مشاهده توم را توضیح می‌دهیم. فرض کنید $M^4 = \mathbb{C}P^2$ با جهت طبیعی. می‌دانیم که چندجمله مشخصه کلاس پنتریاگین $\mathbb{C}P^2$ برابر

$$p(z) = (1 + z^2t^2)^3 = 1 + p_1 z^2$$

که در اینجا t مولد گروه $H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$ است وقتی در $H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Q})$ در نظر گرفته شود. در نتیجه $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$.

حال فرض کنید $M_1^8 = \mathbb{C}P^4$ و دوباره مثل قبل می‌خواهیم اعداد مشخصه پنتریاگین را برای $\mathbb{C}P^4$ محاسبه کنیم.

$$p(z) = 1 + p_1 z^2 + p_2 z^4 = (1 + z^2t^2)^5 = 1 + 5t^2 + 10t^4z^4$$

که در اینجا باز t مولد $H^2(\mathbb{C}P^4, \mathbb{Z})$ است که در $H^2(\mathbb{C}P^4, \mathbb{Q})$ در نظر گرفته شود.

$$p_1^2 = 25 \qquad p_2 = 10$$

این بار فرض کنید $M_2^8 = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$ در این حالت چندجمله‌ای پنتریاگین

$$p(z) = 1 + p_1 z^2 + p_2 z^4 = (1 + t_1^2 z^2)^3 (1 + t_2^2 z^2)^3$$
$$= 1 + 3(t_1^2 + t_2^2) z^2 + q t_1^2 t_2^2 z^4$$

1) Hirzebruch-Riemann-Roch Theorem

که در اینجا t_i مولدهای $H^2(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Z})$ هستند که در $H^2(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Q})$ در نظر گرفته شده‌اند. چون می‌دانیم $(t_1^2)^2 = (t_2)^2 = 0$ (به خاطر بعد) در نتیجه $(t_1^2 + t_2^2)^2 = 2t_1^2t_2^2$. پس اعداد مشخصه M_4^8 می‌شود:

$$p_1^2 = 18 \qquad p_2 = 9$$

حال برگردیم به ساختار $\Omega_{4k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ وقتی $k = 1$، $[\mathbb{C}P^2]$ مولد $\Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ است که رتبه‌اش یک است. چون $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$ و $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$ و چون بقیه خمینه‌های ۴ـ بعدی در $\Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ توسط $[\mathbb{C}P^2]$ تولید می‌شوند در نتیجه چون برای $\mathbb{C}P^2$ داریم: $3\tau = p_1$ پس برای هر خمینه ۴ بعدی رابطه $\tau = \frac{1}{3}p_1$ درست است که به رابطه توم شهرت دارد و حالت خاص نشان هیرزبروخ است. در حالت ۸ـ بعدی با توجه به محاسبات بالا داریم:

	$\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$	$\mathbb{C}P^4$
$p_1^2:$	18	25
$p_2:$	9	10
$\tau;$	1	1

چون طبق ساختار $\Omega_8^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ می‌دانیم که دو مولد $[\mathbb{C}P^4]$ و $[\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2]$ این گروه را تولید می‌کند پس اگر رابطه‌ای برای این دو مولد برقرار باشد برای خمینه‌های ۸ـ بعدی صادق است. به سادگی می‌توان چک کرد که رابطه زیر برای هر دوی آنها صدق می‌کند:

$$\tau = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$$

که برای هر خمینه ۸ـ بعدی طبق حرف‌های بالا معتبر است. به طورکلی توم با این ایده متوجه شد که τ را می‌توان برحسب چندجمله‌ای از کلاس‌های پنتریاگین نوشت اما هیرزبروخ این چندجمله‌ای را معرفی کرد.

ایده‌ی هیرزبروخ استفاده از دنباله‌های ضربی بود. فرض کنید $\{K_j\}$ دنباله‌ای از چندجمله برحسب متغیرهای p_i باشند که $K_0 = 1$ و K_j همگن از درجه j باشد. می‌گوییم $\{K_j\}$ دنباله ضربی است اگر تساوی زیر:

$$1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = (1 + p'_1 z_1 + p'_2 z^2 + \dots)(1 + p''_1 z + p''_2 z^2 + \dots)$$

تساوی زیر را نتیجه دهد:

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1,\ldots,p_j)z^j = (\sum_{i=0}^{\infty} K_i(p'_i,\ldots,p'_i)z^i)(\sum_{j=0}^{\infty} K_j(p''_1,\ldots,p''_j)z^j)$$

به طور خلاصه می‌نویسیم:

$$K(\sum p_i z^i) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1,\ldots,p_j)z^j$$

به چندجمله $K(1+z)$ چندجمله‌ای مشخصه دنباله ضربی $\{K_j\}$ است. به طور مقدماتی نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای مشخصه دنباله ضربی را معین می‌کند. هیرزبروخ چندجمله‌ای مشخصه

$$K(1+z) = Q(z) = \frac{\sqrt{z}}{\tanh\sqrt{z}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_k z^k$$

که B_k اعداد برنولی هستند. دنباله ضربی چندجمله‌ای مشخصه بالا با این چندجمله‌ای‌ها شروع می‌شود.

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{3}p_1,\\
L_2 &= \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2),\\
L_3 &= \frac{1}{3^3\cdot 5\cdot 7}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)\\
L_4 &= \frac{1}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}(381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4)
\end{aligned}$$

که دو جمله اول آن برای ما آشنا است. هیرزبروخ نشان داد که $\{L_k\}$ دنباله ضربی اثرش روی مولدهای $\Omega_{4k}^{SO}\otimes\mathbb{Q}$ که با $[\mathbb{C}P^{2k}]$ و ضرب $[\mathbb{C}P^{2i}]$، $i<k$ به دست می‌آید ۱ می‌شود که همان نشان فضای افکنشی است و در نتیجه قضیه زیر حاصل شد.

۱-۴-۱ قضیه (نشان هیرزبروخ): $\tau(M^{4k})$ خمینه فشرده جهت‌پذیر M^{4k} به صورت ترکیب خطی اعداد پنتریاگین قابل شمارش است. اگر $\{L_j\}$ دنباله ضربی، سری مشخصه $\frac{\sqrt{z}}{\tan h\sqrt{z}}$ باشد در این صورت

$$\tau(M^{4k}) = L_k(p_1,\ldots,p_k)[M^{4k}].$$

فصل ۲

قضیه توم: ساختار هموتوپی فضای توم

۲-۱ ساختار هموتوپی پایدار $MO(n)$

همان طورکه در فصل گذشته اشاره شد سئوال اصلی درکبردیسم آن است که تشخیص دهیم که کلاس همولوژی دلخواه توسط زیرخمینه و یا بردیسم تبهگون قابل نمایش هست یا نه؟

۲-۱-۱ تعریف: می‌گوییم کلاس پادهمانستگی $u \in H^k(A)$ از فضای توپولوژی A، **قابل نمایش نسبت** $G \subset O(K)$ و یا Gـ **نمایش پذیر** است اگر نگاشت $f : A \longrightarrow M(G)$ ($M(G)$ فضای توم برای گروه G است) وجود داشته باشد که f^*، کلاس توم در $M(G)$، U، را به u ببرد.

در فصل گذشته ما قضیه مهم زیر را ثابت کردیم.

۲-۱-۲ قضیه: برای این که کلاس $z \in H_{n-k}(V^n)$، $k > ۰$، توسط خمینه W^{n-k} قابل نمایش باشد به طوری که کلاف عمود W^{n+k} دارای گروه ساختاری G باشد شرط لازم و کافی آن است که z، Gـ نمایش‌پذیر باشد. در نتیجه باتوجه به قضیه برای این که $z \in H_{n+k}(V^n, \mathbb{Z})$ از خمینه جهت‌دار V^n قابل نمایش توسط

زیرخمینه باشد می‌بایست z نسبت به گروه دوران‌ها قابل نمایش باشد. اگر $z \in H_{n-k}(V^n, \mathbb{Z}_2)$ بخواهد به عنوان زیرخمینه قابل نمایش باشد می‌بایستی z نسبت به گروه متعامد قابل نمایش باشد.

حال سعی می‌کنیم ساختار هموتوپی $M(O(k))$ و $M(SO(k))$ را شناسایی کنیم. اگر خمینه گراسمان[1]، صفحه‌های k بعدی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^\infty$، را با G_k نمایش دهیم، از نظریه کلاف‌های جهانی می‌دانیم G_k همان فضای دسته‌بندی $B_{O(k)}$ است که $O(k)$ گروه متعامد است. $\hat{G}_k$ را صفحه‌های k بعدی جهت‌دار در نظر بگیرید که همان فضای دسته‌بندی $B_{SO(k)}$ است. $\hat{G}_k \longrightarrow G_k$ فضای پوششی دولایه است. اگر به هر صفحه k بعدی در $\hat{G}_k$ اشتراک آن را با کره واحد در $\mathbb{R}^\infty$ ، که S^{k-1} می‌شود، نسبت دهید فضای کلاف‌های $E_{SO(k)}$ می‌شود. پس $E_{SO(k)}$ را می‌توان به عنوان فضای زوج همهٔ صفحه‌های k بعدی جهت‌دار و بردارهای واحد در این صفحه، در نظر گرفت. به هر زوج این چنینی صفحه $(k-1)$ـ بعدی که در صفحه k بعدی زوج قرار دارد و بر بردار زوج عمود است در نظر بگیرید. این ساختار $E_{SO(k)}$ را به عنوان کلاف تاری روی $\hat{G}_{k-1}$ با تار S^∞ نشان می‌دهد. چون می‌دانیم S^∞ انقباض‌پذیر است در نتیجه $E_{SO(k)}$ هم‌ارز هموتوپی با $\hat{G}_{k-1}$ است. به فضای توم $M(SO(k))$ می‌توان طور دیگری نیز نگاه کرد. فرض کنید $A_{SO(k)}$ استوانه به دست آمده توسط نگاشت $E_{SO(k)} \longrightarrow B_{SO(k)}$ باشد حال اگر مرز $A_{SO(k)}$ که $E_{SO(k)}$ را مشخص کنیم $M(SO(k))$ می‌شود. در نتیجه نگاشت شمول $A_{SO(k)} \longrightarrow E_{SO(k)}$ هم‌ارز هموتوپی است با نگاشت $\hat{G}_k \longrightarrow \hat{G}_{k-1}$.

گروه پادهمانستگی $M(SO(k))$: با توجه به توضیحات بالا برای بعدهای مثبت می‌توان گروه پادهمانستگی $H^*(M(SO(k)))$ با جبر همانستگی $H^*(\hat{G}_k, \hat{G}_{k-1})$ یکی در نظر گرفت. که این جبر را از دنباله دقیق زیر برای محاسبات به دست می‌آوریم:

$$\ldots \longrightarrow H^r(\hat{G}_k) \xrightarrow{i^*} H^r(\hat{G}_{k-1}) \xrightarrow{\delta^*} H^{r+1}(\hat{G}_k, \hat{G}_{k-1}) \longrightarrow H^{r+1}(\hat{G}_k) \longrightarrow \ldots$$

گروه پادهمانستگی به پیمانه ۲: همان طور که در فصل قبل نیز اشاره شد می‌دانیم جبر پادهمانستگی $H^*(\hat{G}_k, \mathbb{Z}_2)$ جبر چندجمله‌ای برحسب متغیرهای $w_1, w_2, \ldots, w_k$. (به عنوان مثال به کتاب هچر مراجعه کنید.) که w_i کلاس iـام اشتیفل ـ ویتنی است.

1) Grassmann manifold

در دنبالهٔ دقیق بالا w_i با نگاشت i^* به خودش نگاشته می‌شود، پس $H^*(\hat{G}_k, \hat{G}_{k-1})$ یکریخت با جبر چندجمله‌ای است در $H^*(\hat{G}_k, \mathbb{Z}_2)$ که با w_k تولید می‌شود.

گروه پادهمانستگی به پیمانه p برای p اول فرد: باز محاسبه گروه پادهمانستگی به پیمانه p برای $\hat{G}_k$ نیز کلاسیک است که مشمول دو حالت زیر است:

۱) اگر k فرد باشد، $k = 2m+1$. دراین حالت $H^*(\hat{G}_k, \mathbb{Z}_p)$ جبر چندجمله‌ای با مولدهای $p_1, p_n, \dots, p_{4m}$ از بعدهای بخش‌پذیر بر ۴ است. (این مولدها همان کلاس‌های پنتریاگین هستند.)

۲) اگر k زوج باشد $k = 2m$. $H^*(\hat{G}_k, \mathbb{Z}_p)$ جبر چندجمله‌ای با مولدهای $p_4, \dots, p_{4m-4}$ و کلاس بنیادی X_{2m} است. (p_iها کلاس‌های پنتریاگین و X_{2m} کلاس اویلر است.)

گروه پادهمانستگی $M(O(k))$: مانند گروه $M(SO(k))$ فقط به جای $\hat{G}_k$، G_k را جایگزین کنید.

گروه پادهمانستگی به پیمانه ۲: باز مانند قبل فقط با این تفاوت جبر چندجمله‌ای $H^*(G_k, \mathbb{Z}_2)$ با متغیر w_1 و w_2 و $\dots w_k$ تولید می‌شود و $H^*(G_k, G_{k-1})$ ایده‌آل تولید شده توسط w_k در $H^*(G_k, \mathbb{Z}_2)$ است.

گروه پادهمانستگی به پیمانه p: برای k فرد $H^*(G_k, \mathbb{Z}_p)$ و $H^*(\hat{G}_k, \mathbb{Z}_p)$ یکسان هستند. برای k زوج $H^*(G_k, \mathbb{Z}_p)$ جبر چندجمله‌ای با مولدهای $p_4, \dots, p_{4m-4}$ و $(X_k)^2$ است.

در نتیجه به پیمانه p برای k زوج $H^*(\hat{G}_k, \hat{G}_{k-1})$ یکریخت است با ایده‌آل تولید شده توسط X_{2m} در $H^*(\hat{G}_k, \mathbb{Z}_p)$ و در حالت k فرد با جبر خارجی[1] با مولد $\delta(X_{2m})$ است. (δ نگاشت مرز در دنباله دقیق مذکور است.) به طور مشابه برای k فرد $k = 2m+1$، $H^r(G_k, G_{k-1}, \mathbb{Z}_p) = 0$ برای هر $r > 0$، و برای k زوج $k = 2m$. $H^*(G_k, G_{k-1})$ یکریخت ایده‌آل تولید شده توسط $(X_{2m})^2$ است.

در فصل گذشته نشان دادیم $\pi_{k+i}(MO(k))$ و $\pi_{k+i}(MSO(k))$ وقتی $i < k$ به ترتیب یکریخت Ω_i^O و Ω_i^{SO} است که به این معنی است که $\pi_{k+i}(MO(k))$ و $\pi_{k+i}(MSO(k))$ برای Kهای بزرگ مستقل از k است.

در ادامه نیازمند قضیه‌های مهم و عمیق سِر[2] در نظریه هموتوپی خواهیم بود که بعضی از آنها را در فصل گذشته اشاره کردیم. یکی از قضیه‌های مهم سر ساختار جبر پادهمانستگی $H^*(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$ است که

1) Exterior algebra 2) Serre

جبر چندجمله‌ای با مولدهای **مربع‌های مکرر استینراد**[1] است، به عبارت دیگر $H^{k+h}(K(\mathbb{Z}_2,k),\mathbb{Z}_2)$ با $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_r}(i)$ که $\sum_m i_m = h$ تولید می‌شود که i کلاس بنیادی $H^k(K(\mathbb{Z}_2,k),\mathbb{Z}_2)$ است. اما یک پایه برای این گروه که مربع‌های مکرر قابل قبول نام دارند به صورت زیر هستند:

$$Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_r}(i), \qquad i_1 \geq 2i_2, \qquad i_2 \geq 2i_3, \ldots, i_{r-1} \geq 2i_r$$

که مربع‌های استینراد مکرر به طور خلاصه با Sq^I نشان می‌دهیم که $I=(i_1,\ldots,i_r)$ دنبال قابل قبول است. رتبه گروه $H^{k+h}(K(\mathbb{Z}_2,k),\mathbb{Z}_2)$، برابر، $c(h)$، تعداد افرازهای h به اعداد به صورت 2^m-1 است.

گروه پادهمانستگی G_k که با کلاس‌های اشتیفل ـ ویتنی تولید می‌شود اما می‌دانیم کلاس اشتیفل ـ ویتنی w_i توابع متقارن از متغیرهای t_i است که t_iها مولدهای $H^1(\mathbb{R}P^\infty,\mathbb{Z}_2)$ هستند.

$$\underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P^\infty}_{k \text{ مرتبه}} \hookrightarrow G_k.$$

که نگاشتی که روی گروه پادهمانستگی القا می‌شود و توابع متقارن t_iها، w_iها می‌شوند. رابطه (Wu) برای اثبات استقلال خطی مولد به ما کمک می‌کند که به صورت زیر است:

$$Sq^r w_i = \sum \binom{r-i+t-1}{t} w_{r-t}w_{i+t}$$

۲-۱-۳ لم: هر ترکیب خطی از Sq^I از مجموع درجه کمتر k (یعنی $\sum_m i_m = h \leq k$) که روی w_k صفر می‌شود؛ می‌بایست متحد صفر باشد.

اثبات: توجه کنید چه I دنباله قابل قبول باشد چه نباشد $Sq^I(w_k)=w_kQ_i$ که $Q_i \in H^h(G_k)$ یک چندجمله‌ای با درجه h از متغیرهای w_i است. در نتیجه $Sq^I w_k$ نیز عضو ایده‌آل تولید شده توسط w_k در $H^*(G_k)$ است.

فرض کنید I دنباله قابل قبول باشد و

$$Sq^I w_k = w_k Q_I \tag{I}$$

1) Itterated Steenrod squares

که (با توجه به ترتیب Lexicographic) تک‌جمله‌ای مرتبه پایین‌تر $+ Q_I = w_{i_1} \dots w_{i_r}$.

با استقراء روی r حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $r = 1$ از رابطه Wu می‌دانیم $Sq^i w_k = w_k w_i$ پس $Q - i = w_i$. فرض کنید رابطه (۱) برای $r - 1$ برقرار باشد، در این صورت

$$Sq^I w_k = Sq^{i_1}(Sq^{i_2} \dots Sq^{i_r} w_k) = Sq^{i_1}(w_k.p)$$

که p چندجمله‌ای است که با تک‌جمله‌ای (مرتبه کوچکترها) $+ w_{i_2} \dots w_{i_r}$.

$$Sq_i^{i_1}(w_k.p) = \sum_{0 \le m \le i_1} Sq^m(p).Sq^{i-m} w_k = \sum_{0 \le m \le i_1} Sq^m(p).w_{i-m} w_k$$

پس $Sq^I w_k = w_k Q_I$ که

$$Q_I = \sum_{0 \le m \le i_1} Sq^m(p).w_{i_1-m}$$

در این جمع اگر $m = 0$ که pw_{i_1} به شکل (جمله با رتبه کوچکتر) $+ w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_r}$ و علاوه بر این عباراتی که در $Sq^m(p)$ ظاهر می‌شوند که $m > 0$ شامل w_iهایی با مرتبه بزرگتر از w_{i_1} هستند و همچنین با توجه به رابطه wu، $Sq^m w_s$ فقط شامل کلاس w_i که $2s > i$ است، می‌شود. نهایتاً $Sq^m(p)$ شامل w_iهایی است که $i_1 \le 2i_2 < i$ و در نتیجه کوچکتر از $w_{i_1} \dots w_{i_r}$ است.

پس ما ثابت کردیم $Sq^I w_k$ وقتی I روی دنباله قابل قبول با مجموع درجه h تغییر می‌کند در گروه $H^{k+h}(G_k)$ مستقل خطی هستند. در نتیجه اگر آن تک‌جمله‌ای از رتبه ماکسیمم را بگیریم چون برحسب کوچکترها قابل بیان است تناقض است و در نتیجه حکم ثابت می‌شود.■

پس اگر به جای w_iها از توابع متقارن برحسب t_iها را جایگزین کنیم خواهیم داشت.

۲-۱-۴ لم: کلاس $Sq^I(t_1, \dots, t_k)$ وقتی I روی همهٔ دنباله‌های قابل قبول تغییر می‌کند با درجه کمتر از k مستقل خطی هستند.

با توجه به آنچه که در مورد گروه پادهمانستگی $M(O(k))$ گفتیم، که ایده‌آل تولید شده توسط w_k در $H^h(\sigma_k, \mathbb{Z}_2)$ است، می‌توان این ایده‌آل را بر حسب t_i ها نوشت یعنی با

$$\sum (t_1)^{\alpha_1+1}(t_2)^{\alpha_2+1} \dots (t_r)^{\alpha_r+1} t_{r+1} \dots t_k$$

که جمع α_iها برابر h است و این جمع روی همه جایگشت‌ها است تا عبارت متقارنی تولید شود.

۲-۱-۵ تعریف: می‌گوییم t_i در چندجمله‌ای p **دوتایی** است اگر توانش صفر یا به صورت 2^m باشد. به سادگی با استفاده از رابطه آدِم[1] می‌توان نتیجه گرفت که t_i در p دوتایی باشد در $Sq^i p$ نیز دوتایی است.

رابطه ترتیب توم: مقصود ما از فاکتور غیردوتایی $t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r}$ تک‌جمله‌ای شامل متغیرهای غیردوتایی است. تعداد متغیرهای غیردوتایی را با u نمایش می‌دهیم و مجموع درجه آنها را با v، رابطه ترتیب (Q) را روی تک‌جمله‌ای به این ترتیب می‌گذاریم که می‌گوییم تک‌جمله‌ای X از تک‌جمله‌ای Y بزرگ‌تر است نسبت به (Q) اگر $u(Y) > u(X)$ و یا $u(X) = u(Y)$ و $v(X) < v(Y)$.

برای هر $k \geq h$ کلاس زیر

$$X_w^h = \sum (t_1)^{a_1+1} \dots (t_r)^{a_r+1} t_{r+1} \dots t_k \tag{I}$$

که $w = \{a_1, \dots, a_k\}$ افراز دلخواهی از h با جمعوندهای غیردوتایی است. تعداد این افرازها را با $d(h)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر بعد $k \geq m$، کلاس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$X_{w_m}^m, Sq^1 X_{w_{m-1}}^{m-1}, Sq^2 X_{w_{m-2}}^{m-2}, \dots, Sq^{I_h} w_{w_n}^h, \dots, Sq^I w_k$$

که Sq^{I_h} جمله قابل قبول با درجه $(m-h)$ و w_h افراز غیردوتایی از h است. ثابت می‌کنیم این جملات مستقل خطی هستند.

اگر یک تک‌جمله‌ای از I را درنظر بگیریم و Sq^I را روی اثر دهیم جملاتی شبیه جملات زیر به دست می‌آوریم:

$$\sum_{S_w} (t_1)^{a_1+1} \dots (t_r)^{a_r+1} Sq^I (t_{r+1} \dots t_k) \tag{II}$$

که جمع روی تمام جایگشت‌های S_w که برای متقارن شدن عبارت بالا برای افراز w لازم است، تغییر می‌کند. اندیس u

$$Sq^I((t_1)^{a_1+1}(t_2)^{a_2+1} \dots (t_r)^{a_r+1} t_{r+1} \dots t_k)$$

1) Adem

کمتر یا مساوی r است، چون می‌دانیم متغیرهای $(t_{r+1}, \ldots, t_k)$ دوتایی هستند. برای $k = r$ دو حالت وجود دارد.

حالت اول:

$$((t_1)^{a_1+1}(t_2)^{a_2+1} \ldots (t_r)^{a_r+1})Sq^I(t_{r+1} \ldots t_k) \tag{III}$$

حالت دوم:

$$Sq^{I'}(t_1)^{a_1+1}(t_2)^{a_2+1} \ldots (t_r)^{a_r+1}.Sq^{I''}(t_{r+1} \ldots t_k)$$

در حالت اول $v = u + h$ و در حالت دوم v اکیداً از $r + h$ بزرگتر است. در نتیجه جملات III با رابطه ترتیب (Q) بزرگتر از جملات چندجمله‌ای $Sq^I X_w^h$ هستند. همچنین هیچ کدام از جملات III صفر نمی‌شود. هر جایگشتی که برای متغیرهای t_i در I لازم است برای متقارن کردن فاکتور غیردوتایی $(t_1)^{a_1+1} \ldots (t_r)^{a_r+1}$ نیز لازم است. در نتیجه‌اگر III را روی همه جایگشت‌های S_w تغییر دهیم فاکتور غیردوتایی تولید نمی‌شود، در نتیجه جمع آنها ناصفر است. چون هیچ جمله‌ای برحسب کوچکترهایش (نسبت به رابطه (Q)) قابل نمایش نیست، پس اگر جملات مذکور بخواهند وابسته خطی باشند، وابستگی خطی بین جملاتی که شامل $Sq^I X_w^h$، که جملات پیشرو آنها اندیس $u = r$ دارند و اندیس $v = r + h$، و درجه‌شان h است برقرار است. پس وابستگی خطی از نوع $\sum_\lambda c_\lambda Sq^{I_\lambda} X_w^h = 0$ که شامل کلاس X_w^h است.

اگر ضریب پیشرو این رابطه وابستگی خطی را برحسب ترتیب (Q) بنویسیم، داریم:

$$\sum c_\lambda (t_1)^{a_1+1}(t_2)^{a_2+1} \ldots (t_r)^{a_r+1} Sq^{I_\lambda}(t_{r+1} \ldots t_k) = 0$$

همه آنهایی که شامل $(t_1)^{a_1+1} \ldots (t_r)^{a_r+1}$ هستند، باید جمعشان صفر شود.

$$(t_1)^{a_1+1}(t_2)^{a_2+1} \ldots (t_r)^{a_r+1} \sum_\lambda c_\lambda Sq^{I_\lambda}(t_{r+1} \ldots t_k) = 0$$

اما با توجه به لم قبل از قضیه می‌بایست همه $Sq^I(t_{r+1} \ldots t_k) = 0$ برای همه I هایی که مجموع درجه‌شان یعنی $m - h$ از $k - r$ فراتر نمی‌رود، که برای $h \geq 2r$ و $m \leq k$ این اتفاق می‌افتد. پس ضرایب c_λ صفر هستند. و در نتیجه همه جملات مذکور مستقل خطی هستند.

رتبه $H^{k+m}(MO(k))$، یعنی رتبه ایده‌آل تولید شده توسط w_k، برابر تعداد افرازهای m به جمعوندها است. از طرفی تعداد جملات مستقل خطی که ما پیدا کردیم برابر است با $\sum_{h\leq m} c(m-h)d(h)$ به سادگی می‌توان دید:

$$p(m) = \sum_{h\leq m} c(m-h)d(h)$$

روشن است که به هر افراز m دو افراز: افراز $m-h$ به جمعوندهای به صورت $2^m - 1$ و افراز h از جمعوندهای باقی مانده را می‌توان نسبت داد. پس

$$X^m_{w_m}, Sq^1 X^1_{w_{m-1}}, \ldots, Sq^{I_h} X^h_{w_h}, \ldots, Sq^I w_k \tag{IV}$$

پایه‌ای برای $H^{k+m}(MO(k))$ تشکیل می‌دهند.

به هر کلاس X^h_w نگاشت

$$F_w : MO(k) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, k+h)$$

به طوری که $F^*_w(i) = X^h_w$ را نسبت می‌دهیم. مجموعه F_w نگاشت F را از $MO(k)$ به ضرب،

$$Y = K(\mathbb{Z}_2, k) \times K(\mathbb{Z}_2, k+2) \times K(\mathbb{Z}_2, k+h)^{d(h)} \times \ldots \times K(\mathbb{Z}_2, 2k)^{d(k)}$$

تعریف می‌شود.

چون IV پایه‌ای برای گروه پادهمانستگی $H^{k+h}(MO(k))$ تشکیل می‌دهد، پس نگاشت القایی F^* یکریختی است بین $H^{k+m}(Y, \mathbb{Z}_2)$ به $H^{k+m}(MO(k))$ برای $m \leq k$. می‌دانیم گروه پادهمانستگی Y ۲ـ گروه است در نتیجه گروه پادهمانستگی با ضرایب $\mathbb{Z}_p$ بدیهی است و همچنین گروه پادهمانستگی $MO(k)$ برای ابعاد کمتر از $2k$ بدیهی است. پس F^* در ابعاد کمتر از $2k$ یکریختی و در بعد $2k$ یک به یک است. در نتیجه بنابه قضیه وایتهد[1] در نظریه هموتوپی وجود دارد نگاشت g از سلول $2k$ـ بعدی Y به سلول‌بندی $MO(k)$ که $g \circ F$ با همانی $(2k-1)$ـ سلول $MO(k)$ هموتوپ است.

خلاصه حرف بالا را در چند قضیه خلاصه می‌کنیم.

1) Whitehead

۲-۱-۶ قضیه: فضای $MO(k)$، $2k$ـ نوع هموتوپی یکسانی با فضای Y که ضرب فضای آیلنبرگ ـ مک‌لین است دارد.

۲-۱-۷ نتیجه: گروه هموتوپی پایدار $\pi_{k+h}(MO(k))$ وقتی $h < k$ یکریخت با جمع مستقیم $d(h)$ گروه $\mathbb{Z}_2$ است.

فرض کنید نگاشت g که وارون هموتوپی F روی $2k$ـ سلول $MO(k)$ است را به $K(\mathbb{Z}_2, k)$ تحدید کرده‌ایم.

۲-۱-۸ نتیجه: وجود دارد نگاشت g از اسکلت $2k$ـ بعدی سلول‌بندی $K(\mathbb{Z}_2, k)$ به سلول‌بندی فضای توم $MO(k)$ به طوری که $g^*(U) = i$ (که U کلاس توم و i کلاس بنیادی فضای آیلنبرگ ـ مک لین است.)

چون برای هر کلاس $u \in H^k(A, \mathbb{Z}_2)$ برای هر فضای A، می‌دانیم نگاشت $f : A \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, k)$ وجود دارد که $u = f^*(i)$. پس در نتیجه

۲-۱-۹ نتیجه: هر کلاس پاد همانستگی k بعدی به پیمانه ۲ از هر فضای با بعد کمتر مساوی $2k$، $O(k)$ـ نمایش‌پذیر است.

۲-۲ بررسی $MO(k)$ برای kهای کوچک

در فصل پیش دیدیم که $MO(1)$ چون $\mathbb{R}P^\infty$ یا $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ بود. گروه پادهمانستگی فضای $MO(2)$ را محاسبه می‌کنیم.

در بعد ۲: کلاس به پیمانه ۲ وجود دارد که همان کلاس بنیادی است و با U نشان می‌دهیم.[1]

در بعد ۳: کلاس صحیح $Sq^1 U = Uw_1$ مولد در بعد ۳ است.

در بعد ۴: کلاس صحیح X و کلاس به پیمانه Uw_1^2 مولد هستند. کلاس X به پیمانه ۲ همان U^2 است.

۱) توجه کنید $H^*(MO(2), \mathbb{Z}_2)$ ایده‌آل تولید شده توسط w_2 در $H^*(G_2, \mathbb{Z}_2)$ است. $U = w_2$ در این صورت $H^2 = (U)$ و $H^3 = (Uw_1)$ و $H^4 = (U^2, Uw_1^2)$ و $H^5 = (Uw_1^3, U^2 w_1)$. با استفاده از قضیه سِر می‌دانیم $H^3(k(\mathbb{Z}_2, 2), \mathbb{Z}_2) = Sq^1(i)$ و $F^*(i) = U$ و $Sq^1 U = Uw_1$ و $Sq^1(Uw_1^2) = Uw_1^3$.

در بعد ۵: کلاس صحیح با مرتبه ۲

$$Sq^1(Uw_1^2) = Uw_1^3$$

داریم، کلاس به پیمانه ۲، $U^2 w_1$.

پس نگاشت طبیعی $F : MO(2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$ در گروه پادهمانستگی با ضرایب این طور القا می‌شود:

$$F^*(i) = U; \quad F^*(Sq^1 i) = Uw_1; \quad F^*(Sq^2 i) = U^2$$

$$F^*(Sq^2 Sq^1 i) = Sq^2(Uw_1) = U^2 w_1 + Uw_1^3; \quad F^*(i.Sq^1 i) = U^2 w_1$$

استوانه‌ای که توسط نگاشت F ساخته می‌شود را در نظر بگیرید، آن را با K نمایش می‌دهیم. برای راحتی $MO(2)$ را هم با M نمایش می‌دهیم M را می‌توان به عنوان زیرفضای K نگاه کرد و F را به عنوان نگاشت مشمول M در k. پس

$$H^r(K, M, \mathbb{Z}_p) = 0 \quad \text{برای} \quad r > 5$$

$$H^5(K, M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \quad \text{برای هر} \quad p$$

در نتیجه، دوگانی پوانکاره داریم:

$$H^r(K, M, \mathbb{Z}_p) = 0 \quad \text{برای} \quad r < 5$$

$$H^5(K, M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \quad \text{برای هر} \quad p$$

در نتیجه با استفاده از ضرایب جهانی[1] و حالت نسبی قضیه هورویچ داریم:

$$\pi_4(K, M) = 0 \qquad \pi_5(K, M) = \mathbb{Z}$$

و در نتیجه $\pi_3(M) = 0$ و $\pi_4(M) = \mathbb{Z}$.

نگاشت g که وارون هموتوپی F است، روی اسکلت ۴ بعدی سلول‌بندی K تعریف می‌شود. اگر بخواهیم g را به اسکلت ۵ بعدی گسترش دهیم، مانعی[2] در گروه $\pi_4(M) = \mathbb{Z}$. با توجه به نظریه مانع، این کلاس به گروه $H^5(k(\mathbb{Z}_2, 2), \mathbb{Z}_1)$ تعلق دارد و همان **ناوردای آیلنبرگ ـ مک‌لین**[3] که مربوط به دومین گروه هموتوپی

1) Universal Coefficient Theorem 2) Obstruction 3) Eilenberg-MacLane invariant

نابدیهی M است. این کلاس پوچی نگاشت

$$F^*: H^5(K(\mathbb{Z}_2, 2), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^5(M, \mathbb{Z})$$

را تولید می‌کند. گروه $H^5(\mathbb{Z}_2, 2, \mathbb{Z})$ دوری مرتبه ۴ است که با $\frac{1}{4}\delta p(i)$، $p(i)$ مربع پنتریاگین[1] و δ نگاشت باکشستاین[2] است، تولید می‌شود. $H^5(M, \mathbb{Z})$ گروه دوری مرتبه ۲ است که کلاس صحیح $Sq^1(Uw_1^2)$ تولید می‌شود. اگر این کلاس به پیمانه ۲ تحدید کنید همان Uw_1^2 است. به پیمانه ۲ نشان می‌دهیم که F^* مولد گروه اول را به مولد گروه دوم می‌برد و در هر پیمانه حکم درست است. فرض کنید u پاددوری باشد که نماینده کلاس i، $v = \frac{1}{2}\delta p(u)$ پاد درو نماینده $Sq^1 i$ باشد. (مربع پنتریاگین $\delta u \smile_1 u + u \smile u = (p(u)$ در نتیجه

$$\delta p(u) = \delta u \smile u + u \smile \delta u + \delta u \smile_1 \delta u + u \smile \delta u - \delta u \smile u$$

بر ۴ تقسیم و به پیمانه ۲ تحدید می‌کنیم.

$$\frac{1}{4}\delta p(u) = u \smile \nu + \nu \smile_1 \nu = i.Sq'i + Sq^2 Sq'\nu$$

در نتیجه همریختی F^* این کلاس را به

$$U^2 w_1 + U^2 w_1 + U w_1^3 = U w_1^3.$$

یعنی مولد گروه $H^5(M, \mathbb{Z})$ به پیمانه ۲، می‌برد. چون مولد $H^5(M, \mathbb{Z})$ مرتبه ۲ است در نتیجه F^*، $\frac{1}{2}\delta p(i)$ را به صفر می‌برد. این کلاس همان کلاس منع است که پی آن می‌گشتیم. (توجه کنید چون این کلاس مرتبه ۲ است اگر به $\mathbb{Z}_2$ تحدید کنیم صفر می‌شود و در نتیجه نمی‌توان آن را به صورت Sq^i نشان داد.)

نهایتاً نتایج به دست آمده در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

۲-۲-۱ قضیه: برای آن که کلاس $x \in H^2(A, \mathbb{Z}_2)$ از فضای ۵ـبعدی A، $O(n)$ ـ نمایش‌پذیر باشد، شرط لازم و کافی آن است که $\frac{1}{2}\delta p(x)$ برابر صفر شود. ($p(x)$ مربع پنتریاگین است.)

1) Pontrjagin 2) Bockstein homomorphism

حال برای $k=۳$ یعنی ساختار فضای توم $MO(۳)$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به حکمی که در مورد ساختار $MO(k)$ ثابت کردیم، برای $k=۳$ می‌توان با محاسبات نشان داد که نه تنها $MO(۳)$ با فضای Y که ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین بود تا بعد ۶ بلکه در ۷ نیز F^* یکریختی است. ولی در بعد ۸، F^* دارای پوچی است.

در بعد ۳: $$F^*(i)=U$$

در بعد ۴: $$F^*(Sq^۱i)=Uw_۱$$

در بعد ۵: $$F^*(Sq^۲i)=Uw_۲$$

(مولد جدید) $$F^*(X^۲)=Uw_۱^۲$$

در بعد ۶: $$F^*(Sq^۳i)=U^۲;F^*(Sq^۲Sq^۱i)=U(w_۲w_۱+w_۱^۳)$$

$$F^*(Sq^۱X^۲)=Uw_۱^۳$$

در بعد ۷: $$F^*(i,Sq^۱i)=U^۲w_۱$$

$$F^*(Sq^۲X^۲)=U(w_۲(w_۱)^۲+(w_۱)^۴)$$

در بعد ۷، دو مولد جدید نیز داریم که $F^*(X^۴)=U(w_۱)^۴$ و $F^*(X^{۲۲})=Uw_۲^۲$. اما F^* در بعد ۸ یکریختی نیست. چون $F^*(Sq^۳X^۲+(Sq^۱i)^۲+Sq^۱X^۴)=۰$. پس نتیجه حرف‌های بالا قضیه زیر است.

۲-۲-۲ قضیه: هر کلاس سه بعدی با ضریب $\mathbb{Z}_۲$ از فضای با بعد کمتر از ۸، $O(n)$ـ نمایش‌پذیر است.

این بخش را با این نکته به پایان می‌رسانیم: برای $k>۱$ نگاشت g

$$g:K(\mathbb{Z}_۲,k)\longrightarrow MO(k)$$

وارون هموتوپی F باشد، وجود ندارد. چون همان طور که قضیه سر در مورد گروه پادهمانستگی $K(\mathbb{Z}_۲,k)$ عنوان می‌کند جبر چندجمله‌ای است با **نامتناهی** متغیر در صورتی که جبر پادهمانستگی خمینه گراسمان، G_k، جبر چندجمله‌ای با متناهی متغیر است در نتیجه برای ابعاد بالا رتبه جبر $H^*(\mathbb{Z}_۲,k)$ از رتبه جبر $H^*(MO(k))$ اکیداً بیشتر است، پس F^* پوچی نابدیهی دارد که این نتیجه می‌دهد که نگاشت g که وارون هموتوپی باشد، وجود ندارد.

۲-۲-۳ نتیجه: برای هر $k > ۱$، فضایی با بعد بقدر کافی بزرگ (بزرگتر از $۲k$) و کلاس پادهمانستگی k بعدی با ضریب در $\mathbb{Z}_۲$ وجود دارد که $O(n)$ـ نمایش‌پذیر نیست.

۲-۳ بررسی ساختار $MSO(k)$

با ساختار هموتوپی فضای توم $MO(k)$ تا حدودی پیدا کردیم اما $MSO(k)$ فضای پیچیده‌تری است. $MO(k)$ را با فضایی تا بعدی مشخص هم‌ارز هموتوپی کردیم که ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین بود. اما در مورد $MSO(k)$ نمی‌توان این کار را انجام داد. دلیل پیچیدگی $MSO(k)$ آن است کلاف‌های تاری تودرتو از فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین است. در این بخش سعی می‌کنیم $MSO(k)$ را با یک CWـ مجتمع تا بعد $k + i$ برای $i \geq v$ هم‌ارز هموتوپی کنیم.

تعریف چندوجهی زیلبر[1] K: کلاف تاری مسیری[2] با تار $K(\mathbb{Z}, k + ۴)$ و با پایه $K(\mathbb{Z}, k + ۵)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید u کلاس پایه‌ای $K(\mathbb{Z}, k + ۵)$ باشد. نگاشت f از $K(\mathbb{Z}, k)$ به $K(\mathbb{Z}, k + ۵)$ وجود دارد به طوری که $f^*(u) = St_۳^۵(v)$ (منظور از $St_۳^۵$ همان $\beta P^۱$ است که P^k عملگر استینراد به پیمانه ۳ که درجه را به اندازه $۲k(۳ - ۱)$ افزایش می‌دهد و β عملگر باکشتین است. برای راحتی $\beta P^۱$ عملگری است که درجه را ۵ افزایش می‌دهد با $St_۳^۵$ نمایش می‌دهیم.) توجه کنید که عملگرهای استینراد که عملگر باکشتین در اول آنها است، را می‌توان به عنوان عملگرهای صحیح درنظر گرفت به جای به پیمانه عدد اول. فرض کنید K فضای تاری باشد که از f روی $K(\mathbb{Z}, k)$ القا می‌شود. ناوردای آیلنبرگ ـ مک‌لین K در $H^{k+۵}(K(\mathbb{Z}, k), \mathbb{Z})$ است که مشخصاً کلاس $St_۳^۵(v)$ خواهد بود. شرط لازم و کافی برای گسترش نگاشتی مثل $F : M \longrightarrow K$ از سلول $k + ۴$ بعدی به کل M، آن است که $St_۳^۵(x)$، x تصویر کلاس i تحت F^* است، بدیهی باشد.

---
1) Silber polyhedron 2) path fibration

پاد همانستگی K

پاد همانستگی به پیمانه ۲: فرض کنید $F^{۳}$ نگاشتی از $K(\mathbb{Z},k)$ به خودش است که $(F^{۳})^{*}(i) = ۳i$. فضای تاری عقب کشیده شده K، توسط $F^{۳}$، $K(\mathbb{Z},k) \times K(\mathbb{Z},k+۴)$ می‌شود. چون ناوردای آیلنبرگ ـ مک‌لین این فضا برابر صفر خواهد شد.

$$(F^{۳})^{*}(St_{۲}^{۵}(i)) = St_{۲}^{۵}(F^{۳}(i)) = St_{۲}^{۵}(۳i) = ۰$$

در نتیجه G از کلاس روی $K(\mathbb{Z},k+۴)$، فضای $K(\mathbb{Z},k) \times K(\mathbb{Z},k+۴)$ را به K می‌برد. نگاشت G^{*} همریختی بین دنباله طیفی[1] فضای تاری K و دنباله طیفی فضای تاری بدیهی $K(\mathbb{Z},k) \times K(\mathbb{Z},k+۵)$ می‌دهد که بین مؤلفه‌های $E_{**}^{۲}$ آنها یکریختی است. علاوه بر این $(F^{۳})^{*}$ خودریختی از جبر $H^{*}(K(\mathbb{Z},k),\mathbb{Z}_{۲})$ است. پس در نتیجه مشتق لِری[2] $d_{۲}$ روی مؤلفه $E_{**}^{۲}$ بدیهی است. به همین ترتیب چون دنباله طیفی فضای ضرب بعد از $E_{**}^{۲}$ نیز بدیهی است در نتیجه بقیه مشتق‌ها نیز بدیهی هستند. پس در نتیجه $H^{*}(K,\mathbb{Z}_{۲})$ یکریخت با جبر پادهمانستگی $K(\mathbb{Z},k) \times K(\mathbb{Z},k+۴)$ است.

پاد همانستگی به پیمانه p برای $p \leq ۵$: استدلال مانند بالا برای p اول بزرگتر از ۵ نیز صادق است پس در نتیجه به پیمانه p نیز جبر $H^{*}(K,\mathbb{Z}_{p})$ یکریخت است با جبر پادهمانستگی $K(\mathbb{Z},k) \times K(\mathbb{Z},k+۵)$ به پیمانه p.

پاد همانستگی به پیمانه ۳: فرض کنید ν کلاس پایه‌ای $K(\mathbb{Z},k+۴)$ باشد از نگاشت سرپیچی[3] روی ν، $St_{۲}^{۵}(i)$ می‌شود. پس کلاس $St_{۲}^{۴}\nu$ توسط نگاشت سرپیچی به $St_{۲}^{۵}(\nu), St_{۲}^{۹}(i) = St_{۲}^{۴}St_{۲}^{۵}(i)$ به کلاس $St_{۲}^{۵}St_{۲}^{۵}(i) = ۰$ می‌رود. در نتیجه جبر پادهمانستگی $H^{*}(K,\mathbb{Z}_{p})$ توسط مولدهای زیر تولید می‌شود:

در بعد kـ مولد کلاس بنیادی i است.

در بعد $k+۴$ـ مولد کلاس بنیادی $St_{۲}^{۴}(i)$ است.

در بعد $k+۸$ـ کلاس $St_{۲}^{۸}(i)$ است.

در بعد $k+۹$ـ کلاس $St_{۲}^{۵}(\nu)$ است.

1) Spectral sequence 2) Leray differential 3) Transgression

فضای هم‌ارز با $MSO(k)$: فضای Y را تعریف می‌کنیم ضرب فضای K در فضای آیلنبرگ ـ مک لین $K(\mathbb{Z}_۲, k+۵)$ باشد. نگاشت $F : MSO(k) \longrightarrow Y$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نگاشت f از سلول $k+۴$ بعدی $MSO(k)$ به K وجود دارد به طوری که $f^*(i) = U$. چون $St^۵_۳ U = ۰$ (چون پادهمانستگی $MSO(k)$ در پادهمانستگی $\hat{G}_k$ می‌نشیند که می‌دانیم تاب مرتبه ۳ ندارد.) پس f را می‌توان به نگاشتی

$$f : MSO(k) \longrightarrow K$$

وجود دارد. از طرف دیگر نگاشت $g : MSO(k) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_۲, k+۵)$ وجود دارد به طوری که $g^*(i') = UW_۲W_۳$ که i' کلاس پایه‌ای $K(\mathbb{Z}_۲, k+۵)$ است. g, f نگاشت $F : MSO(k) \longrightarrow Y$ را تعریف می‌کنند.

محاسبه به پیمانه ۲: بعد $k+j$ که $j \leq ۸$ را در نظر بگیرید. فرض کنید v تصویر مولد جبر پادهمانستگی $K(\mathbb{Z}, k+۴)$ در $H^*(K, \mathbb{Z}_۲) \approx H^*(\mathbb{Z}, K, \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{Z}, k+۴, \mathbb{Z}_۲)$ باشد. داریم:

$$
\begin{aligned}
j = 0; \quad & F^*(i) = U \\
j = 1; \quad & F^*(0) = 0 \\
j = 2; \quad & F^*(Sq^2 i) = U w_2 \\
j = 3; \quad & F^*(Sq^3 i) = U w_3 \\
j = 4; \quad & F^*(Sq^4 i) = U w_4 \\
& F^*(U) = U (w_2)^2 \\
j = 0; \quad & F^*(Sq^5 i) = U w_5 \\
& F^*(i') = U w_2 w_3 \\
j = 6; \quad & F^*(Sq^6 i) = U w_6 \\
& F^*(Sq^4 Sq^2 i) = U (w_2 w_4 + w_3^2 + w_2^3) \\
& F^*(Sq^2 v) = U (w_2^3 + w_3^2) \\
& F^*(Sq^1 i') = U w_3^2 \\
j = 7; \quad & F^*(Sq^7 i) = U w_7 \\
& F^*(Sq^5 Sq^2 i) = U (w_5 w_2 + w_4 w_3 + w_3 (w_2)^2) \\
& F^*(Sq^3 v) = U w_3 (w_2)^2 \\
& F^*(Sq^2 i') = U w_2 (w_5 + w_3 w_2) \\
j = 8; \quad & F^*(Sq^8 i) = U w_8 \\
& F^*(Sq^6 Sq^2 i) = U (w_6 w_2 + w_5 w_3 + w_4 (w_2)^2) \\
& F^*(Sq^4 v) = U (w_4 (w_2)^2 + w_2 (w_3)^2 + w_2^4) \\
& F^*(Sq^3 i') = U w_5 w_3 \\
& F^*(Sq^2 Sq^1 i') = U w_2 (w_3)^2
\end{aligned}
$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که برای $j \leq 8$ اعضای جبر $H^*(MSO(k), \mathbb{Z}_2)$ که در بالا آمده مستقل خطی‌اند و برای $j \leq 7$ یک پایه برای $H^{k+j}(MSO(k), \mathbb{Z})$ تشکیل می‌دهند. پس F^* برای $j \leq 7$ یکریختی برای $j = 8$ یک به یک است.

محاسبه به پیمانه ۳: فاکتور $K(\mathbb{Z}_۲, k+۵)$ در Y به این پیمانه دو پاد همانستگی حذف می‌شود.

$$j = ۰; \quad F^*(i) = U$$

$$j = ۴; \quad F^*(St_۳^۴ i) = Up_۴$$

$$j = ۸; \quad F^*(St_۳^۸ i) = U((p_۴)^۲ + ۲p_۸)$$

محاسبه به پیمانه ۵:

$$j = ۰; \quad F^*(i) = U,\ F^*(v) = Up_۴,\ F^*(St_۵^۸ i) = U(p_۴^۲ - ۲p_۸).$$

محاسبه به پیمانه p برای $p > ۵$:

$$j = ۰; \quad F^*(i) = U$$

$$j = ۴; \quad F^*(v) = Up_۴$$

$$j = ۸; \quad F^*(۰) = ۰$$

در نتیجه با ضرایب در $\mathbb{Z}_p$ برای $p \leq ۳$ نیز در $j \geq ۷$ یکریختی بین $H^{k+j}(Y)$ و $H^{k+j}(MSO(k))$ وجود دارد چون $MSO(k)$ و Y فضای همبند ساده هستند با توجه به قضیه هورویچ می‌دانیم این دو فضا تا سلول‌های $k+۷$ بعدیشان هم‌ارز هستند. نتایج بالا را در دو قضیه خلاصه می‌کنیم.

۲-۳-۱ قضیه: برای $j \geq ۷$ گروه هموتوپی $\pi_{k+j}(MSO(k))$ به صورت زیر است:

$$\pi_{k+۱} = \pi_{k+۲} = \pi_{k+۳} = ۰$$

$$\pi_{k+۴} = \mathbb{Z}, \quad \pi_{k+۵} = \mathbb{Z}_۲ \quad \pi_{k+۶} = \pi_{k+۷} = ۰$$

۲-۳-۲ قضیه: برای $k > ۸$ کلاس پادهمانستگی صحیح، x، از فضای $k+۸$ـ بعدی به پیمانه گروه تاب نمایش‌پذیر است اگر و تنها اگر $St_۳^۵ x = ۰$.

۲-۴ کلاس پادهمانستگی ۷ـ بعدی غیرنمایش‌پذیر

فرض کنید K چندوجهی متناهی که در $\mathbb{R}^n$ نشسته است. U را بازی حول K در نظر بگیرید که به K توکش می‌شود، در این صورت با استفاده از دوگانی پوانکاره، وجود دارد یکریختی $\mathcal{X}$ بین $H_r(K)$ و $H^{n-r}(U)$. برای هر i زوج، همریختی $\mathcal{V}_i^p : H_r(K, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_{r-i}(K, \mathbb{Z})$ را به صورت

$$\mathcal{V}_i^p = \mathcal{X}^{-1} St_p^i \mathcal{X}$$

تعریف می‌شود که St_p^i همان خلاصه نویسی است از عملگر استینراد که در بخش پیش انجام دادیم.

$\mathcal{V}_i^p$ نسبت داده شده به St_p^i برای i فرد به صورت

$$\mathcal{V}_{2r+1}^p = \mathcal{V}_1^p \circ \mathcal{V}_{2r}^p$$

تعریف می‌شود که $\mathcal{V}_1^p$ همریختی باکشتاین است، $(\frac{1}{p}\delta)$.

$\mathcal{V}_i^p$ دارای خواصی است که برای اثبات آنها به کتاب عملگرهای پادهمانستگی نوشته استینراد می‌توانید مراجعه کنید.

۱) $\mathcal{V}_i^p$ ناوردای توپولوژیک است، یعنی به نشاندن K در $\mathbb{R}^n$ مربوط نیست.

۲) $\mathcal{V}_i^p$ با همریختی f^* که توسط $f : K \longrightarrow K'$ القاء می‌شود، جابه‌جا می‌شود.

۳) روی میدان $\mathbb{Z}_p$ می‌توانیم عملگر $\mathcal{V}_i^p$ نسبت به St_p^i نمایش داد. مشخصاً فرض کنید $Q_p^i : H^{r-i}(K, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^r(K, \mathbb{Z}_p)$ همریختی دوگان $\mathcal{V}_i^p$ باشد. همریختی Q_p^i با اندیس i فرد در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\sum_i Q_p^{m-i} St_p^i = 0 \qquad m, i \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه}\ 2(p-1)) \ Q_p^* = 1$$

همریختی Q_p^i برای iهای فرد از روی Q_p^i، با i زوج این طور تعریف می‌شود:

$$Q_p^{2r+1} = Q_p^{2r} \circ Q_p^1$$

که Q_p^1 همریختی باکشتاین است.

به عنوان مثال برای چند i کوچک داریم:

$$Q_3^4 = -St_3^4 \quad Q_3^5 = -St_3^4 \circ Q_3^1 = St_3^1 St_3^1$$

اگر کلاس پادهمانستگی v نمایش‌پذیر باشد می‌بایست $St_p^{2i(p-1)+1}(v)$ صفر شود، چون گروه پادهمانستگی $\hat{G}_k$، pـ تاب ندارد، در نتیجه به طور مشابه می‌توان گفت اگر کلاس هموتوپی z تصویر کلاس اساسی خمینه فشرده و مشتق‌پذیر دیگری باشد می‌بایست $St_p^{2i(p-1)}(\mathcal{X}(v))$ و در نتیجه $\mathcal{V}_i^p(v)$ برای p فرد صفر شود.

۲-۴-۱ لم: برای $r \geq 2$، کلاس پادهمانستگی $St_3^5 St_3^1(i)$ از $K(\mathbb{Z}_3, r)$ ناصفر است.

اثبات: در ابتدا توجه کنید که اگر $St_3^5 St_3^1(i)$ در $K(\mathbb{Z}_3, n)$ ناصفر باشد در $K(\mathbb{Z}_3, m)$ برای $m > n$ نیز ناصفر خواهد بود. چون قطع نظر از علامت عملگر استینراد با سوسپانسیون جابه‌جا می‌شود. در نتیجه کافی است ثابت کنیم $St_3^5 St_3^1(i)$ در $K(\mathbb{Z}_3, 2)$ ناصفر است. این حقیقت درست است! ولی اثبات مستقیم آن کار ساده‌ای نیست. مجبوریم به جای $K(\mathbb{Z}_3, 2)$ ضرب دو یکی از $K(\mathbb{Z}_3, 1)$ را جایگزین کنیم. توجه کنیم اگر f نگاشت پیوسته $f : K(\mathbb{Z}_3, 1) \times K(\mathbb{Z}_3, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_3, 2)$ که $f^*(i) = v_1 v_2$ باشد، در این صورت $f^* St_3^5 St_3^1(i) = St_3^5 St_3^1(v_1 v_2) \neq 0$ پس $St_3^5 St_3^1(i) \neq 0$. (ν_2, ν_1 کلاس‌های بنیادی دو کپی از فضاهای $K(\mathbb{Z}_3, 1)$ هستند.) $u_1 = St_3^1 \nu_1$ و $u_2 = St_3^1 \nu_2$ مولدهای گروه پادهمانستگی در بعد ۲ هستند.

$$St_3^5 St_3^1(\nu_1.\nu_2) = St_3^1 St_3^4(u_1.\nu_2 - \nu_1 u_2)$$
$$= St_3^1((u_1)^3.v_2 - (u_2)^3.v_1) = (u_1)^3 u_2 - u_1.(u_2)^3 \neq 0$$

در نتیجه لم ثابت شد.■

چون کلاس پادهمانستگی صحیح

$$St_3^5 St_3^1(i) \in H^{r+6}(\mathbb{Z}_3, 3; \mathbb{Z}) \qquad r \geq 2$$

ناصفر است. در نتیجه با استفاده از دوگان گرفتن کلاس $z \in H_{r+5}(\mathbb{Z}_3, r, \mathbb{Z})$ وجود دارد که ضرب اسکالر آن در کلاس $St_3^4 St_3^1(i)$ ناصفر است؛ یعنی $< Z, Q_3^5(i) \neq 0$. پس $< \mathcal{V}_5^3(z), i > \neq 0$ در نتیجه $\mathcal{V}_5^3(z) \neq 0$ حرف‌های بالا را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

۲-۴-۲ قضیه: در هر بعد $r \leq ۷$ در چند وجهی دلخواه، کلاس پادهمانستگی وجود دارد که آن را نمی‌توان به عنوان تصویر پیوسته کلاس پایه‌ای خمینه فشرده و هموار دیگری نوشت.

۵-۲ $\mathfrak{N}^*$، کلاس کبردیسم به پیمانهٔ ۲

همان طور که از بخش‌های قبل می‌دانیم برای ابعاد کمتر از $۲n$، $MO(n)$ با ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین:

$$Y = K(\mathbb{Z}_۲, n) \times K(\mathbb{Z}_۲, n+۲) \times \ldots \times (K(\mathbb{Z}_۲, n+h))^{d(n)} \times \ldots, \qquad h \leq n$$

است که در بالا $d(n)$ تعداد افرازها غیردوتایی h، یعنی هیچ جمعوندی به صورت $۲^m - ۱$ نباشد، است. در نتیجه ما در بخش‌های گذشته ثابت کردیم:

۱-۵-۲ قضیه: برای هر بعد k، $\mathfrak{N}^k$ جمع مستقیم $d(k)$ گروه یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ است.

فرض کنید (w) افراز غیردوتایی از k باشد، نگاشت

$$F_w : MO(n) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_۲, k+n)$$

را در نظر بگیرید که $F_w^*(i) = X_u$ باشد. X_w کلاس پادهمانستگی در $H^{k+h}(MO(n))$ است که تناظر با تابع متقارن

$$\sum (t_۱)^{a_۱+۱} \ldots (t_r)^{a_r+۱} t_{r+۱} \ldots t_n$$

که (a_i) افراز غیر دوتایی از عدد k است. فرض کنید

$$Y_w = \sum (t_۱)^{a_۱} \ldots (t_r)^{a_r}$$

عضو پاد همانستگی متناظر با یکریختی توم در $H^k(G_k, \mathbb{Z}_۲)$ باشد. پس $X_w = \varphi_G^*(Y_w)$. (φ_G یکریختی توم است.)

قرار دهید $f_{w_۱}$ نگاشتی از S^{n+k} به $MO(n)$ باشد که

$$f_{w_۱}^* F_w^*(i) = \delta_w^{w_۱}(s) \tag{I}$$

در بالا s کلاس بنیادی گروه $H^{k+n}(s^{k+n}, \mathbb{Z}_۲)$ و $\delta_w^{w_۱}$ دلتای کرونکر است. روشن است که کلاس هموتوپی $f^{w'}$ یک پایه برای $\pi_{k+n}(MO(n))$ تشکیل می‌دهند. همانند استدلال‌های فصل ۱ می‌توان فرض کرد که $f_{w^۱}$ بر G_n که زیرمجموعه $MO(n)$ است، متقاطع است. فرض کنید $V_{w^۱}$ تصویر وارون G_n تحت $f_{w^۱}$ باشد. همسایگی لوله N حول $V_{w^۱}$ در S^{n+k} را درنظر بگیرید. نگاشت $\varphi^* : H^{-k}(V_{w^۱}) \longrightarrow H^r(N)$ نگاشت توم این کلاف عمودی است. تصویر Y_w درگروه پادهمانستگی $V_{w^۱}$ تحت نگاشت $f^*_{w^۱}$ را با $Y^۱_w$ نمایش می‌دهیم. کلاس $Y^۱_w$ را می‌توان با استفاده ازکلاس‌های مشخصه اشتیفل ـ ویتنی $\bar{w}_i$ کلاف عمود $V_{w^۱}$ در S^{n+k} نمایش داد. در نتیجه با استفاده خاصیت طبیعی بودن[۱] نگاشت توم:

$$\varphi^*(Y_{w^۱}) = \varphi^* f^*_{w^۱}(Y_w) = f^*_{w^۱}\varphi^*_G(Y_w) = f^*_{w^۱}(X_w) = \delta^w_{w^۱}(s) \qquad \text{(II)}$$

کلاس‌های مشخصه کلاف عمود V_w، اثر چندجمله‌های درجه k از $\bar{w}_i$ روی کلاس بنیادی V_w است. از تساوی II نتیجه می‌گیریم برای هر نگاشتی مثل $f : S^{n+k} \longrightarrow MO(n)$ که پوچ هموتوپ نیست. ترکیب خطی از X_w وجود دارد که تصویر آنها تحت f^* در جبر $H^*(S^{n+k}, \mathbb{Z}_۲)$، ناصفر است. در نتیجه حداقل یک کلاس مشخصه کلاف عمود V ناصفر است. در نتیجه وارون قضیه پنتریاگین را به پیمانه ۲ ثابت کردیم:

۲-۵-۲ قضیه: اگر همه کلاس‌های اشتیفل ـ ویتنی خمینه V^k برابر صفر باشد در این صورت این خمینه به پیمانه ۲ پوچ ـ کبردانت است.

1) Naturality

فصل ۳

دنباله دقیق رخلین و اثبات حدس توم

همان طور که در فصل گذشته گفتیم، ساختار حلقه $\mathfrak{N}$ توسط توم مشخص شد: در واقع جبر چندجمله‌ای است به پیمانه ۲ که با مولدهای x_i در بعد i که به صورت $2^j - 1$ نیست، تولید می‌شود. اگر w^i، iـ امین کلاس اشتیفل ـ ویتنی باشد، می‌دانیم به صورت چندجمله‌ای‌های متقارن از متغیرهای t_i قابل نمایش است. قرار دهید $s_k(w^1, \dots, w^k)$ چندجمله‌ای $\sum_i t_i^k$ باشد. حال M_k خمینه k بعدی به عنوان مولد $\mathfrak{N}$ می‌توان در نظر گرفت در صورتی که $s_k[M_k] = 1$. توم نشان داد که فضای افکنشی حقیقی $\mathbb{R}P_{2n}$ در بعد زوج و دولد[1] نیز در بعد فرد مولدهایی معرفی کرد که در ادامه خواهیم آورد. در این فصل ما قضیه میلنر[2] را فرض می‌کنیم، که می‌گوید حلقه Ω تاب مرتبه فرد ندارد، و در فصل بعد اثبات می‌کنیم چون برای اثبات عدم وجود تاب فرد به دنباله طیفی آدامز[3] نیاز داریم، در نتیجه برای تشخیص ساختار Ω می‌بایست تاب مرتبه 2^i را بررسی کنیم. مهمترین حکمی که در این باره مطرح شده، توسط رخلین درباره نگاشت طبیعی فراموشی جهت $r : \Omega \longrightarrow \mathfrak{N}$ است. شخص رخلین نشان داد دنباله دقیق کوتاه زیر وجود دارد:

$$\Omega \xrightarrow{\times 2} \Omega \xrightarrow{r} \mathfrak{N}$$

1) Dold 2) Milnor 3) Adams Spectral Sequence

(منظور از همریختی اول $x \longrightarrow 2x$ است.) البته محاسبهٔ رخلین در مورد مرتبه ۲ اشکال داشت که توسط دولد برطرف شد.

در این فصل ما به احکام زیر خواهیم پرداخت:

۱) دنباله دقیق رخلین و به کمک آن اثبات عدم وجود تاب مرتبه ۴ در Ω.

۲) دو خمینه فقط در صورتی که در Ω کبردانت هستند که اعداد اشتیفل ـ ویتنی و پنتریاگین آنها یک چیز باشد. (حدس توم).

۳-۱ تعریف و ویژگی‌های اولیه $\partial_1, \mathfrak{M}$

فرض کنید M_n خمینه بسته باشد، که کلاس اشتیفل ـ ویتنی w^1 آن تحدید کلاس با ضرب صحیح به پیمانه ۲ است. این کلاس صحیح متناظر است با نگاشت $f : M_n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$. اگر u کلاس بنیادی S^1 باشد در این صورت $f^*(u) = w^1$. می‌دانیم $\mathbb{Z}_2$ـ کلاف تاری روی X با $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ متناظر هستند که در واقع هم ارز نگاشت از X به $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ است. در نتیجه کلاف متناظر با w^1 با گروه $\mathbb{Z}_2$ در واقع کلاف پس کشیده توسط f از پوشش دولایه f است.

مانند فصل اول می‌توان فرض کرد f هموار است و 0 مقدار عددی برای f است. در نتیجه $V_{n-1} = f^{-1}(0)$ زیرخمینه مشتق‌پذیر از M_n است. چون کلاف عمود V_{n-1} از کلاف عمود 0 در S^1 القا شده است. در نتیجه کلاف عمود بدیهی است. (ما S^1 را به عنوان بازه $[0, 1]$ نگاه می‌کنیم که 0 و 1 بر هم منطبق شده‌اند.) در نتیجه کلاف جهت، یعنی کلاف متناظر با w^1، روی $M - V$ از کلاف روی $(0, 1)$ القا شده است که بدیهی است. پس خمینه $f^{-1}[0, \delta)$، که δ به قدر لازم کوچک است، جهت‌پذیر با مرز V است. چون f از $w^1(M)$ القا شده است و $v = f^{-1}(0)$ پس دوگان v در M به پیمانه ۲ همان $w^1(M)$ است.

۳-۱-۱ لم: خمینه V_{n-1} را می‌توان از روش بالا به دست آورد، اگر و فقط اگر $2V_{n-1} \sim 0$.

اثبات: اگر v از روش بالا به دست آمده بود M را از روی V ببرید، خمینه M' با مرز به دست می‌آید. $M-V$ جهت‌پذیر است پس M' نیز چنین خواهد بود. چون کلاف عمود V در M بدیهی است. پس مرز M' از دوکپی v تشکیل شده است. جهت روی $M-V$ روی V و M' جهت القا می‌کند و در نتیجه $\partial M' = ۲V$. پس $۲V \sim ۰$.

حال برعکس فرض کنید $۲V \sim ۰$ و M' خمینه جهت‌پذیر باشد که مرز آن $۲V$ باشد. فرض کنید M خمینه حاصل از چسباندن دو کپی V در M' به هم باشند. به سادگی می‌توان ساختار مشتق‌پذیری از روی M' به M القا کرد.

فرض کنید ρ متریک مشتق‌پذیر روی M باشد و ρ' روی M'. همچنین می‌توان فرض کرد این متریک طوری نرمالایزد که فاصله دوکپی V، $V_۱$ و $V_۲$، در M' از یک بیشتر مساوی باشد. تعریف می‌کنیم $f_۱ : M' \longrightarrow [۰,۱]$ که:

$$\begin{array}{lll} f_۱(x)=\rho'(x,V_۱) & \text{اگر} & \rho'(x,V_۱)<\frac{۱}{۲} \\ f_۱(x)=۱-\rho'(x,V_۲) & \text{اگر} & \rho'(x,V_۲)<\frac{۱}{۲} \\ f_۱(x)=\frac{۱}{۲} & & \text{در غیر این صورت} \end{array}$$

از روی نگاشت $f_۱$ نگاشت $f : M \longrightarrow S^۱$ القا می‌کند که روی $V_۱$ و $V_۲$ که به ترتیب ۰ و ۱ می‌شود را یکی می‌گیریم. f در همسایگی V مشتق‌پذیر است و $f^{-۱}(۰) = V$، پوشش دو لایه $S^۱$، کلاف جهت M را القا می‌کند. کلاف عمود V بدیهی است پس $w^۱(M) = f^*(u)$. چون u تحدید کلاس با ضرایب صحیح است پس $w^۱$ نیز چنین است. پس V از روش مذکور حاصل شده است. ■

فرض کنید M_n و $V_{n-۱}$ مانند قبل باشند و $i : V \hookrightarrow M$ نگاشت شمول باشد. فرض کنید ξ و η و ζ کلاف‌های مماس بر M و v و کلاف عمود v در M باشند. چون $i^*\xi = \eta \oplus \zeta$ پس با استفاده از جمع ویتنی $i^*w(\xi) = w(\eta)w(\zeta)$. اما ζ کلاف بدیهی است. پس $w(\zeta) = ۱$ و در نتیجه $i^*w(\xi) = w(\eta)$ و یا $i^*w(M) = w(v)$.

اگر X فضای توپولوژیک دلخواه و $x \in H_r(X,\mathbb{Z}_۲)$ و $y \in H^r(X,\mathbb{Z}_۲)$ در این صورت اثر y روی x را

با $<y,x>$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $I=(a,b,\ldots,c)$ افراز $n-۱$ باشد. می‌نویسیم $w^a w^b \ldots w^c = w^I$.

۳-۱-۲ لم: $<w^I(v),v>=<w^I(M)w^۱(M),M>$.

اثبات:

$$
\begin{aligned}
<w^I(V),V> &=< i^* w^I(M),V> \\
&=< w^I(M), i_* V> \\
&=< w^I(M), w^۱(M) \frown M>
\end{aligned}
$$

که منظور از $\frown$ ضرب قوسی[1] است. M $i_* v = w^۱(M) \frown$ چون $i_*(V)$ دوگان $w^۱(M)$ است.

$$<w^I(M),w^۱(M) \frown M>=<w^I(M) \frown w^۱(M),M>. \qquad \blacksquare$$

از لم نتیجه می‌شود که چون اعداد اشتیفل ـ ویتنی کلاس کبردیسم را به پیمانه ۲ مشخص می‌کنند، کلاس $\{M\}$، کلاس $\{V\}$ را مشخص خواهد کرد. تعریف می‌کنیم $\{V\} = \partial_۱\{M\}$. همچنین فرض کنید $\mathfrak{M}$ زیرمجموعهٔ $\mathfrak{N}$ از همه کلاس به شکل $\{M\}$ باشد. توجه کنید $r(\Omega) \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ و تصویر $\partial_۱ : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ مشمول در $r(\Omega)$ است، چون V جهت‌پذیر است و $\partial_۱$ نگاشتی از $\mathfrak{M}$ به $r(\Omega)$ القا می‌کند. واضح است که نگاشت $\partial_۱ r : \Omega \longrightarrow \mathfrak{N}$ صفر است.

۳-۱-۳ لم: $\mathfrak{M}$ زیرجبر $\mathfrak{N}$ و $\partial_۱$ مشتق $\mathfrak{M}$ است.

اثبات: مجموعه خمینه‌هایی که $w^۱(M)$ از تحدید کلاسهای صحیح به دست می‌آیند تحت عمل جمع بسته هستند. چون کلاف مماس M, M' جمع مستقیم کلاف مماس TM', TM است پس براساس قضیه ضرب ویتنی داریم:

$$w^۱(M \times M') = w^۱(M) \otimes ۱ + ۱ \otimes w'(M')$$

1) cap product

پس کلاس $w^{۱}(M \times M')$ نیز تحدید $u \otimes ۱ + ۱ \otimes u'$ به پیمانه ۲ است.

فرض کنید $\mathfrak{B}$ جبر چندجمله‌ای با مولدهای w^i و $\Delta : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ که این طور تعریف شده است $\Delta(w^i) = \sum_{j+k=i} w^i \otimes w^k$. اگر $X \in \mathfrak{B}$، M_k یک خمینه باشد، $X(M)$ مبین اثر جمله‌های درجه k روی کلاس بنیادی M است. چون $H^*(M, \mathbb{Z}_۲) \otimes H^*(M, \mathbb{Z}_۲) = H^*(M \times M', \mathbb{Z}_۲)$ می‌توانیم تعریف کنیم:

$$X \otimes Y(M, M') = X(M) \otimes Y(M')$$

چون براساس ضرب ویتنی داریم:

$$w(M \times M') = (w(M) \otimes ۱)(۱ \otimes w(M')) = w(M) \otimes w(M')$$

برای هر X از $\mathfrak{B}$،

$$X(M \times M') = \Delta(X)(M, M') \tag{I}$$

برقرار است. با این علامت گذاری می‌توانیم لم قبلی را به صورت زیر بنویسیم:

$$X(\partial_۱ M) = w^۱ X(M) \tag{II}$$

با استفاده از II,I داریم:

$$\begin{aligned} X(\partial_۱(M \times M')) &= w^۱ X(M \times M') \\ &= \Delta(w^۱ X)(M, M') \\ &= (w^۱ \otimes ۱)\Delta X(M, M') + (۱ \otimes w^۱)\Delta X(M, M') \\ &= \Delta X(\partial_۱, M') + \Delta X(M, \partial_۱ M') \\ &= X(\partial_۱ M \times M') + X(M \times \partial_۱ M') \end{aligned}$$

در نتیجه همه اعداد اشتیفل X روی $\partial_۱(M \times M')$ و $\partial_۱ M \times M' + M \times \partial_۱ M'$ یکی خواهند شد، در نتیجه این دو به پیمانه ۲ کبردانت هستند. پس $\partial_۱$ مشتق است.■

۳-۲ خمینه‌های دولد، $P(m,n)$ و $Q(m,n)$

فرض کنید S^m بین ۱ $=\sum_{\circ}^{m} x_i^{\text{۲}}$ در $\mathbb{R}^{m+\text{۱}}$ و $\mathbb{C}P(n)$ فضای افکنشی مختلط با مختصات همگن $(z_{\circ},\dots,z_n)$ باشد. خمینه دولد $p(m,n)$ فضای مدار عمل $(x,z)\longrightarrow(-x,\bar{z})$ روی $S^m\times\mathbb{C}P(n)$ است. افکنش $x\longrightarrow(x,z)$ نگاشت تاری $\alpha: P(m,n)\longrightarrow\mathbb{R}P(m)$ با تار $\mathbb{C}P(n)$ را حاصل می‌کند. فرض کنید T تصویر نسبت به صفحه $x_m=\circ$ باشد. عمل $(x,z)\longrightarrow(Tx,z)$ با عمل بالا (در واقع عمل گروه $\mathbb{Z}_{\text{۲}}$) سازگار است. T خودریختی روی فضای مدار القا می‌کند که آن را A می‌نامیم. در حالتی که m فرد و n زوج باشد $P(m,n)$ جهت‌پذیر و A جهت آن را عکس می‌کند.

فضای $Q(m,n)$ را از خمینه $P(m,n)\times[\circ,\text{۱}]$ که $(Ap,\text{۱})\longleftrightarrow(p,\circ)$ برای هر $p\in P(m,n)$ یکی کردیم، به دست می‌آوریم. نگاشت تصویر $t\longrightarrow(x,z,t)$ نگاشت تاری $\beta: Q(m,n)\longrightarrow S^{\text{۱}}$ را القا می‌کند که تارش $P(m,n)$ است. نگاشت تصویر $(x,t)\longrightarrow(x,z,t)$ نیز نگاشت تاری $\gamma: Q(m,n)\longrightarrow Q(m,\circ)$ را با تار $\mathbb{C}P(n)$ القا می‌کند. نهایتاً نگاشت دسته‌بندی[1] $Q(m,\circ)\longrightarrow\mathbb{R}P(m+\text{۱})$ برای γ توسط نگاشت $\theta: Q(m,n)\longrightarrow P(m+\text{۱},n)$ پوشیده می‌شود که این طور تعریف می‌شود:

$$(x,z,t)\longrightarrow(x_{\circ},\dots,x_{m-\text{۱}}\cos\pi t, x_m\sin\pi t)$$

۳-۲-۱ لم: $H^*(Q(m,n),\mathbb{Z}_{\text{۲}})$ سه مولد d,c,x در بعد ۱و۱و۲ دارد که در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$x^{\text{۲}}=\circ,\qquad c^{m+\text{۱}}=c^m x,\qquad d^{n+\text{۱}}=\circ$$

اثبات: گروه پادهمانستگی $P(m,n)$ به پیمانه ۲ توسط دولد مشخص شد که دو مولد d,c دارد که $c^{m+\text{۱}}=d^{n+\text{۱}}=\circ$. نگاشت تاری β دنباله طیفی را می‌سازد که به خاطر تطابق بعد می‌بایست همه مشتق‌های دنباله طیفی صفر باشد (چون حلقه $H^*(S^{\text{۱}})$ فقط در $E_{\text{۲}}^{\circ,\circ}$ و $E_{\text{۲}}^{\text{۱},\circ}$ ناصفر است.). اگر x به وسیلهٔ β از مولد u از $H^{\text{۱}}(S^{\text{۱}})$ القا شده باشد و d,c کلاس‌هایی القا می‌کنند که آنها با همین حروف نشان می‌دهیم. برای $H^*(P(m,n))$ و $H^*(Q(m,n))$ پایه جمعی $\{c^r d^s t^{\varepsilon}:\circ\le r\le m,\circ\le s\le n,\circ\le\varepsilon\le\text{۱}\}$

1) Classifying map

است. علاوه بر این $x^{2} = \beta^*(u^{2}) = 0$. فرض d توسط θ از کلاس d در $H^*(P(m+1,n))$ القا شده باشد. در این صورت کلاس d روی زیرخمینه $P(m,n)$ القا می‌شود. چون در $P(m+1,n)$، $d^{n+1}=0$ پس در $Q(m,n)$ نیز همین طور است.

حال فقط کافی است c را تعریف کنیم و c^{m+1} را محاسبه کنیم. در حالت $n=0$ تعریف می‌کنیم c توسط θ از کلاس c در $\mathbb{R}P(m+1)$ القا شده باشد. θ نگاشتی است از درجه ۱ در نتیجه کلاس c^{m+1} که حداکثر بعد را در $\mathbb{R}P(m+1)$ دارد به $c^m x$ از $Q(m,0)$ می‌برد. می‌دانیم $\theta^*(c)=c$ ،$\theta^*(c^{m+1})=c^{m+1}$، پس $c^{m+1}=c^m x$ در $Q(m,0)$. در حالت کلی تعریف می‌کنیم، کلاسی باشد که توسط نگاشت γ القا شده است، چون x نیز چنین است پس رابطه $c^{m+1}=c^m x$ نیز حفظ خواهد شد.■

۳-۲-۲ لم: کلاس اشتیفل ـ ویتنی $Q(m,n)$ برای $m>0$ برابر است با:

$$(1+c+x)(1+c)^{m-1}(1+c+d)^{n-1}.$$

اثبات: حکم را به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. وقتی $n=0$، $Q(m,0)$، زیرخمینه‌ای به شکل $\mathbb{R}P(m-1)\times S^1$ از نقص بعد ۱ دارد. این زیرخمینه عدد تقاطع ۱ با دورهای $\mathbb{R}P(1)\times 0$ و $\mathbb{R}P(0)\times S^1$ دارد، پس دوگان کلاس پادهمانستگی $c+x$ است. در نتیجه کلاس اشتیفل ـ ویتنی کلاف عمود $1+c+x$ است. اما

$$w(\mathbb{R}P(m-1)\times S^1)=(1+c)^m$$

فرض کنید j نگاشت شمول $P_{m-1}(R)\times S^1$ در $Q(m,0)$. پس

$$j^*(w(Q(m,0)))=(1+c+x)(1+c)^m$$

در نتیجه اگر تعریف کنیم:

$$D=w(Q(m,0))-(1+c+x)(1+c)^m$$

$j^*D=0$ در نتیجه D مضرب c^m است.

$Q(m,\circ)$ زیرخمینه‌ای به شکل $\mathbb{R}P(m) = P(m,\circ)$ از نقص بعد ۱ دارد که کلاف عمودش بدیهی است. چون می‌دانیم $w(\mathbb{R}P(m)) = (\text{۱}+c)^{m+\text{۱}}$، اگر i نگاشت شمول $\mathbb{R}P(m)$ در $Q(m,\circ)$ باشد،

$$i^*(w(Q(m,\circ))) = (\text{۱}+c)^{m+\text{۱}} = i^*((\text{۱}+c+x)(\text{۱}+c)^m)$$

پس $i^*D = \circ$ پس D مضرب x و در نتیجه مضرب $c^m x$ است. پس همه کلاس‌های اشتیفل ـ ویتنی به غیر کلاس با بعد خمینه می‌دانیم. کلاس با بعد خمینه همان کلاس اویلر است که با توجه به لم قبلی چون عدد اویلر $Q(m,\circ)$ برابر صفر است پس $w^{m+\text{۱}} = \circ$.

حال فرض کنید حکم استقراء برای $n-\text{۱}$ برقرار باشد. کاملاً به طور مشابه تعریف می‌کنیم

$$D = w(Q(m,n)) - (\text{۱}+c+x)(\text{۱}+c)^{m+\text{۱}}(\text{۱}+c+d)^{n+\text{۱}}$$

اگر خمینه $P(m,n)\times\circ$ را در نظر بگیریم، D می‌بایست بر x و اگر زیرخمینه $P(m-\text{۱},n)\times S^\text{۱}$ را در نظر بگیریم بر c^m و اگر زیرخمینه $Q(m,n-\text{۱})$ می‌بایست بر d^n بخش‌پذیر باشد و کلاس با بعد ماکسیمم را هم مانند قبل بررسی می‌کنیم.■

۳-۳ جبر چندجمله‌ای $\mathfrak{M}''$

در حالتی که m فرد و n زوج باشد، همان طور که اشاره شد $P(m,n)$ جهت‌پذیر است و A جهت $P(m,n)$ را عوض می‌کند. $w^\text{۱}(Q(m,n)) = x$ که توسط نگاشت β از کلاس u در جبر پادهمانستگی $S^\text{۱}$ القا می‌شود. دولد مولدهای فرد بعدی حلقه $\mathfrak{N}$ را با استفاده از $P(m,n)$ و $Q(m,n)$ این طور تعریف کرد که فرض کنید $\text{۲}k-\text{۱}$ عدد فردی است که k توان ۲ نیست. $k = \text{۲}^{r-\text{۱}}(\text{۲}s+\text{۱})$ که $s\neq\circ$. $X_{\text{۲}k-\text{۱}}$ در $\mathfrak{N}$ کلاس

$$V_{\text{۲}k-\text{۱}} = P(\text{۲}^r-\text{۱},\text{۲}^r s)$$

است. تحت شرایط مشابهی تعریف می‌کنیم، $X_{\text{۲}k}$ در $\mathfrak{N}$ کلاس

$$M_{\text{۲}k} = Q(\text{۲}^r-\text{۱},\text{۲}^r s)$$

باشد.

۳-۳-۱ لم: X_{2k} در $\mathfrak{N}$ عناصر تجزیه‌ناپذیر هستند.

اثبات: باتوجه به آنچه در مقدمه گفتیم کافی است نشان دهیم $s_{2k}(M_{2k}) = 1$. به طور صوری می‌نویسیم $1 + c + d = (1+\mu)(1+\nu)$. در این صورت چون

$$w(Q(m,n)) = (1+c+x)(1+c)^{m-1}(1+\mu)^{n+1}(1+\nu)^{n+1}$$

متغیرهای t_j که w^i توابع متقارنی از آنها هستند را می‌توانیم، $c+x$، c ($m-1$ بار)، μ, ν ($n+1$ بار) بگیریم. توجه کنید m فرد و n زوج است و $n > 0$، $2k = m + 2n + 1$.

$$\begin{aligned} s_{2k}(Q(m,n)) &= (c+x)^{m+2n+1} + (m-1)c^{m+2n+1} + (n+1)(\mu^{m+2n+1} + \nu^{m+2n+1}) \\ &= \mu^{m+2n+1} + \nu^{m+2n+1} \end{aligned}$$

حال با استقراء روی r به سادگی نتیجه می‌شود

$$s_{r+1} \overset{2}{\equiv} (u+v)s_r + (uv)s_{r-1}$$

که در بالا $s_r = u^r + v^r$،

$$s_r \overset{2}{\equiv} \sum_{0 \le s < \frac{r}{2}} \binom{r-2s-1}{s} (u+v)^{r-2s}(uv)^s$$

پس

$$\begin{aligned} s_{2k}(Q(m,n)) &= \sum_s \binom{m+2n-2s}{s} c^{m+2n-2s+1} d^s \\ &= \binom{m}{n} c^{m+1} d^n \\ s_{2k}[M_{2k}] &= \binom{m}{n} = \binom{2^r - 1}{2^r s} \overset{2}{\equiv} 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

قرار دهید X_{2^j} کلاس $\mathbb{R}P(2^j)$ در $\mathfrak{N}$ باشد. در نتیجه X_i برای همه ابعاد به غیر از iهای به فرم $2^j - 1$ تعریف شده تجزیه‌ناپذیر هستند. پس طبق توم برای $\mathfrak{N}$ پایه تشکیل می‌دهند.

۳-۳-۲ لم: $\mathbb{C}P(n) \sim_{۲} (\mathbb{R}P(n))^{۲}$.

اثبات: گروه پادهمانستگی و کلاس‌های مشخصه (به پیمانه ۲) $\mathbb{C}P(n)$ با $\mathbb{R}P(n)$ منتها در ابعاد دو برابر یکریخت هستند. در نتیجه اعداد اشتیفل ـ ویتنی $\mathbb{C}P(n)$ از $\mathbb{R}P(n)$ با دو برابرکردن بعد به دست می‌آید. برای هر خمینه M ، اعداد اشتیفل ـ ویتنی $M^{۲}$ را می‌توانیم با ضرب ویتنی حساب کنیم:

$$w^k(M^{۲}) = \sum_{i+j=k} w^i(M) \otimes w^j(M)$$

که به خاطر بعد همه جملات $i \neq j$ حذف می‌شوند در نتیجه اعداد اشتیفل ـ ویتنی $M^{۲}$ از دو برابرکردن بعد اعداد اشتیفل ـ ویتنی M به دست می‌آیند.■

$X_{۲k-۱}$ (چون توسط کلاس جهت‌پذیر قابل نمایش است) و $X_{۲k}$ به $\mathfrak{M}$ تعلق دارند. باتوجه به لم بالا $X_{۲j}^{۲}$ نیز به $\mathfrak{M}$ تعلق دارد. در نتیجه $\mathfrak{M}$ شامل جبر چندجمله‌ای $\mathfrak{M}''$ که توسط این اعضا تولید می‌شود، است. روی این جبر مشتق $\partial_{۱}$ توسط مقدارش روی مولدها مشخص می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} \partial_{۱} X_{۲k-۱} &= ۰ \\ \partial_{۱} X_{۲k} &= X_{۲k-۱} \\ \partial_{۱} X_{۲j} &= ۰ \end{aligned}\right\} \qquad (\text{به شکل توان ۲ نیست } k)$$

تعریف می‌کنیم $\mathfrak{M}'$ مجموعهٔ کلاس‌های در $\mathfrak{N}$ باشد که همه اعداد اشتیفل ـ ویتنی که با عامل $(w^{۱})^{۲}$ شروع می‌شود. اثرشان روی کلاس بنیادی صفر شود. چون در صورتی که $w^{۱}$ از کلاس صحیح تحدید شده باشد، $(w^{۱})^{۲} = ۰$. پس داریم $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$. در بخش‌های بعد نشان خواهیم داد $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'$.

۳-۴ بررسی $\mathfrak{M}$ و $\frac{\ker \partial_{۱}}{\operatorname{Im} \partial_{۱}}$

علامت‌گذاری در این بخش مانند فصل گذشته در تشخیص ساختار $MO(n)$ است. تعریف می‌کنیم

$$s(a_{۱}, \dots, a_r) = \sum_{\text{متقارن}} t_{۱}^{a_{۱}} \dots t_r^{a_r}$$

که $(a_{۱}, \dots, a_r)$ افرازی از $h = \sum a_i$ است که هیچ کدام از a_iها به صورت $۲^j - ۱$ نیست. فرض کنید $S = s(a_{۱}, \dots, a_r)$ در این صورت توجه کنید $w^{n+۱}S \longrightarrow w^n S$ یکریختی از $H^{m+n}(MO(n))$ به

$H^{m+n+1}(MO(n+1))$ برای $m \leq n$ که با عمل $\mathfrak{A}_2$ (جبر استینراد به پیمانه ۲) سازگار است. پس $S \longrightarrow w^n S$ یکریختی از $H^{m+n}(MO(n))$ به $\mathfrak{B}_m$ است. در نتیجه می‌توان عمل $\mathfrak{A}$ روی $\mathfrak{B}$ مستقل از n تعریف کرد. می‌توان نتیجه بالا این طور ترجمه کرد که: $\mathfrak{B}$ یک $\mathfrak{A}_2$ـ مدول آزاد است.

فرض کنید $I = (a_1, \ldots, a_r)$ افراز باشد، می‌نویسیم $s(a_1, \ldots, a_r) = s(I)$، و توجه کنید که این‌ها پایه‌ای برای $\mathfrak{B}$ تشکیل می‌دهند. فرض کنید $\mathfrak{C}$ دوگان مدرج از $\mathfrak{B}$ باشد که پایه $\{s(I)\}$ دوگان پایه $\{\sigma(I)\}$ است. در $\mathfrak{C}$ ضرب $\sigma(IJ) = \sigma(I)\sigma(J)$ که IJ از چسباندن به هم افرازهای I و J به دست آمده است. به راحتی دیده می‌شود این ضرب دوگان Δ روی $\mathfrak{B}$ است. $\mathfrak{C}$ جبر چندجمله‌ای است با مولدهای $\sigma(i)$. فرض کنید ضرب کردن در $s(2) = (w^1)^2$ در $\mathfrak{B}$ را با δ_2 و دوگانش را در $\mathfrak{C}$ با ∂_2 نمایش می‌دهیم.

۳-۴-۱ لم: ∂_2 در $\mathfrak{C}$ مشتق است که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\partial_2\sigma(1) = 0 \qquad \partial_2\sigma(2) = 0 \qquad \partial_2\sigma(i) = \sigma(i-2)$$

اثبات: اثبات مشتق با توجه به ابتدایی[1] بودن $(w^1)^2$ نسبت Δ دقیقاً مانند اثبات مشتق بودن ∂_1 است. فرض کنید منظور از افراز $I = (1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots r^{\lambda_r})$ آن است که j در این افراز λ_j بار ظاهر شده است.

پس داریم:

$$\begin{aligned}\delta_2 S(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots r^{\lambda_r}) &= (\lambda_2+1)S(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2+1}\ldots r^{\lambda_r})\\ &\quad + \sum_{i\geq 1}(\lambda_{i+2}+1)S(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i-1}(i+1)^{\lambda_{i+1}}(i+2)^{\lambda_{i+2}+1}\ldots r^{\lambda_r})\end{aligned}$$

در نتیجه با دوگان گرفتن داریم:

$$\begin{aligned}\partial_2\sigma(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots r^{\lambda_r}) &= \lambda_2\sigma(1^{\lambda_1}2^{\lambda_2-1}\ldots r^{\lambda_r})\\ &\quad + \sum_{i\geq 1}\lambda_{i+2}\sigma(1^{\lambda_1}\ldots i^{\lambda_i+1}(i+1)^{\lambda_{i+1}}(i+2)^{\lambda_{i+2}-1}\ldots r^{\lambda_r})\end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به تعریف ضرب $\mathfrak{C}$، ∂_2 در رابطه ادعا شده صدق می‌کند.■

با توجه به ضابطه ∂_2 در لم قبل اکنون $\ker \partial_2$ را حساب می‌کنیم.

1) primitive

۳-۴-۲ لم: $\ker \partial_2$ شامل عضوی مانند τ_i برای هر i که به شکل توان ۲ نیست، است که جمع $\sigma(i)$ با عناصر تجزیه‌پذیر $\mathfrak{C}$ است.

اثبات: تعریف می‌کنیم:

$$\tau_{2i+1} = \sigma(2i+1) + \sigma(2)\sigma(2i-1) + \cdots + \sigma(2i)\sigma(1) \qquad i \geq 0$$

برای درجه زوج، تعریف می‌کنیم $v = \sigma(2i-2k)\sigma(4k-2i-2)$، $\sigma_2^k(v) = 0$ و

$$\begin{aligned} \sigma_2(\sigma^2(2i-2k)\sigma(4k-2i)) &= \sigma(2i-2k)v \\ &= \partial_2(\sigma(2i-2k+2)v + \sigma(2i-2k+4)\partial_2 v \\ &\quad + \cdots + \sigma(2i)\partial_2^{k-1}(v)) \end{aligned}$$

معادله بالا را می‌توان به صورت $\partial_2 \mathfrak{X} = 0$ نوشت که ضرب $\sigma(2i)$ در $\mathfrak{X}$ برابر

$$\partial_2^{k-1} v = \partial_2^{k-1}(\sigma(2i-2k)\sigma(4k-2i-2)) = \binom{2k-i-1}{i-k}$$

(با توجه به قانون لایبنیز[1] و لم قبل). اگر $i = 2^r(2s+1)$، $r \geq 0$ و $s \geq 1$ قرار می‌دهیم $k = 2^{r+1}s$؛ که در این صورت ضرب ۱ است و تعریف می‌کنیم τ_{2i} همین $\mathfrak{X}$ به دست آمده باشد.

حال δ_2، ضرب در $(w^1)^2$ در جبر چندجمله $\mathfrak{B}$ است، که یک به یک است. پس ∂_2 پوشا است. $\ker \partial_2$ شامل τ_i است برای iهایی که به شکل توانی از ۲ نیستند و علاوه بر این شامل $\sigma(1)$ و $\sigma^2(2^j)$ برای $j > 0$. پس در نتیجه یک زیرجبر را تشکیل می‌دهند که در هر بعدی و غیر از ۲ مولد دارد. اگر V فضای برداری مدرج باشد، قرار دهید V_n مؤلفه درجه n، V باشد و برای راحتی می‌نویسیم $d_n(V) = \dim(V_n)$. چون ∂_r پوشا است، پس $d_n(\ker \partial_2) = d_n(C) - d_{n-2}(C) = d_n(Q)$ که Q جبر چندجمله‌ای است که در هر بعد به غیر از ۲ یک مولد دارد. پس در نتیجه تمام آن $\ker \partial_2$ است.

فرض کنید روی $\partial(I)$ همان ترتیب توم که روی $s(I)$ وجود دارد، القا شده باشد. این ترتیب با ضرب در $\mathfrak{C}$ سازگار است. حال رابطه $\tau_i = \sigma(i) +$(درجه بالاتر) برای iهای فرد روشن است. برای iهای زوج نیز چون با

1) Leibnitz

$\sigma(۲k)$ آغاز می‌شود، برقرار است. در نتیجه تک جمله‌ای‌هایی که مولد $\ker\partial_۲$ هستند که در بالا توصیف آنها را کردیم، متناظر هستند با تک‌جمله‌هایی از $\sigma(i)$ ک i توانی از ۲ نیست، $\sigma(۱)$ و $\sigma^۲(۲^j)$، نتایج بالا در قالب لم خلاصه می‌کنیم.

۳-۴-۳ لم: فرض کنید m تک جمله‌ای از $\sigma(i)$ باشد که $\sigma(۲^j)$ در آن با توان زوج ظاهر شده باشد. در این صورت عضوی از $\ker\partial_۲$ وجود دارد که شامل m است به علاوه جملات بزرگتر از m.

۴-۴-۳ لم: فرض کنید x عضوی از $\mathrm{Im}\,\delta_۲$ و $s(I)$ یکی از بزرگترین جملات x باشد. در این صورت وجود دارد ۲^j، $j \leq ۱$ که در I فرد بار ظاهر شده است.

اثبات: این لم از لم قبلی با دوگان گرفتن نتیجه می‌شود. فرض کنید هر ۲^j در I زوج بار آمده باشد.

با توجه به لم ۱۰، عضوی مانند $\mathfrak{X}$ از $\ker\partial_۲$ وجود دارد که شامل $\sigma(I)$ است به علاوه جملات بزرگتر چون $S(I)$ و $\sigma(I)$ دوگان هم هستند پس $<x,\mathfrak{X}>=۱$ اما $x=\delta_۲ y$ در نتیجه

$$<x,\mathfrak{X}>=<\delta_۲ y,\mathfrak{X}>=<y,\partial_۲\mathfrak{X}>=۰$$

که تناقض است.■

۵-۴-۳ لم: اگر I افرازی باشد که در آن ۲^j برای $j \leq ۱$ به تعداد فردی ظاهر شده باشد. در این صورت عضوی از $\mathrm{Im}\,\delta_۲$ وجود دارد که برابر $s(I)$ به علاوه جملات کوچکتر است.

اثبات: این لم هم از لم قبلی با تحلیل بعد حاصل می‌آید. $d_n(\mathrm{Im}\,\delta_۲)$ برابر تعداد افراز n به فرم بالا است. اگر جبر مدرج منسوب به $\mathfrak{B}$ را با $G(\mathfrak{B})$ نمایش بدهیم، $d_n=(G(\mathrm{Im}\,\delta_۲))=d_n(\mathrm{Im}\,\delta_۲)$، اما $G_n(\mathrm{Im}\,\delta_۲)$ در فضای برداری تولید شده توسط $s(I)$ که I به فرم صورت لم است، مشمول است. که دارای ابعاد مساوی نیز هستند، پس این اعضا کل فضا را تولید می‌کنند و در نتیجه لم ثابت می‌شود.■

حال $\mathfrak{B}^{۲}(w^{۱}) = \delta_{۲}\mathfrak{B}$ یک $\mathfrak{A}_{۲}$- زیرمدول $\mathfrak{B}$ است. برای این که در $H^*(BO(n))$:

$$Sq(w^{۱})^{۲} = (w^{۱})^{۲} + (w^{۱})^{۲}$$

$$Sq^i(x(w^{۱})^{۲}) = (w^{۱})^{۲} Sq^i x + (w^{۱})^{۴} Sq^{i-۲} x$$

در نتیجه ایده‌آل تولید شده توسط $(w^{۱})^{۲}$ یک زیرمدول از $H^*(MO(n))$ و در نتیجه اشتراک آنها یعنی $\delta_{۲} H^*(MO(n))$ نیز چنین خواهد بود.

۳-۴-۶ قضیه: $\mathfrak{B}^{۲}(w^{۱})$ جمعوند مستقیم آزاد از $\mathfrak{A}_{۲}$- مدول $\mathfrak{B}$ است.

اثبات: ما پایه $\mathfrak{A}_{۲}$- مدول $\mathfrak{B}$ را می‌دانیم و هر عضو پایه توسط مرتبه کوچکترها قابل تغییر است. لم قبل می‌گوید که خیلی از اعضای پایه را می‌توان طوری تغییر داد که در $\mathfrak{B}^{۲}(w^{۱})$ نیفتند و در نتیجه $\mathfrak{A}$- زیرمدول آزاد از آن را تولید کنند که جمعوند مستقیم از $\mathfrak{B}$ است. اگر بگوییم چرا این زیرمدول کل $\mathfrak{B}^{۲}(w^{۱})$ می‌شود در این صورت قضیه اثبات خواهد شد. که این کار هم مانند ایده‌های سری لم‌های قبل از مقایسه بعد است.■

فرض کنید $\mathfrak{A}_{۲}^{+}$ اعضای با بعد مثبت از $\mathfrak{A}_{۲}$ باشند در نتیجه با توجه به توم $\mathfrak{N}$ را می‌توان به عنوان دوگان فضای برداری $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_{۲}^{+}\mathfrak{B}}$ نگاه کرد. ما $\mathfrak{M}'$ را به عنوان پوچساز $\mathfrak{B}^{۲}(w^{۱})$ در نظر گرفت و در نتیجه به عنوان دوگان $\frac{\mathfrak{B}}{(\mathfrak{A}_{۲}^{+}\mathfrak{B}+(w^{۱})^{۲}\mathfrak{B})}$ به آن نگاه کرد، در نتیجه تعداد اعضای مستقل خطی این فضا در هر بعد با پایه $\mathfrak{A}_{۲}$- مدول آزاد $\frac{\mathfrak{B}}{(w^{۱})^{۲}\mathfrak{B}}$ یکی است. این پایه در حالت اول با افرازهای غیردوتایی مشخص می‌شوند که توان ۲ زوج مرتبه ظاهر شده است که این افرازها در تناظر (۱-۱) هستند با تک جمله‌ای از متغیرهای x_i در هر بعد i که به شکل $۲^j - ۱$ نیست (و $i \neq ۲$). در نتیجه در فضای برداری $\mathfrak{M}''$ و $\mathfrak{M}'$ یک بعد دارند پس $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$.

۳-۴-۷ لم: (i) $\frac{\ker \partial_{۱}}{\operatorname{Im} \partial_{۱}}$ جبر چندجمله‌ای از $X^{۲}_{۲k}$ است.

(ii) هر عضو این جبر چندجمله‌ای به طور یکتا توسط چندجمله‌ای از $\mathbb{C}P(۲n)$ به پیمانه ۲ قابل نمایش است.

(iii) دوگان این فضای برداری فضای اعداد پنتریاگین به پیمانه ۲ است.

اثبات: مدول $\mathfrak{M}$ ضرب تانسوری جبرهای زیر است:

(a) چندجمله‌ای از X_{2k} و X_{2k-1} که $\partial_1 X_{2k} = X_{2k-1}$ و $\partial_1 X_{2k-1} = 0$ برای kهایی که به صورت توان ۲ نیستند.

(b) چندجمله‌ای از X_{2j}^2 که $\partial_1 X_{2j}^2 = 0$.

همانستگی (a) نسبت ∂_1 می‌شود جبر چندجمله‌ای از X_{2k}^2 و همانستگی (b) خودش می‌شود. در نتیجه (i) ثابت شد. اعداد پنتریاگین و پیمانه ۲، همان اعداد اشتیفل ـ ویتنی هستند در نتیجه تابع خطی روی $\ker \partial_1$ تعریف می‌کنند. اعضای $\operatorname{Im} \partial_1$ توسط خمینه جهت‌پذیر که در Ω مرتبه ۲ است، قابل نمایش است. پس اعداد پنتریاگین این خمینه صفر می‌شود. در نتیجه تابع خطی روی $\frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_1}$ القا می‌شود. ضرب $\mathbb{C}P(2n)$ جهت‌پذیر است در نتیجه عضوی از $\frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_1}$ است. در نتیجه با توجه به محاسبات عدد پنتریاگین فضای افکنشی نشان می‌دهد که این اعداد فرد هستند در نتیجه این تابع‌های خطی و اعضای $\frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_1}$ مستقل خطی هستند چون از نظر بعد نیز تطابق دارد پس لم ثابت شد.■

۳-۵ اثبات حدس توم و چندنتیجه

همان طور که در مقدمه فصل گفتیم نگاشت طبیعی $r : \Omega \longrightarrow \mathfrak{N}$ در دنباله دقیق کوتاه رخلین صدق می‌کند:

$$\Omega \xrightarrow{\times 2} \Omega \xrightarrow{r} \mathfrak{N}$$

۳-۵-۱ قضیه: Ω هیچ عضو مرتبهٔ ۴ ندارد.

اثبات: فرض کنید c عضوی از Ω_m از درجه ماکسیمال 2^x باشد. اگر $x > 1$ در این صورت چون $\partial_1 r = 0$، rc در $\ker \partial_1$ قرار می‌گیرد. چون c عضو تاب‌دار Ω است پس همه اعداد پنتریاگین صفر می‌شود در نتیجه بنابر لم قبل rc در $\frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_1}$ صفر می‌شود یعنی در $\operatorname{Im} \partial_1$ می‌افتد. در نتیجه وجود دارد کلاس c' در Ω که $2c' = 0$ و $rc' = rc$ چون $x > 1$ و $c - c'$ مرتبهٔ 2^x دارد و $r(c - c') = 0$. براساس دنباله رخلین وجود دارد d که $c - c' = 2d$. اما d مرتبه 2^{x+1} که با انتخاب x در تناقض است.■

۳-۵-۲ نتیجه: دو خمینه کبردانت هستند اگر و فقط اگر اعداد اشتیفل ـ ویتنی و پنتریاگین یکسانی داشته باشند. (حدس توم).

اثبات: ضرورت این شرط روشن است. فرض کنید این شرط برقرار باشد. در این صورت تفاضل این دو خمینه یک عضو تاب دار مثل c خواهد بود. چون اعداد اشتیفل ـ ویتنی آنها نیز یکسان است پس $rc = 0$ در نتیجه بنابر دنباله دقیق رخلین عضوی مثل d در Ω وجود دارد که $2d = c$ و d عضو تاب‌دار در Ω است. اما Ω تاب مرتبه فرد ندارد (این حکم را در فصل بعد توضیح خواهیم داد.) در نتیجه بنابر قضیه قبل می‌بایست $2d = 0$ و در نتیجه $c = 0$.■

۳-۵-۳ قضیه: کلاس M در Ω کلاس V را مشخص می‌کند. می‌نویسیم $[V] = \partial_3[M]$ حال دنبالهٔ دقیق

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "2"] \arrow[dr, "\partial_3"'] & & \Omega \\ & \mathfrak{M} \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

وجود دارد.

اثبات: چون می‌دانیم اعداد اشتیفل ـ ویتنی M، کلاس V را مشخص می‌کنند و همچنین می‌دانیم $2V \sim 0$، پس همه اعداد پنتریاگین V صفر می‌شود. بنابر قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم V در Ω کاملاً تعیین می‌شود. چون $\partial_3 r = 0$ پس کافی است برای دقیق بودن نمودار $\ker \partial_3 \subset \operatorname{Im} r$ را ثابت کنیم. (بقیه نمودار، دقیق بودنش را از قبل می‌دانیم). چون V جهت‌پذیر است، $\operatorname{Im} \partial_1 \subset \operatorname{Im} r$. همچنین هر هم دسته $\operatorname{Im} \partial_1$ در $\ker \partial_1$ توسط چندجمله‌ای از $\mathbb{C}P(2n)$ها مشخص می‌شود. $\ker \partial_1 \subset \operatorname{Im} r$. اما $\ker \partial_3 = \ker \partial_1$، چون همه اعداد پنتریاگین V صفر می‌شود، کلاس V در Ω صفر است اگر و تنها اگر $\mathfrak{N}$ نیز صفر باشد. حال فرض کنید M کلاس $V \sim 0$ را مشخص کند. M' را از M بابریدن از روی V به دست آورید. فرض کنید N خمینه با مرز V باشد. خمینهٔ N' و دوکپی از N که از روی مرز V به M' چسبیده‌اند به دست می‌آوریم. N' جهت‌پذیر است. باز فرض کنید W دوکپی $N \times 1$ در $N' \times I$ باشد که گوشه‌هایش را در $v \times 1$ صاف کردیم. $\partial W = M \times 1 + N' \times 0$ پس $M \underset{2}{\sim} N'$.■

۳-۵-۴ نتیجه: Ω جابه‌جایی است.

اثبات: می‌دانیم Ω پادجابه‌جایی است، که این نتیجه می‌دهد Ω روی ضرب‌هایی که یکی از آنها مرتبه ۲ و یا بعد زوج دارند، جابه‌جایی است. اما با توجه به بالا همه اعضای Ω به همین دو صورت هستند.

۳-۵-۵ نتیجه: ضرب کلاس جهت‌پذیر و کلاس جهت‌ناپذیر در $\mathfrak{N}$ جهت‌ناپذیر است.

اثبات: فرض کنید کلاسها به ترتیب x و y باشد. روشن است که y در $\mathfrak{M}$ نیست. پس ضرب آنها نیز در $\mathfrak{M}$ نیست چون

$$\partial_1 x = 0 \qquad \partial_1 y \neq 0 \Longrightarrow \partial_1(xy) = x\partial_1 y \neq 0$$

پس xy در $\ker \partial_1 = \operatorname{Im} r$ نمی‌افتد.■

۳-۵-۶ نتیجه: هر خمینه با خمینه جهت‌پذیر کبردانت است.

اثبات: چون ما در $\mathfrak{N}$ و به پیمانه ۲ کار می‌کنیم پس توان ۲ هر چندجمله‌ای از مولدها برابر همان چندجمله‌ای از توان ۲ مولدها است. حال چون $(\mathbb{R}P(2n))^2 \sim_2 \mathbb{C}P(2n)$ که جهت‌پذیر است و V_{2n-1} نیز همین طور. پس در نتیجه حکم ثابت شد.■

۳-۵-۷ نتیجه: هر کلاسی در $\mathfrak{N}$ که همه اعداد اشتیفل ـ ویتنی آن که عامل w^1 دارند، صفر می‌شود، شامل خمینه جهت‌پذیر است.

اثبات: اگر c کلاسی از نوع صورت حکم باشد می‌بایست در $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ است پس $\partial_1 c = 0$ و در نتیجه داریم $c = \operatorname{Im} r$.■

فصل ۴

قضیه‌های میلنر و کبردیسم مختلط

۴-۱ جبر استینراد[1] و دوگانش

در این بخش به ساختار جبر استینراد و دوگانش به عنوان جبر هوف[2] خواهیم پرداخت. ساختار جبر هوف دوگان جبر استینراد اولین بار توسط میلنر توصیف شد که برای اثبات احکام ساختار دوگان جبر استینراد می‌توانید به مقاله میلنر با همین عنوان مراجعه کنید. چون جبر استینراد را به پیمانه p، که عدد اول دلخواه است در نظر می‌گیریم آن را در حالت کلی با نماد $\mathfrak{A}_p$ و دوگانش را با $\mathfrak{A}_p^*$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید W یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت می‌دانیم عملگر استینراد

$$Sq^n : H^k(W, \mathbb{Z}_۲) \longrightarrow H^{k+n}(W, \mathbb{Z}_۲)$$

وجود دارد و به پیمانه p نیز عملگر استینراد به صورت زیر است

$$P^n : H^k(W, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{k+۲n(p-۱)}(W, \mathbb{Z}_p) \qquad (۲ < p)$$

این عملگرها خواصی دارند که آنها را لیست می‌کنیم. فرض کنیم $x, y \in H^*(W, \mathbb{Z}_۲)$ و $X, Y \in H^*(W, \mathbb{Z}_p)$.

1) Steenrod 2) Hopf algebra

۱) Sq^n، $\mathbb{Z}_2$ـ خطی است و P^n، $\mathbb{Z}_p$ـ خطی است.

۲) $Sq^0 = 1$ و $P^0 = 1$.

۳) Sq^1 همریختی باکشتاین است.

۴) اگر $n > \deg x$ در این صورت $Sq^n(x) = 0$. اگر $2n > \deg X$ در این صورت $P^n(X) = 0$.

۵) اگر $n = \deg x$ در این صورت $Sq^n(X) = x^2$. اگر $2n = \deg X$ در این صورت $P^n(X) = X^p$.

۶) (فرمول کارتان) $Sq^n(xy) = \sum_{k=0}^n Sq^k(x)Sq^{n-k}(y)$ و $P^n(XY) = \sum_{k=0}^n P^k(X)P^{n-k}(Y)$.

۷) اگر W یک Hـ فضا باشد $\psi(Sq^n(X)) = \sum_{k=0}^n (Sq^k \otimes Sq^{n-k})(\psi(X))$ و

$$\psi(P^n(X)) = \sum_{k=0}^n (P^k \otimes P^{n-k})(\psi(X)).$$

۸) (رابطهٔ آدِم[1]) اگر $0 < h < 2k$:

$$Sq^h Sq^k = \sum_{i=0}^{\frac{h}{2}} \binom{k-i-1}{h-2i} Sq^{h+k-i} Sq^i$$

اگر $0 < h < pk$:

$$P^h P^k = \sum_{i=0}^{[\frac{h}{p}]} (-1)^{h+i} \binom{(p-1)(k-i)-1}{h-p^i} P^{h+k-i} P^i$$

اگر $0 < h < pk$:

$$\begin{aligned} P^h \beta P^k = & \sum_{i=0}^{[\frac{h}{p}]} (-1)^{h+i} \binom{(p-1)(k-i)}{h-p^i} \beta P^{h+k-i} P^i \\ & + \sum_{i=0} (-1)^{h+i-1} \binom{(p-1)(k-i)-1}{h-p^i-1} P^{h+k-i} \beta P^i \end{aligned}$$

(β همریختی باکشتاین است)

جبر استنیراد یک جبر هوف است که پاد ضرب آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(Sq^n) = \sum_{k=0}^n Sq^k \otimes Sq^{n-k} \qquad \text{برای } p = 2$$

$$\psi(P^n) = \sum_{k=0}^n P^k \otimes P^{n-k}, \psi(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta \qquad \text{برای } p > 2$$

1) Adem

چون $H^*(W,\mathbb{Z}_p)$ یک $\mathfrak{A}_p$ـ مدول است پس $H_*(W,\mathbb{Z}_p)$ یک $\mathfrak{A}_p^*$ـ پاد مدول است با پاد ضرب

$$\psi : H_*(W,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathfrak{A}_p^* \otimes H_*(W,\mathbb{Z}_p)$$

قضیه زیر را بدون اثبات استفاده خواهیم کرد.

۴-۱-۱ قضیه (میلنر): برای $p=2$، فرض کنید $\xi_n \in \mathfrak{A}^*_{2^n-1}$ دوگان پایه جبر استینراد باشد.

$$\xi_n = (Sq^{2^{n-1}} Sq^{2^{n-2}} \dots Sq^2 Sq^1)^*$$

برای p فرد فرض کنید $\xi_n \in \mathfrak{A}^*_{2(p^n-1)}$ و $\tau_n \in \mathfrak{A}^*_{2p^n-1}$ نیز دوگان پایه جبر استینراد به پیمانه p باشند.

$$\xi_n = (P^{p^{n-1}} P^{p^{n-2}} \dots P^p P)^*$$

$$\tau_n = (P^{p^{n-1}} P^{p^{n-2}} \dots P^p P \beta)^*$$

پس برای $p=2$ ساختار دوگان جبر استینراد به صورت

$$\mathfrak{A}^* = \mathbb{Z}_2[\xi_1, \dots, \xi_n, \dots]$$

و برای p عدد اول فرد

$$\mathfrak{A}^* = \mathbb{Z}_p[\xi_1, \dots, \xi_n, \dots] \otimes \Lambda(\tau_0, \dots, \tau_n, \dots)$$

است. فرض می‌کنیم $\xi_0 = 1$ و پاد ضرب در این جبر هوف به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi(\xi_n) = \sum_{k=0}^{n} \xi_{n-k}^{p^k} \otimes \xi_k \qquad \text{برای هر } p$$

$$\psi(\tau_n) = \tau_n \otimes 1 + \sum_{k=0}^{n} \xi_{n-k}^{p^k} \otimes \tau_k. \qquad \text{برای هر } p \text{ فرد} \qquad \blacksquare$$

فرض کنید $R = (r_1, r_2, \dots)$ دنباله از اعداد صحیح نامنفی باشد که به غیر از متناهی تا بقیه صفر هستند. تعریف می‌کنیم $\xi(R) = \xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\dots$ و $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ دنباله‌ای از ۰ و ۱ باشند که به غیر از متناهی تا بقیه صفر هستند. تعریف می‌کنیم $\tau(E) = \tau_0^{\varepsilon_0}\tau_1^{\varepsilon_1}\dots$ در این صورت بنابر قضیه قبل $\{\tau(E)\xi(R)\}$ پایه جمعی برای $\mathfrak{A}^*$ تشکیل می‌دهد.

۴-۱-۲ قضیه (میلنر): اعضای

$$Q_0^{\varepsilon_0} Q_1^{\varepsilon_1} \dots P^R$$

که Q_i دوگان τ_i و P^R دوگان $\xi(R)$ $((R = (r_1, r_2, \dots))$ است. پایهٔ جمعی برای $\mathfrak{A}$ تشکیل می‌دهد. $Q_k \in \mathfrak{A}_{2p^k-1}$ و جبر خارجی[1] تشکیل می‌دهند.

$$Q_j Q_k + Q_k Q_j = 0$$

و همچنین با P^R با توجه به قاعده زیر جابه‌جا می‌شوند:

$$P^R Q_k - Q_k P^R = Q_{k+1} P^{R-(p^k, 0, \dots)} + Q_{k+2} P^{R-(0, p^k, 0, \dots)} + \dots . \qquad \blacksquare$$

۴-۱-۳ لم: (a) $H_*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\{1, e_1, \dots, e_k, \dots\}$ و مؤلفهٔ $\psi(e_k)$ که در

$$\mathfrak{A}^*_{k-1} \otimes H_1(\mathbb{R}P^\infty, , \mathbb{Z}_2)$$

قرار می‌گیرد برابر است با

$$\begin{cases} \xi_n \otimes e_1 & k = 2^n \text{ اگر } \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(b) اگر p اول باشد، داریم $H_*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p\{1, a_1, \dots, a_k, \dots\}$. یاد عمل $\mathfrak{A}^*$ روی $H_*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_p)$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\psi(H_*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_2)) \subset \mathbb{Z}_2[\xi_1^2, \dots, \xi_k^2, \dots] \otimes H_*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$$

$$\psi(H_*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_2)) \subset \mathbb{Z}_2[\xi_1, \dots, \xi_k, \dots] \otimes H_*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_p)$$

1) exterior algebra

و مؤلفهٔ $\psi(a_k)$ در $\mathfrak{A}^*_{k-2}\otimes H_2(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}_2)$ برابر است با:

$$\begin{cases} \xi_n^2\otimes a_1 & \text{اگر } p=2 \text{ و } k=2^n \\ \xi_n\otimes a_1 & \text{اگر } p \text{ فرد و } k=p^n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اثبات: ما قسمت (a) را ثابت می‌کنیم قسمت (b) کاملاً مشابه به دست می‌آید. می‌دانیم $H^*(\mathbb{R}P^\infty,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[w_1]$ و e_k در قسمت (a) در واقع $(w_1^k)^*$ است. توجه کنید

$$Sq^{2^{n-1}}Sq^{2^{n-2}}\dots Sq^2Sq^1(w_1)=w_1^{2^n}$$

همچنین اگر $Sq^I(w_1)=w_1^k$، با استقراء روی $k\geq 2$ نشان می‌دهیم $k=2^n$ و $I=(2^{n-1},2^{n-2},\dots,2,1)$. برای $k=2$ حکم بدیهی است.

فرض کنید حکم برای $k-1$ درست باشد اگر $Sq^I(w_1)=w_1^k$. پس $Sq^I=Sq^JSq^1$ و $Sq^J(w_1^2)=(w_1)^k$. در نتیجه $k=2k'$ و $J=2J'$ که $Sq^{J'}(w_1)=(w_1)^{k'}$. با فرض استقراء k' توانی از ۲ است، فرض کنید $k'=2^m$ و $J'=(2^{m-1},\dots,2,1)$. در نتیجه $k=2^{m+1}$ و $I=(2^m,\dots,2,1)$

. نهایتاً مؤلفهٔ $\psi(e_k)$ در $\mathfrak{A}^*_{k-1}\otimes H_1(\mathbb{R}P^\infty,\mathbb{Z}_2)$ برابر صفر است اگر k توانی از ۲ نباشد و برابر

$$(Sq^{2^{n-1}}\dots Sq^2Sq^1)^*\otimes e_1=\xi_n\otimes e_1$$

است وقتی $k=2^n$.■

۴-۱-۴ تعریف: فرض کنید H جبر هوف روی حلقه جابه‌جایی k باشد و C یک پاد مدول روی H باشد. عضو $x\in C$ را ابتدایی[1] می‌گویند اگر

$$\psi(x)=1\otimes x$$

همه اعضای ابتدایی C را با PC نشان می‌دهیم.

1) primitive

۴-۱-۵ قضیه: (a) به عنوان $\mathbb{Z}_۲$ـ جبر و پاد مدول روی جبر استینراد $\mathfrak{A}^*$ داریم:

$$H_*(MO, \mathbb{Z}_۲) \cong \mathfrak{A}^* \otimes PH_*(MO, \mathbb{Z}_۲)$$

اعضای $x_k \in H_k(MO, \mathbb{Z}_۲)$ وجود دارد به طوری که

$$PH_*(MO, \mathbb{Z}_۲) = \mathbb{Z}_۲[x_k | k \geq ۲, k \neq ۲^t - ۱]$$

(b) اگر p عدد اول باشد. به عنوان $\mathbb{Z}_p$ـ جبر و پاد مدول روی جبر استینراد روی $\mathfrak{A}_p^*$ داریم:

$$H_*(MU, \mathbb{Z}_۲) = \mathbb{Z}_۲[\xi_۱^۲, \ldots, \xi_n^۲, \ldots] \otimes PH_*(MU, \mathbb{Z}_۲)$$

$$H_*(MU, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\xi_۱, \ldots, \xi_n, \ldots] \otimes PH_*(MU, \mathbb{Z}_p) \qquad \text{اول فرد } p$$

برای p، وجود دارد $y_k \in H_{۲k}(MU, \mathbb{Z}_p)$ به طوری که

$$PH_*(MU, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[y_k | k \geq ۱, k \neq p^t - ۱]$$

اثبات: مانند قبل (a) را ثابت می‌کنیم. اثبات (b) کاملاً مشابه است. با استفاده از یکریختی توم داریم:

$$\Phi_n : H_*(BO(n), \mathbb{Z}_۲) \cong H_{*+n}(MO(n), \mathbb{Z}_۲)$$

در نتیجه با استفاده از لم قبل و ساختار $H_*(BO(n), \mathbb{Z}_۲)$، نتیجه می‌شود $\tilde{H}_*(MO(n), \mathbb{Z}_۲)$، پایه‌ای روی $\mathbb{Z}_۲$ از مولدهای $\Phi_n(e_{k_۱} \ldots e_{k_t})$ برای $n \geq t$ دارد. با استفاده از طبیعی بودن نگاشت توم نمودار جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc}
H_{q-m}(BO(m), \mathbb{Z}_۲) \otimes H_{r-n}(BO(n), \mathbb{Z}_۲) & \xrightarrow{\Phi_m \otimes \Phi_n} & \tilde{H}_q(MO(m), \mathbb{Z}_۲) \otimes \tilde{H}_r(MO(n), \mathbb{Z}_۲) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{q+r-m-n}(BO(m) \times BO(n), \mathbb{Z}_۲) & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{H}_{q+r}(MO(m) \wedge MO(n), \mathbb{Z}_۲) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{q+r-m-n}(BO(m+n), \mathbb{Z}_۲) & \xrightarrow{\Phi_{m+n}} & \tilde{H}_{q+r}(MO(m+n), \mathbb{Z}_۲)
\end{array}$$

در نتیجه اگر $s \leq m$ و $t \leq n$ پس

$$\Phi_m(e_{h_1}\dots e_{h_s})\Phi_n(e_{k_1}\dots e_{k_t}) = \Phi_{m+n}(e_{h_1}\dots e_{h_s}e_{k_1}\dots e_{k_t})$$

و در نتیجه

$$\Phi_n(e_{k_1}\dots e_{k_t}) = \Phi_1(e_{k_1})\dots\Phi_1(e_{k_t})$$

$$H_*(MO,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\Phi_1(e_1),\dots,\Phi_1(e_n),\dots]$$

فرض کنید

$$S = \mathbb{Z}_2[x_k | k \geq 2 \quad \text{و}\quad k+1 \text{ توانی از ۲ نباشد}]$$

یک $\mathfrak{A}^*$ـ پاد مدول باشد که $\deg x_k = k$ و همه اعضای S ابتدایی باشند. نگاشت $f : H_*(MO,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow S$ که همرختی بین $\mathbb{Z}_2$ جبرها باشد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(\Phi_1(e_k)) = \begin{cases} x_k & k+1 \text{ اگر } \text{ توانی از ۲ باشد} \\ \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال همریختی بین جبر $H_*(MO,\mathbb{Z}_2)$ و $\mathfrak{A}^*\otimes S$ را که در زیر تعریف می‌کنیم را در نظر بگیرید:

$$\gamma : H_*(MO,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{A}^*\otimes H_*(MO,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{1\otimes f} \mathfrak{A}^*\otimes S$$

هر سه این جبرها $\mathfrak{A}^*$ـ پاد مدول هستند γ نیز نگاشتی است که ساختار $\mathfrak{A}^*$ ـ پاد مدول را حفظ می‌کند. توجه کنید که دامنه و برد γ جبر چندجمله‌ای روی $\mathbb{Z}_2$ هستند که در هر بعد مثبت یک مولد دارد. در نتیجه اگر هر مولد تحت γ به عضوی تجزیه‌ناپذیر در $\mathfrak{A}^*\otimes S$ برده شود، γ یکریختی خواهد بود. می‌دانیم $MO(1) = \mathbb{R}P^\infty$ و $\Phi(e_r) = e_{r+1}$. از لم قبل نتیجه می‌شود:

$$\psi(\Phi_1(e_{2^n-1})) = \psi(e_{2^n}) = \xi_n\otimes e_1 + \dots = \xi_n\otimes\Phi_1(1) + \dots$$

پس، (به پیمانه تجزیه‌پذیرها) $\gamma(\Phi_1(e_{2^n-1})) \equiv \xi_n\otimes 1$. اگر $k+1$ توانی از ۲ نباشد در این صورت داریم:

$$\psi(\Phi_1(e_k)) = 1\otimes\Phi_1(e_k) + \dots$$

پس در نتیجه (به پیمانه تجزیه‌پذیرها) $\gamma(\Phi_1(e_k)) \equiv x_k$. ■

۲-۴ دنباله طیفی آدامز[1]

چون در بخش بعد از دنبالهٔ طیفی آدامز استفاده خواهیم کرد در این بخش به معرفی آن خواهیم پرداخت برای دیدن اثبات می‌توانید کتاب دنباله طیفی نوشته آلِن هچر مراجعه کنید.

فرض کنید X و Y دو CWـ مجتمع متناهی با یک نقطهٔ پایه ثابت باشند. در این صورت $H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ یک $\mathfrak{A}$ـ مدول چپ مدرج است. سوسپانسیون mـ لایه S^mX از $X \times I^m$ با انقباض $(X \times \partial I^m) \cup (x_0 \times I^m)$ به دست می‌آید که x_0 نقطهء پایه X است. گروه پایدار $\{X,Y\}_n$ را حد مستقیم گروه کلاس‌های هموتوپی نگاشت $S^{m+n}X \longrightarrow S^mY$ تعریف می‌کنیم.

۱-۲-۴ قضیه (آدامز): دنبالهٔ طیفی $\{E_r^{s,t}, d_r\}$ از فضای X و Y به پیمانه p به دست می‌آید به طوری که:

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{s,t}(H^*(Y,\mathbb{Z}_p), H^*(X,\mathbb{Z}_p))$$

به طوری که

$$E_\infty^{s,t} = \frac{B^{s,t}}{B^{s+1,t+1}}$$

که $\{X,Y\}_n = B^{1,n} \supset B^{1,n} \supset B^{r,n+2} \supset \ldots$ یک پالایش[2] مشخص از گروه پایدار است. تقاطع $\bigcap_s B^{s,n+s}$ برابر زیرگروهی از $\{X,Y\}_n$ که شامل مرتبه متناهی و اول نسبت به p است. هر E_{r+1} از همانستگی E_r با مشتق

$$d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+r,t+r-1}$$

و E_∞ در واقع حد E_r است وقی $r \longrightarrow \infty$.

تابعگون $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{s,t}$ این طور به دست می‌آید که فرض کنید N, M، $\mathfrak{A}$ـ مدول مدرج باشند، قرار دهید $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}^t(M,N) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{0,t}(M,N)$ گروه همریختی از M به N با درجه $-t$ باشد. برای M یک تجزیه

1) The spectral sequence of Adams 2) Filtration

پروژکتیو[1] در نظر بگیرید:

$$\dots \longrightarrow P_۲ \xrightarrow{d} P_۱ \xrightarrow{d} P_۰ \longrightarrow M \longrightarrow ۰$$

در بالا $\mathfrak{A}$ـ همریختی d درجه صفر است. $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathfrak{A}}(M,N)$ گروه پادهمانستگی دنباله زیر است:

$$\mathrm{Hom}^t_{\mathfrak{A}}(P_{s-۱},N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}^t_{\mathfrak{A}}(P_s,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}^t_{\mathfrak{A}}(P_{s+t},N)$$

در دنباله طیفی آدامز $E^{s,t}_۱ = \mathrm{Hom}^t_{\mathfrak{A}}(P_s,N)$. در حالتی که $X = S^۰$ (کره صفر بعدی) گروه پایدار $\{S^۰, Y\}_n$ همان گروه پایدار هموتوپی Y است. به جای Y می‌توان شی پایداری به اسم طایفه[2] را جایگزین کرد. مفهوم طایفه اولین بار توسط لیما[3] تعریف شد و دنباله از CWـ مجتمع‌ها است. $\mathbf{Y} = (Y_۱, Y_۲, \dots)$ که سوسپانسیون SY_i زیرمجتمع $Y_{i+۱}$ است و در واقع نشاندن $SY_i \subset Y_{i+۱}$ به همراه دنباله $\mathbf{Y}$ داده شده است.

مثال: هر مجتمع متناهی Y را می‌توان به عنوان طایفه $\mathbf{Y}$ نگاه کرد:

$$\mathbf{Y} = (Y, SY, S^۲Y, \dots)$$

همچنین فضای توم $MSO(n)$ به طور طبیعی در $MSO(n+۱)$ نشسته است.

$$\mathbf{M}SO = (\text{نقطه پایدار}, MSO(۱), MSO(۲), \dots)$$

طایفه توم است که طبق قضیه توم $\{S^۰, \mathbf{M}SO\}_n = \Omega^n$. و در حالت مختلط

$$\mathbf{M}U = (\text{نقطه پایه و نقطه پایه}, M(U(۱)), SM(۱), MU(۲), SMU(۲), \dots)$$

در بخش بعد ساختار هموتوپی $\mathbf{M}U$ که توسط میلنر مشخص شد را عنوان خواهیم کرد.

۴-۳ ساختار هموتوپی طایفه توم

در این بخش ما با استفاده از دنباله طیفی آدامز ساختار هموتوپی $\mathbf{M}O$ و $\mathbf{M}U$ و در نتیجه حلقه $\mathfrak{N}_*$ و Ω^U_* را محاسبه می‌کنیم. با کمی جبر همانستگی[4] شروع می‌کنیم. در محاسبه $E_۲$ دنباله طیفی آدامز در واقع دوبار دوگان

1) Projective resolution 2) Spectra 3) Lima 4) Homological algebra

گرفتن لازم است. اول حلقه $H_*(X,\mathbb{Z}_p)$ و $H_*(Y,\mathbb{Z}_p)$ (توجه کنید در اینجا X و Y طایفه هستند و در نتیجه همانستگی آنها حلقه هستند) بعد دوگان آن را محاسبه می‌کنیم تا پادهمانستگی حاصل آید.

$$H^*(X,\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}(H_*(X,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$$

$$H^*(Y,\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}(H_*(Y,\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$$

فرض کنید $\mathfrak{F}$ یک $\mathfrak{A}$ـ تجزیه از $H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ باشد. دوباره دوگان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}(H^*(X,\mathbb{Z}_p),H^*(Y,\mathbb{Z}_p)) = H_*[\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F},H^*(Y,\mathbb{Z}_p))]$$

برای این که از چند بار دوگان گرفتن راحت شویم مفاهیم ضرب پادتنسور[1]، پاد تجزیه[2] و پادتاب[3] را تعریف می‌کنیم. فرض کنید A پادجبر روی میدان k باشد. نماد $\otimes$ یعنی ضرب تانسوری روی میدان k و V^*، دوگان V روی میدان k یعنی $\mathrm{Hom}_k(V,k)$ که V میدان برداری است. اگر M یک راست Aـ پادمدول و N یک چپ Aـ پادمدول باشد، پادتنسور N, M روی A را تعریف می‌کنیم:

$$M\Box_A N = kernel(\psi\otimes ۱ - ۱\otimes\psi) : M\otimes N \longrightarrow M\otimes A\otimes N$$

اگر N, M از نوع متناهی باشند، A^*، k جبر و M^* یک راست A^*ـ مدول و N^* یک چپ A^*ـ مدول است.

$$(M\Box_A N)^* \cong M^*\otimes_{A^*} N^*$$

نگاشت $\psi : M \longrightarrow M\otimes A$ و $\psi : N \longrightarrow A\otimes N$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$M \cong M\Box_A A, \qquad N \cong A\Box_A N$$

تعریف پادتجزیه و cotor دوگان تجزیه Tor هستند.

1) contensor product 2) coresolution 3) cotor

۴-۳-۱ تعریف: اگر A یک پاد جبر روی میدان k باشد و M یک Aـ پادمدول راست باشد. Aـ پادتجزیه آزاد از M شامل دنباله دقیق کوتاه از Aـ پادمدول‌های راست

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} F_\circ \longrightarrow K_\backslash \longrightarrow \circ$$

$$\circ \longrightarrow K_n \xrightarrow{\eta_n} F_n \longrightarrow K_{n+\backslash} \longrightarrow \circ$$

برای $n \leq ۱$، F_n جمع مستقیم تعداد مشخصی از A است. از چسباندن دنباله‌های بالا با دنباله دقیق بلند از Aـ پادمدول‌ها به دست می‌آوریم:

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow F_\circ \longrightarrow F_\backslash \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\delta} F_{n+\backslash} \longrightarrow \ldots$$

اگر N، Aـ پاد مدول چپ باشد تعریف می‌کنیم:

$$Cotor_A(M,N) = H_*(F\Box_A N)$$

که در واقع همولوژی نسبت به مشتق $\delta\Box_A ۱$ است. اگر M یک جبر و F_* یک kـ جبر همراه مشتق باشد. همچنین η یک همریختی بین جبرها باشد، روی $Cotor_A^*(M,K)$ ساختار kـ جبر القا می‌شود.

۴-۳-۲ لم: اگر F_*، Aـ پادتجزیه آزاد از M و A و M از نوع متناهی باشد. در این صورت

$$Cotor_A(M,K) \cong \mathrm{Ext}_{A^*}(M^*,K)$$

اثبات: چون A و M از نوع متناهی است، می‌توانیم Aـ پادتجزیه آزاد F_* از نوع متناهی برای M در نظر بگیریم. چون دوگانی یک تابعگون دقیق است. F^* یک A^*ـ تجزیه برای M^* است. پس

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_{A^*}(M^*,K) &= H_*(\mathrm{Hom}_{A^*}(F^*,K)) \\
&= H_*(\mathrm{Hom}_{A^*}(F^*,\mathrm{Hom}_{A^*}(F^*,\mathrm{Hom}_{A^*}(F^*,\mathrm{Hom}_k(k,k))] \\
&\cong H_*(\mathrm{Hom}_k(F^* \otimes_{A^*} k,k)] \cong H_*[(F\Box_A k)^{**}] \\
&\cong H_*[F\Box_A k] = Cotor_A(M,k).\blacksquare
\end{aligned}$$

از این لم استفاده می‌کنیم تا $E_۲$ـ دنباله طیفی آدامز را برحسب Cotor بیان کنیم.

۴-۳-۳ نتیجه: اگر p عدد اول و X طیف باشد که $H_*(X, \mathbb{Z}_p)$ از نوع متناهی باشد. مؤلفه E_r در دنباله طیفی آدامز به پیمانه p برای $\pi_* X$ برابر است با:

$$E_{۲}^{s,t} = Cotor^{s,t}_{\mathfrak{A}^*}(H_*(X, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$$

فرض‌کنید A یک جبر هوف همبند باشد که روی میدان k در نظرگرفته‌ایم، B زیرجبر هوف A و B^+ عناصر با درجه مثبت باشد. اگر $AB^+ = B^+A$ می‌گوییم B زیرجبر هوف نرمال است و می‌نویسیم $B \lhd A$. در این صورت ساختار جبرهوف A روی Aـ مدول زیر نیز ساختار جبر هوف القا می‌کند.

$$A//B = \frac{A^*}{AB^+} \cong k \otimes_B A$$

توجه کنید اگر A جابه‌جایی باشد هر زیرجبر هوف از A نرمال است. فرض کنید $\pi : A \longrightarrow A//B$ نگاشت تصویر باشد.

$$\psi' : A \xrightarrow{\psi} A \otimes A \xrightarrow{\pi \otimes ۱} A//B \otimes A$$

نگاشت بالا ساختار $A//B$ـ پاد مدول روی A القا می‌کند.

$$K \square_{A//B} A = kernel[\psi' - ۱ \otimes ۱_A : A \longrightarrow A//B \otimes B] \cong B$$

لم زیر در محاسبه مؤلفهٔ $E_۲$ در دنباله طیفی آدامز بسیار مفید است.

۴-۳-۴ لم (تغییر حلقه، لیولویسیوس[1]): اگر A جبر هوف روی میدان k، B زیرجبر هوف نرمال از A باشد.

$$Cotor_A(B, k) \cong Cotor_{A//B}(k, k)$$

1) Liulevicius

اثبات: قرار دهید $F = F'\otimes A//B$ یک $A//B$ـ پاد تجزیه از میدان k باشد. در نتیجه $F'\otimes A \cong F\square_{A//B}A$، Aـ پادتجزیه آزاد از $B \cong K\square_{A//B}A$ است. پس:

$$Cotor_{A//B}(k,k) = H_*[F\square_{A//B}k] = H_*[(F'\otimes A//B)\square_{A//B}k]$$
$$\cong H_*[F'\otimes k] \cong H_*[(F'\otimes A)\square_A k]$$
$$\cong H_*[(F\square_{A//B}A)\square_A k] = Cotor_A(B,k).\blacksquare$$

ساده‌ترین پاد جبر نابدیهی، C، که می‌توان $Cotor_C(k,k)$ را حساب کرد، جبر خارجی است که مولدش ابتدایی باشد. در این حالت Cotor جبر چندجمله‌ای است.

۴-۳-۵ لم: فرض کنید k میدان و I دنباله از اعداد طبیعی باشد. همچنین فرض کنید E جبر خارجی روی k که ساختار جبر هوف نیز دارد و با اعضای ابتدایی x_i نیز تولید می‌شوند.

$$E = \Lambda(x_i \mid i\in I)$$

فرض کنید اگر $i<j$ در این صورت $\deg x_j \geq \deg x_i$ و از هر درجه تعداد متناهی از x_iها باشد. پس:

$$Cotor_E(k,k) = k[y_i|i\in I]$$

اثبات: جبر F همراه مشتق که Eـ پادتجزیه از k را این طور تعریف می‌کنیم:

$$F = F_I\otimes E_I = k[y_i|i\in I]\otimes E$$

و d مشتق باشد که روی مولدها این طور تعریف می‌شود:

$$d(x_i) = y_i, \qquad d(y_i) = ۰$$

d نگاشت Eـ پادمدول است و $d\circ d = ۰$. $\epsilon : F \longrightarrow k$ نگاشت افزایش[1] که همریختی جبری است و $\epsilon(x_i) = \epsilon(y_i) = ۰$ برای هر i. فرض کنید $I = (i_۱,\ldots,i_n,\ldots)$ و I_n برش I از اندیس nام باشد. تعریف

1) augmentation map

می‌کنیم $s_n : F_{I_n} \longrightarrow F_{I_n}$ هموتوپی زنجیری[1] باشد که با استقراء روی $n \geq ۱$ طوری تعریف می‌کنیم که $ds_n + s_n d = ۱ - \epsilon_n$ که $\epsilon_n = \epsilon|_{F_{I_n}}$. اگر $E = \Lambda(x_{i_۱})$ تعریف می‌کنیم $s_۱(p(y_{i_۱})x_{i_۱}) = ۰$ و

$$s_۱(p(y_{i_۱})) = x_{i_۱}\left(\frac{p(y_{i_۱}) - p(۰)}{y_{i_۱}}\right)$$

در این صورت $s_۱ d + ds_۱ = ۱ - \epsilon_۱$. برای $n \geq ۲$ فرض کنید $s_{n-۱}$ تعریف شده باشد. فرض کنید s' هموتوپی از ۱ به ϵ' روی $k[y_n] \otimes \Lambda(x_n)$ باشد که در بالا تعریف شد. تعریف می‌کنیم:

$$s_n = s_{n-۱} \otimes ۱ + \epsilon_{n-۱} \otimes s'$$

روشن که $ds_n + s_n d = ۱ - \epsilon_{n-۱} \otimes \epsilon' = ۱ - \epsilon_n$. برای n به قدر کافی بزرگ داریم $F^k = F^k_{I_n}$ و تعریف می‌کنیم $s : F \longrightarrow F$ که $s|_{F^k} = s_n$. $ds + sd = ۱ - \epsilon$ و F یک پادتجزیه از k است.

$$Cotor_E(k,k) = H_*[F \Box_E k] = H_*(k[y_i | i \in I] \otimes E) \Box_E k]$$

$$\cong H_*[k(y_i | i \in I] \otimes k] \cong k[y_i | i \in I]. \blacksquare$$

حال می‌توانیم از همه این ابزار استفاده کنیم تا هموتوپی طایفه توم را حساب کنیم. از ساده‌ترین حالت شروع می‌کنیم. یعنی $\mathbf{M}O$.

۴-۳-۶ قضیه (توم): مولدهای $x_n \in \mathfrak{N}_n$ برای $n \neq ۲^t - ۱$ به طوری که حلقه بردیسم بدون جهت خمینه‌ها برابر:

$$\mathfrak{N}_* = \mathbb{Z}_۲[x_n | n \geq ۲, n \neq ۲^t - ۱]$$

اثبات: می‌دانیم $\mathfrak{N}_*$ یک $\mathbb{Z}_۲$ـ جبر است و با توجه به قضیه توم می‌دانیم $\mathfrak{N}_* \cong \pi_*\mathbf{M}O$. در نتیجه دنباله طیفی آدامز به پیمانه ۲ برای $\pi_*\mathbf{M}O$ به $\mathfrak{N}_*$ میل می‌کند. با توجه به قضایای بخش اول این فصل می‌دانیم $H_*(MO, \mathbb{Z}_۲) = \mathfrak{A}^* \otimes S$ که

$$S = \mathbb{Z}_۲[x_n | n \geq ۲, n \neq ۲^t - ۱]$$

1) chain homotopy

جبر چندجمله‌ای با مولدهای ابتدایی روی $\mathfrak{A}^*$ است. پس

$$E_2 = Cotor_{\mathfrak{A}^*}(H_*(\mathbf{M}O, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$$
$$\cong Cotor_{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{A}^*, \mathbb{Z}_2) \otimes S \cong S$$

که در بالا همه درجات همولوژیک صفر است، در نتیجه دنباله طیفی آدامز فرو می‌ریزد[1] یعنی مشتق‌ها صفر می‌شود:

$$\mathfrak{N}_* = E_2^{0,*} = S. \quad \blacksquare$$

۴-۳-۷ قضیه (میلنر): وجود دارد $y_n \in \Omega^U_{2n}$ برای $n \geq 1$ که:

$$\Omega^U_* = \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n, \ldots]$$

اثبات: می‌دانیم براساس قضیه‌های توم $\Omega^U_* \cong \pi_*(MU)$. برای عدد p اول، دنباله طیفی آدامز به پیمانه p را برای $\pi_*(MU)$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌های بخش اول می‌دانیم، $H_*(MU, \mathbb{Z}_p) = \mathfrak{A}' \otimes S_p$ که:

$$\mathfrak{A}' = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2, \ldots] & p = 2 \text{ اگر } \\ \mathbb{Z}_p[\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots] & \text{اگر } p \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

و

$$S_p = \mathbb{Z}_p[Y_n | n \geq 1, n \neq p^t - 1]$$

جبر اعضای $\mathfrak{A}^*$ـ ابتدایی است که $\deg Y_n = 2n$. با تغییر حلقه داریم:

$$Cotor_{\mathfrak{A}^*}(H_*(MU, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p) \cong Cotor_{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{A}' \otimes S_p, \mathbb{Z}_p)$$
$$\cong Cotor_{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{A}', \mathbb{Z}_p) \otimes S_p$$
$$\cong Cotor_{\mathfrak{A}^*//\mathfrak{A}'}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \otimes S_p$$

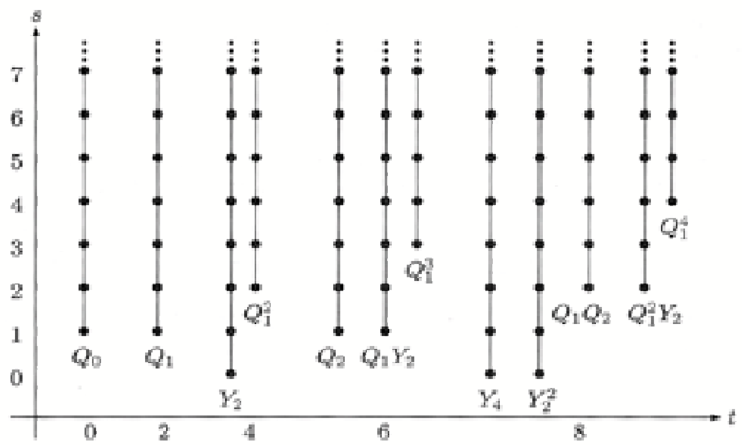
1) Collapse

توجه کنید که:

$$\mathfrak{A}^*//\mathfrak{A}' \cong \begin{cases} \Lambda(\xi_۱, \dots, \xi_n, \dots) & p = ۲ \text{ اگر } \\ \Lambda(\tau_۰, \tau_۱, \dots, \tau_n, \dots) & \text{ اگر } p \text{ اول باشد} \end{cases}$$

که $\deg \xi_n = ۲^n - ۱$ اگر $p = ۲$ و $\deg \tau_n = ۲p^n - ۱$ اگر p فرد باشد. در نتیجه برای هر p اول با توجه به لم‌های قبل داریم:

$$E_۲ = Cotor_{\mathfrak{A}^*}(H_*(MU, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$$
$$\cong \mathbb{Z}_p[Q_۰, \dots, Q_n, \dots] \otimes \mathbb{Z}_p[Y_n | n \geq, n \neq p^t - ۱]$$



شکل. دنبالهٔ طیفی آدامز برای $\pi_*(MU)$ برای $p = ۲$

خطوط عمودی شکل در واقع ضرب در $Q_۰$ است. چون $E_۲$ در درجه فردها صفر است در نتیجه همه مشتقات صفر هستند. و در نتیجه $E_۲ = E_\infty$. چون $(\Omega_*^U)_p$ گروه آبلی آزاد است و همچنین Ω_*^U آبلی از نوع متناهی است پس Ω_*^U نیز آبلی آزاد است. فرض کنید $I\Omega_*^U$ اعضایی از Ω_*^U از درجه مثبت باشند. از دنباله طیفی آدامز داریم

$$Q\Omega_*^U = I\Omega_*^U / (I\Omega_*^U)^۲ \quad \text{(اعضای تجزیه‌ناپذیر)}$$

یک گروه آبلی آزاد مدرج می‌سازند که در هر درجه زوج یک مولد دارد. فرض کنید $y_n \in \Omega^U_{2n}$ مولد $Q\Omega^U_{2n}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\alpha : M = \mathbb{Z}[y'_1, \dots, y'_n, \dots] \longrightarrow \Omega^U_*$$

همریختی جبری باشد، طوری که $\alpha(y_n) = y'_n$ برای $n \geq 1$. برای هر p می‌توانیم ساختار جبر M فیلتر کرده، این طور که y'_n در فیلتریشن صفر قرار دارد اگر $n \neq p^t - 1$ برای هر $t \geq 1$، در فیلتریشن یک قرار دارد اگر $n = p^t - 1$. در نتیجه $E_0\alpha : E_0 M \longrightarrow E_\infty$ که توسط α روی مدول مدرج نسبت داده شده[1] القا شده است، یکریختی است. پس α ۱ـ۱ است. چون $\Omega^U_0 = \mathbb{Z}$ پس برای $n = 0$، α پوشا است. فرض کنید Ω^U_t که $t \leq 2n$ در $\operatorname{Im}\alpha$ باشد. اگر $x \in \Omega^U_{2n}$. فرض کنید x روی k برابر مولد $Q\Omega^U_{2n}$ تصویر شود. پس $x - ky_n \in (I\Omega^U_*)^2$ در تصویر α طبق استقراء قرار دارد. اگر $x - ky_n = \alpha(w)$ در این صورت $x = \alpha(ky'_n + w)$ پس α پوشا نیز هست، در نتیجه یکریختی است.■

۴-۴ عدم وجود تاب مرتبه فرد در Ω^{SO}_*

در این بخش قضیه میلنر درباره عدم وجود تاب فرد در بردیسم جهت‌دار را ثابت خواهیم کرد که در فصل قبل در اثبات وال[2] از این قضیه برای عدم وجود تاب مرتبه‌ها در Ω^{SO}_* استفاده کردیم. ابتدا حکمی از میلنر ـ مور[3] در مورد جبرهوف ثابت خواهیم کرد.

۴-۴-۱ قضیه: اگر A جبر هوف همبند روی میدان k باشد، $\mathbb{C}$ پادجبر همبند روی A باشد و v پاد واحد C باشد. $p : C \longrightarrow GC$ نگاشت طبیعی به عناصر تجزیه‌ناپذیر باشد و $\lambda : GC \longrightarrow C$ یک kـ همریختی است که $p\lambda = 1_{GC}$. فرض کنید B_m زیرفضای $A \otimes GC$ باشد که توسط همه اعضای $a \otimes x$ که $|a| \leq m$. اگر نگاشت $v : A \longrightarrow C$، $v(a) = av$، برای $|a| \leq m$ یک به یک باشد. در اینصورت Aـ همریختی $\eta : A \otimes GC \longrightarrow C$، $\eta(a \otimes x) = a(\lambda x)$ روی B_m یک به یک است. به علاوه، η پوشا است و در نتیجه در بعد کمتر مساوی m یکریختی است.

1) associated graded module 2) Wall 3) Milnor-Moore

اثبات: ترکیب Aـ همریختی‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$A \otimes GC \xrightarrow{\eta} C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{1 \otimes p} C \otimes GC$$

برای هر $y, x \in C$ و برای هر $a \in A$ (که $\Delta(A) = \sum a' \otimes a''$) داریم:

$$(1 \otimes p)(a.(y \otimes x)) = (1 \otimes p)(\sum a'y \otimes a''x) = (1 \otimes p)(ay \otimes x)$$
$$= ay \otimes p(x)$$

(فرض کنید . نشان دهنده عمل A روی $C \otimes C$ باشد) چون $p(a''x) = 0$ برای $|a''| > 0$

$$(1 \otimes p)\Delta\eta(a \otimes x) = (1 \otimes p)a.(\Delta(\lambda x))$$
$$= (1 \otimes p)a.(v \otimes \lambda x + \lambda x \otimes v + \sum(\lambda x)' \otimes (\lambda x)'')$$
$$= av \otimes x + b$$

که $b \in \bigcup_{k<|x|} C \otimes (GC)_k$. چون $av \neq 0$ برای $|a| \leq m$ نتیجه می‌گیریم $av \otimes x + b \neq 0$. پس $(1 \otimes p)\Delta\eta$ روی B_m یک به یک است، در نتیجه η نیز همین طور است. برای این که ثابت کنیم η پوشا است، $\{e_j\}$ ، kـ پایه برای GC در نظر بگیرید و قرار دهید $c_i = \lambda e_i$. پس $c_i \in \operatorname{Im}\eta$. فرض کنید $c \in (C \operatorname{Im}\eta)$ عضو همگن از درجه مینیمال باشد. داریم $pc = \sum n_i e_i$ که $n_i \in k$. پس $p(c - \sum n_i c_i) = 0$ یعنی $c - \sum n_i c_i = \sum a_k x_k$، $a_k \in \bar{A}$ و $x_k \in C$. در نتیجه $\dim a_k > 0$ و $\dim x_k < \dim c$. پس $x_k \in \operatorname{Im}\eta$ و $c \in \operatorname{Im}\eta$.■

۴-۴-۲ نتیجه (میلنر ـ مور): A و C مانند قضیه قبل تعریف شده‌اند. اگر $v : A \longrightarrow C$ و $v(a) = av$، یک به یک باشد. در این صورت یکریختی بین Aـ مدول C و $A \otimes GC$ وجود دارد. مشخصاً C یک Aـ مدول آزاد است.

۴-۴-۳ نتیجه: دربارهٔ A و C مانند قبل تعریف شده‌اند. اگر $v(x) \neq 0$ برای هر عضو ابتدایی $x \in A$، $x \neq 0$ و نتیجه می‌گیریم c، Aـ مدول آزاد است.

حال از این احکام استفاده می‌کنیم تا ساختار $H^*(MSO,\mathbb{Z}_p)$ را شناسایی کنیم.

۴-۴-۴ قضیه (میلنر): $H^*(MSO,\mathbb{Z}_p)$ یک $\frac{\mathfrak{A}_p}{Q_0}$- مدول آزاد است.

اثبات: همریختی یکتای $\bar{\Delta}$ وجود دارد طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_p & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_0)} & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & \frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_0)}\otimes\frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_0)} \end{array}$$

نگاشت $\bar{\Delta}$، $\frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_0)}$ را ساختار جبر هوف مجهز می‌کند. علاوه بر این فضای اعضای ابتدایی این جبر هوف $\mathbb{Z}_p[P^{\Delta_i}|i=1,2,\dots]$ (که Δ_i دنباله است که در مؤلفهٔ iام ۱ و در بقیه جاها صفر است). همچنین ساختار جبر هوف دوگان $(\frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_0)})^*$ با توجه به بخش ۱ این فصل یکریخت با زیرجبر $\mathbb{Z}_p[\xi_1,\dots,\xi_n,\dots]$ از $\mathfrak{A}_p^*$ است. برای اثبات قضیه با توجه به نتیجه میلنر ـ مور کافی است. ثابت کنیم $P^{\Delta_i}(u)\neq 0$ که u کلاس توم در $H^*(MSO,\mathbb{Z}_p)$ است.

فرض کنید η کلاف برداری ۱ـ بعدی کانونی روی $\mathbb{C}P^\infty$ باشد. می‌دانیم فضای توم η نیز $\mathbb{C}P^\infty$ است. همچنین فرض کنید $x:=u_\eta$ مولد $H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$ باشد. با استقراء ثابت می‌کنیم $P^{\Delta_i}(x)=x^{p^i}$ (پس $P^{\Delta_i}(x)\neq 0$) و این نتیجه می‌دهد که $P^{\Delta_i}(u)\neq 0$ چون u خاصیت جهانی دارد. داریم $P^{\Delta_1}(x)=P^1(x)=x^p$. فرض کنید $P^{\Delta_n}(x)=x^{p^n}$ حال داریم:

$$\begin{aligned} P^{\Delta_{n+1}}(x) &= [P^{p^n},P^{\Delta_n}](x) = P^{p^n}P^{\Delta_n}(x)\pm P^{\Delta_n}P^{p^n}(x) \\ &= P^{p^n}(x^{p_n}) = x^{p^{n+1}} \end{aligned}$$

در نتیجه حکم ثابت شد.■

۵-۴-۴ قضیه (میلنر): اگر X یک طیف از نوع متناهی باشد که $H^*(X,\mathbb{Z}_p)$، $\frac{\mathfrak{A}}{(Q_0)}$ ـ مدول آزاد با مولدهای با درجه زوج باشد گروه هموتوپی X تاب مرتبه p ندارد.

اثبات: فرض کنید E_p، مجتمع سلول ۲ بعدی که از چسباندن سلول ۲ بعدی $e_۲$ به دایره $S^۱$ با نگاشت درجه p به دست می‌آید، باشد. پاد تاربندی[1] زیر به دست می‌آید:

$$S^۱ \longrightarrow E_p \longrightarrow S^۲$$

بعد از ضرب کوبشی[2] در X به دست می‌آوریم:

$$\pi_*(X) \xrightarrow{p} \pi_*(X) \xrightarrow{\rho} \pi_*(X \wedge E_p)$$

با توجه به قضیه هورویچ در مورد طایفه می‌دانیم همریختی $\pi_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(X,\mathbb{Z})$ به پیمانه تاب یکریختی است. ρ، $(\pi_*(X)/torsion) \otimes \mathbb{Z}_p \cong \tilde{H}_*(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$ را به طور یک به یک به فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$، $P_* \subset \pi_*(X \wedge E_p)$ می‌نگارد.

اگر ادعای قضیه بخواهد درست باشد می‌بایست $P_* = \pi_*(X \wedge E_p)$ یعنی می‌بایست نشان دهیم ρ پوشا است و $\pi_*(X \wedge E_p)$ فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ است. (چون در این صورت ضرب در p یک به یک خواهد بود و حکم ثابت می‌شود.) پس تلاش می‌کنیم ثابت کنیم $P_* = \pi_*(X \wedge E_p)$.

ادعا:

$$\tilde{H}^*(X \wedge E_p, \mathbb{Z}_p) \cong \tilde{H}^*(X, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Z}_p\{u, Q_۰ u\}$$

منظور از { } فضای برداری تولید شده توسط اعضای داخل آن است)، $\dim u = ۱$ و همچنین $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}}$- مدول آزاد است که $\mathfrak{F}$ ایده‌آل دو طرفه تولید شده توسط Q_i، $i > ۰$ است. اگر $\{x_\alpha\}$ پایه‌ای برای $\tilde{H}^*(X, \mathbb{Z}_p)$ به عنوان $\frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_۰)}$- مدول باشد، در این صورت $\{x_\alpha \otimes u\}$ پایه‌ای برای $\tilde{H}^*(X \wedge E_p, \mathbb{Z}_p)$ به عنوان $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}}$ - مدول خواهد بود.

برای اثبات ادعا، توجه کنید $\mathbb{Z}_p\{۱, u, Q_۰ u\} \cong H^*(E_p, \mathbb{Z}_p)$ و با توجه به فرمول کونت[3] $H^*(X \times E_p, X_{**}\mathbb{Z}_p)$ همان چیزی است که ادعا شده (* نقطه پایه‌ای است). $Q_۰(x \otimes u) = x \otimes Q_۰ u$، $P^R(x \otimes u) = P^R x \otimes u$، عمل جبر استینراد را مشخص می‌کند (R دنباله‌ای از اعداد طبیعی است). چون $Q_{k+۱} = P^{p^k} Q_k - Q_k P^{p^k}$ و $Q_۰$ با P^R در $\tilde{H}^*(X \wedge E_p, \mathbb{Z}_p)$ جابه‌جا می‌شود، پس $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}}$- مدول

1) cofibration 2) Smash product 3) Kunneth formula

است. پایه برای $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}}$ به صورت $Q_\circ^\varepsilon P^R$، $\varepsilon = \circ, ۱$، است و $\{P^R x_\alpha \otimes Q_\circ^\varepsilon u\}$ پایه‌ای روی $\mathbb{Z}_p$ برای گروه پادهمانستگی تشکیل می‌دهند.

برای دنباله $R = (r_۱, r_۲, \dots)$ قرار دهید $l(R) = \sum r_i$. فرض کنید V_s فضای برداری تولید شده توسط دنباله‌های R روی $\mathbb{Z}_p$ باشد که $l(R) = s$. تعریف می‌کنیم $M_s = \mathfrak{A}_p \otimes V_s$ و $d_s : M_s \longrightarrow M_{s-۱}$ یک $\mathfrak{A}_p$ همریختی از درجه $+۱$ است که:

$$d_s(۱ \otimes R) = \sum_{j=۱}^{\infty} Q_j \otimes (R - \Delta_j)$$

و $d_\circ : M_\circ \longrightarrow \frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}}$ را این طور تعریف می‌کنیم: $d_\circ(۱ \otimes (\circ, \circ, \dots)) = ۱$.

ادعا: دنباله

$$\dots \longrightarrow M_s \xrightarrow{d_s} M_{s-۱} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_\circ \xrightarrow{d_\circ} \frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}} \longrightarrow \circ$$

دقیق است.

برای اثبات این ادعا: فرض کنید B جبر خارجی[1] تولید شده توسط Q_i برای $i > \circ$ باشد. داریم:

$$\dots \longrightarrow B \otimes V_s \xrightarrow{d_s} B \otimes V_{s-۱} \longrightarrow \dots \longrightarrow B \otimes V_\circ \xrightarrow{d_\circ} \mathbb{Z}_p \longrightarrow \circ$$

که همریختی‌ها مانند قبل دقیق هستند و در نتیجه یک تجزیه از میدان $\mathbb{Z}_p$ با جبرهای خارجی به دست می‌آوریم. چون $\mathfrak{A}_p$ یک Bـ مدول آزاد است و $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}} \cong \mathfrak{A}_p \otimes_B \mathbb{Z}_p$. تنسورکردن در $\mathfrak{A}_p$ دنباله دقیق می‌دهد.

حال فرض کنید $\{x_\alpha\}$، $\alpha \in I$، یک پایه برای $\tilde{H}^*(X, \mathbb{Z}_p)$ به عنوان $\frac{\mathfrak{A}_p}{(Q_\circ)}$ ـ مدول باشد و T فضای برداری مدرج روی $\mathbb{Z}_p$ با پایه $x_\alpha \otimes u$ باشد. تجزیه‌ای که در بالا برای $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{F}}$ ساخته شد را استفاده می‌کنیم تا برج پستنیکوف[2] اصلاح شده برای $X \wedge E_p$ بسازیم. به طور مشخص دنباله تاربندی[3]

$$\begin{array}{ccc} Y_{i+۱} & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \\ Y_i & \xrightarrow{f_i} & K(T \otimes V_i) \end{array}$$

1) exterior algebra 2) Postnikov tower 3) fibration

که از تاربندی مسیر القا شده است. در بالا $Y_\circ = X \wedge E_p$،

$$T \otimes \ker(d_{i-1}) \cong \tilde{H}^*(Y_i, \mathbb{Z}_p) \cong T \otimes image(d_i)$$

و $T \otimes M_i = \tilde{H}^*(K(T \otimes V_i), \mathbb{Z}_p)$ و f_i^* از $1 \otimes d_i$ القا شده است. در نتیجه هموتوپی $X \wedge E_p$ توسط دنباله دقیق فضاهای برداری $T \otimes V_i$ روی $\mathbb{Z}_p$ به دست آمده است. از طرف دیگر $\pi_*(X \wedge E_p) \supset P_* = \oplus_s(T \otimes V_s)$. در نتیجه با توجه به بعد داریم $\pi_*(X \wedge E_p) = P_*$. ■

با توجه به دو قضیه قبل نتیجهٔ زیر به دست می‌آید.

۴-۴-۶ قضیه (میلنر): گروه کبردیسم $\Omega^i = \pi_i(MSO)$ تاب مرتبه فرد ندارد.

مراجع

[1] J. F. Adams, Stable homotopy and Generalized Homology.

[2] M. Atiyah, Bordism and Cobordism. Proc. Camb. Phil. Soc. 57(1961), 200-8.

[3] M. Atiyah, Thom Complexes, Proc. Lond. Math. Soc. XI(1961) 291-310.

[4] Davis and Kirk, Lecture Notes in Algebraic Topology.

[5] A. Hatcher, Algebraic topology.

[6] A. Hatcher, Spectral sequence.

[7] F. Hirzebruch, Topological method in algebraic geometry.

[8] S. O. Kochman, Bordism, Stable Homotogy and Adams Spectral Sequence.

[9] J. Milnor, The Steenrod algebra and it's dual, Ann of Math. 67(1958), 150-171.

[10] ———- , On cobordism ring Ω^* and it's complex analogue. Amer. J. Math. 82(1960), 505-21.

[11] ——— and Moore, On the structure of Hopf algebra. Ann. of Math. 81(1965) 211-264.

[12] V. Prasolov. elements of homology theory.

[13] Y. Rudyak. On thom spectra, Orientability and cobordism.

[14] R. Stong, Notes on cobordism theory.

[15] R. Thom, Quelques proprietes globales des variétés differentiables, Comment. Math. Helv., 28(1954), 17-86 (English translation).

[16] C.T.C. Wall. Determination of cobordism ring, Bull. Amer. Math. Soc. 65(1954), 329-31.

Abstract

Bordism was introduced By Poincare in 1895 in his famous paper "Analysis Situs" as classifying manifolds. Classifying of surfaces implies that the cobordism ring in dimension 2 is trivial if we restrict ourselves to orientable surfaces and is $\mathbb{Z}_2$ if we don't care the orientation. In dimension 3, Rohlin showed that every 3-manifold is boundary of some 4-manifold which means that the cobordism ring in this dimension is trivial. The concept of Bordism lay dormant until 1954 when Thom constructed a sequence of spaces (The spectrum MO) and showed that the direct limit of homotopy groups of these spaces is isomorphic to the bordism ring $\mathfrak{N}_*$ of all closed smooth manifolds. He was also able to compute $\pi_*(MO)$ as a polynomial algebra with generator in each positive degree not of the form $2^i - 1$. Simultaneously, Pontrjagin showed in 1955 that bordism ring of framed manifolds is isomorphic to graded ring of stable homotopy of spheres.this work led to computation of bordism ring with other structure. Thom showed that oriented cobordism ring mod torsion is completely determined by Pontrjagin classes. Hirzebruch uses this structure to prove the theorem which is entitled nowadays "Hirzebruch' Signature Theorem". In 1960, Wall computed bordism ring Ω_*^{SO} of all oriented manifolds. In the same year, Milnor showed that bordism ring Ω_*^U of closed manifolds with a complex structure on their stable normal bundles to be a polynomial algebra over integers with a generator in each positive even degree. In this thesis, I determine cobordism ring with framed, oriented , unoriented, complex structure on stable normal bundle.

Key Words: Thom spaces, Steenrod algebra, Adams' spectral sequence.

Sharif University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

M.Sc. Thesis

Real and Complex Cobordism Ring

By:

Sam Nariman

Supervisor:

Prof. S. Shahshahani

Advisor:

Dr. Mehrdad Shahshahani

2009